

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO
- CAMPUS URUTAÍ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WIDANREYLAN THIAGO DA SILVA RODRIGUES MARTINS

O MÉTODO DE NEWTON:
Aplicações com os Softwares Excel e Scilab

Urutaí-GO
Fevereiro/2026

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA GOIANO -**
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WIDANREYLAN THIAGO DA SILVA RODRIGUES MARTINS

O MÉTODO DE NEWTON:
Aplicações com os Softwares Excel e Scilab

Trabalho de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Urutaí, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Dassael Fabrício dos Reis Santos

Urutaí-GO
Fevereiro/2026

**Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema Integrado de Bibliotecas do IF Goiano - SIBi**

M386 Martins, Widanreylan Thiago da Silva Rodrigues
O MÉTODO DE NEWTON: Aplicações com os Softwares Excel
e Scilab / Widanreylan Thiago da Silva Rodrigues Martins.
Urutaí 2026.
56f. il.
Orientador: Prof. Dr. Dassael Fabrício dos Reis Santos.
Tcc (Licenciado) - Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia Goiano, curso de 0122123 - Licenciatura em
Matemática - Urutaí (Campus Urutaí).
1. Método de Newton. 2. Aplicações. 3. Excel. 4. Scilab. I.

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO

PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS

NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano a disponibilizar gratuitamente o documento em formato digital no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

IDENTIFICAÇÃO DA PRODUÇÃO TÉCNICO-CIENTÍFICA

Tese (doutorado)

Dissertação (mestrado)

Monografia (especialização)

TCC (graduação)

Artigo científico

Capítulo de livro

Livro

Trabalho apresentado em evento

Produto técnico e educacional - Tipo:

Nome completo do autor:

Matrícula:

Título do trabalho:

RESTRIÇÕES DE ACESSO AO DOCUMENTO

Documento confidencial: Não Sim, justifique:

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: / /

O documento está sujeito a registro de patente? Sim Não

O documento pode vir a ser publicado como livro? Sim Não

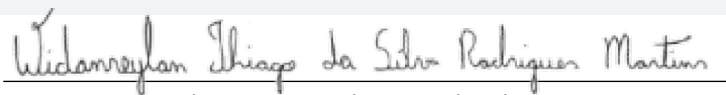
DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O(a) referido(a) autor(a) declara:

- Que o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- Que obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autoria, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- Que cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

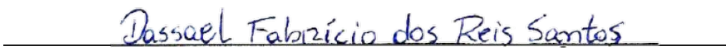
Local

/ /
Data



Assinatura do autor e/ou detentor dos direitos autorais

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Formulário 18/2026 - CEM-UR/GE-UR/DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

Widanreylan Thiago da Silva Rodrigues Martins

O Método de Newton: Aplicações com os Softwares Excel e Scilab

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano—Campus Urutaí como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, aprovado em 26 de fevereiro de 2026, pela Banca Examinadora constituída pelos professores

(Assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Dassael Fabricio dos Reis Santos
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Presidente da Banca (Orientador)

(Assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Davidson Freitas Nogueira
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

(Assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Jucelino Cardoso Marciano dos Santos
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais - Campus Araçuaí

Documento assinado eletronicamente por:

- **Dassael Fabricio dos Reis Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 26/02/2026 10:09:30.
- **Jucelino Cardoso Marciano dos Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 26/02/2026 10:11:01.
- **Davidson Freitas Nogueira, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 26/02/2026 10:35:47.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 26/02/2026. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 792997
Código de Autenticação: 3f3a44102f



AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por conceder-me força, sabedoria e perseverança ao longo de toda a minha trajetória acadêmica, possibilitando a superação dos desafios enfrentados até a conclusão deste curso.

À minha família, em especial à minha mãe e ao meu pai, expresso minha profunda gratidão pelo apoio, incentivo e compreensão constantes, que foram fundamentais para a realização deste objetivo.

Aos meus colegas de curso, sou grato por cada conversa, risada e troca de experiências. Vocês tornaram essa jornada mais leve, divertida e cheia de aprendizados. As dificuldades compartilhadas e os momentos de descontração fizeram com que cada etapa do curso tivesse um significado especial.

Ao Instituto Federal Goiano – Campus Urutaí, agradeço pelas oportunidades proporcionadas ao longo da formação, especialmente pela participação em eventos e projetos, os quais contribuíram de forma significativa para o meu desenvolvimento acadêmico, profissional e pessoal.

Aos professores, manifesto meu agradecimento pelos ensinamentos, pela dedicação e pelas experiências compartilhadas durante a formação acadêmica. Cada ensinamento recebido contribuiu significativamente para minha formação e para minha evolução como estudante e ser humano.

Por fim, registro meu agradecimento especial ao meu orientador, Dassael Fabrício dos Reis Santos, pela confiança em meu potencial, pela disponibilidade, pelo apoio e pelas orientações fundamentais para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo teórico sobre o Método de Newton e aplicar os conceitos estudados para implementação deste método numérico nos softwares Excel e Scilab. Mais precisamente, definiremos o Método de Newton, apresentaremos seus principais resultados teóricos e aplicaremos o método para o cálculo de raízes reais de funções contínuas. Em seguida, apresentaremos uma variação do Método de Newton para contornar a necessidade do cálculo da derivada da função dada. Por fim, para melhor compreensão teórica, utilizando os resultados estudados, o método será implementado em Excel e em ambiente Scilab.

Palavras-chave: Método de Newton, Aplicações, Excel, Scilab.

ABSTRACT

The present work aims to carry out a theoretical study on Newton's Method and to apply the concepts studied to the implementation of this numerical method in Excel and Scilab software. More precisely, we will define Newton's Method, present its main theoretical results, and apply the method to calculate real roots of continuous functions. Next, we will present a variation of Newton's Method to overcome the need to calculate the derivative of the given function. Finally, for better theoretical understanding, based on the results studied, the method will be implemented in Excel and in a Scilab environment.

Key-words: Newton Methods, Applications, Excel, Scilab.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação Geométrica do Teorema de Bolzano	21
2.2	Representação Geométrica do Teorema de Bolzano com raiz única	22
2.3	Gráfico de $f(x) = \cos(x) - x$ no intervalo $[0, \pi]$	23
2.4	Gráfico de $f(x) = e^x - \sin(x) - 2$	26
2.5	Gráficos de $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = \sin(x) + 2$	27
2.6	Interpretação Geométrica do Método de Newton	30
2.7	Representação de escolha de x_0 cujo método não converge	31
2.8	Gráfico de $f(x) = x - x^3$ no intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	32
2.9	Interpretação Geométrica do Método das Secantes	37
3.1	Tela inicial do Excel	41
3.2	Programação da primeira linha do Método de Newton	42
3.3	Programação da segunda e terceira linhas do Método de Newton	43
3.4	Programação do Método de Newton para $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$	43
3.5	Gráfico da função $f(x) = \cos x - x$	44
3.6	Programação da primeira linha do Método de Newton	44
3.7	Programação da Linha 3 e Linha 4 do Método de Newton	45
3.8	Programação do Método de Newton para a função $f(x) = \cos x - x$	45
3.9	Programação das primeiras linhas do Método das Secantes	47
3.10	Programação das aproximações da raiz exata de f	47
3.11	Programação do Método das Secantes para $f(x) = 4 \sin(x) - e^x$	48
3.12	Área de trabalho do Scilab	49
3.13	Programação do Método de Newton em Scilab	50
3.14	Implementação do Método de Newton em Scilab	50
3.15	Implementação do Método de Newton em Scilab para $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$	51
3.16	Algoritmo do Método de Newton em Scilab para $f(x) = \cos x - x$	52
3.17	Implementação do Método de Newton em Scilab para $f(x) = \cos x - x$	53

LISTA DE TABELAS

2.1	Método de Newton para $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$	35
2.2	Método de Newton para $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$	36
2.3	Método das Secantes para $f(x) = \cos x - x^2$	39

CONSIDERAÇÕES INICIAIS	9
1 RESULTADOS PRELIMINARES	11
1.1 SEQUÊNCIAS CONVERGENTES	11
1.2 FUNÇÕES CONTÍNUAS	14
1.3 FUNÇÕES POLINOMIAIS	16
2 O MÉTODO DE NEWTON	18
2.1 INTRODUÇÃO	18
2.2 LOCALIZAÇÃO DAS RAÍZES	19
2.3 REFINAMENTO - O MÉTODO DE NEWTON	28
2.3.1 EXEMPLOS	33
2.3.2 O MÉTODO DAS SECANTES	36
3 APLICAÇÕES DO MÉTODO DE NEWTON UTILIZANDO OS SOFTWARES EXCEL E O SCILAB	40
3.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON COM O EXCEL	40
3.1.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DAS SECANTES	45
3.2 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON COM O SCILAB	48
CONSIDERAÇÕES FINAIS	55

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O cálculo numérico é uma parte da matemática aplicada que surgiu da necessidade de resolver problemas matemáticos que não podiam ser solucionados de forma exata. De modo geral, o cálculo numérico se dedica ao desenvolvimento de métodos e algoritmos capazes de obter soluções aproximadas para problemas matemáticos que não tem solução exata ou que a solução exata é de difícil obtenção.

Desde os tempos antigos, existe a necessidade de buscar maneiras de aproximar soluções de problemas de matemática. Um exemplo clássico é Arquimedes (287–212 a.C.), que desenvolveu técnicas para calcular áreas, volumes e até uma aproximação de π . Mais tarde, durante a Idade Média e o Renascimento, a astronomia e a navegação exigiam cálculos precisos para localizar estrelas e traçar rotas, e isso impulsionou a criação de métodos práticos para lidar com os números.

Um dos marcos mais importantes na história do cálculo numérico ocorreu no século XVII, com o surgimento do método de Newton-Raphson. Isaac Newton foi o precursor do método iterativo para encontrar raízes de funções e, tempos depois, Joseph Raphson publicou uma versão semelhante, que simplificava a aplicação prática. Juntos, eles criaram e sistematizaram uma maneira de encontrar raízes de funções usando um processo iterativo baseado em retas tangentes. Esse método não só trouxe precisão, mas também tornou possível enfrentar problemas matemáticos complexos de forma prática, algo que antes era quase impossível sem cálculos extensos.

Nos séculos XVIII e XIX, matemáticos como Euler, Lagrange e Gauss deram novos passos, estruturando métodos para interpolação, integração e resolução de sistemas de equações. Esses estudos contribuíram para tornar os cálculos mais organizados e confiáveis. No entanto, o

ápice da revolução veio com o avanço da tecnologia e os computadores, no século XX. Com isso, cálculos que levariam horas para obter uma solução aproximada, podiam ser feitos em segundos, por meio de algoritmos criados para processar todos os dados, abrindo assim portas para simulações complexas e aplicações em engenharia, física, finanças e até inteligência artificial. E, mesmo com todo o avanço tecnológico, o Método de Newton continua sendo uma ferramenta essencial, aplicável tanto a funções simples quanto a sistemas não lineares mais complexos.

Assim, o presente trabalho tem como objetivo principal fazer um breve estudo sobre o Método de Newton e aplicar o método para aproximar uma raiz real de uma dada função através de algoritmos criados nos softwares Excel e Scilab. A metodologia adotada neste trabalho baseia-se em pesquisa bibliográfica, fundamentada nos estudos de alguns dos principais autores que tratam do tema, conforme indicado nas referências bibliográficas, e em testes realizados no Excel e no Scilab para implementação do Método de Newton. Deste modo, o trabalho será dividido em três capítulos descritos a seguir:

No primeiro capítulo, será feito um breve estudo sobre funções polinomiais, sequências numéricas e funções contínuas, com objetivo de estabelecer as definições e resultados que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo, faremos um estudo teórico sobre o Método de Newton. Mais precisamente, definiremos o Método de Newton, descreveremos o procedimento para localização de uma raiz de uma dada função f , ou seja, para obtenção de algum intervalo real que contém a raiz de f , e estabeleceremos o processo iterativo que aproxima essa raiz com uma precisão desejada. Para fase de localização da raiz, utilizaremos como ferramentas principais o Teorema de Bolzano, que é um caso particular do Teorema do Valor Intermediário, e análise do comportamento do gráfico da função. Depois, para a fase de aproximação da raiz, estabeleceremos o processo iterativo para aproximação da raiz, um critério de parada, condições para convergência do método e exemplos com aplicações do Método de Newton e do Método das Secantes.

Por fim, no terceiro capítulo, serão implementados os Métodos de Newton e das Secantes para resolução de equações não-lineares no software Excel, assim como será criado um algoritmo para implementar o Método de Newton no software Scilab. Inicialmente, será apresentado o conceito de cada software e em seguida a implementação do passo a passo do algoritmo nos dois ambientes computacionais. Para favorecer a compreensão, serão inseridas imagens ilustrativas que demonstrarão cada etapa do processo. Depois, será possível uma visualização mais clara dos métodos numéricos trabalhados.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos resultados gerais que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. De modo mais preciso, estabeleceremos resultados sobre equações polinomiais, convergência de sequências e funções contínuas. Desenvolveremos este capítulo baseados nos trabalhos de (BARROSO *et al.*, 1987), (FIGUEIREDO, 1996), (HEFEZ e VILLELA, 2022), (LIMA, 2014) e suas referências bibliográficas.

1.1 SEQUÊNCIAS CONVERGENTES

Nesta seção, apresentaremos os principais resultados sobre convergência de sequências numéricas. As demonstrações dos resultados apresentados aqui serão omitidas, porém, ao leitor interessado em conhecer tais demonstrações, sugerimos consultar (FIGUEIREDO, 1996) e (LIMA, 2014). Primeiro, definiremos o conceito de sequência numérica na reta.

Definição 1.1.1. *Uma sequência numérica é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número $n \in \mathbb{N}$ um número real $x(n) \in \mathbb{R}$, que denotaremos por x_n . Denominaremos x_n por n -ésimo termo da sequência. Assim, $x_1 = x(1)$ é o primeiro termo da sequência, $x_2 = x(2)$ é o segundo termo, e assim sucessivamente.*

Denotaremos por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) , a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. É importante ressaltar que uma sequência (x_n) é diferente do conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Este último é o conjunto formado pelos elementos da sequência (x_n) . Este fato fica mais evidente quando olhamos para sequência $(0, a, 0, a, 0, a, 0, a, \dots)$, onde $a \in \mathbb{R}$, e para o conjunto dos termos desta sequência que é o conjunto $\{0, a\}$. A definição a seguir estabelece o conceito de sequência limitada.

Definição 1.1.2. *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que:*

- (i) (x_n) é limitada superiormente se existe $c_1 \in \mathbb{R}$, tal que, $x_n \leq c_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) (x_n) é limitada inferiormente se existe $c_2 \in \mathbb{R}$, tal que, $c_2 \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) (x_n) é limitada se existe uma constante real $c > 0$, tal que, $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que, f é limitada se, e somente se, f é limitada inferiormente e limitada superiormente. De fato, sendo (x_n) limitada, existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e disto, $-c \leq x_n \leq c$. Logo, x_n é limitada inferiormente para $c_2 = -c$ e limitada superiormente para $c_1 = c$. Reciprocamente, se (x_n) é limitada superiormente e limitada inferiormente, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, tais que, $c_2 \leq x_n \leq c_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, (x_n) é limitada.

Definição 1.1.3. *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que (x_n) é convergente para um número real a se, para todo número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se encontrar um número $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $|x_n - a| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. O número a é denominado limite de (x_n) e, denotaremos,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ ou simplesmente, } \lim x_n = a, \text{ ou ainda, } x_n \longrightarrow a.$$

Em outras palavras, a definição acima afirma que, a menos de um conjunto finito de termos, todos os termos da sequência (x_n) pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. De fato, basta notar que a condição $|x_n - a| < \varepsilon$ é equivalente a condição $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, e isto implica em $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, ou seja, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para todo $n > n_0$. Se (x_n) não é convergente, dizemos que (x_n) é uma sequência **divergente**.

A sequência cujo termo geral é $x_n = \frac{1}{n}$, por exemplo, converge para 0. De fato, basta tomar $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, e teremos que

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0,$$

isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Além disso, esta sequência é limitada, uma vez que $\left| \frac{1}{n} \right| \leq 1$. Posteriormente, mostraremos um exemplo de uma sequência divergente. O teorema apresentado a seguir mostra que uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Teorema 1.1.4 (Unicidade do Limite). *Se (x_n) é uma sequência de números reais, tal que, $\lim x_n = a$, então $a \in \mathbb{R}$ é único.*

Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 25).

Em outras palavras, o teorema acima afirma que se $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$, então não pode existir $b \in \mathbb{R}$, com $b \neq a$, tal que, $\lim x_n = b$.

O próximo teorema mostra que se uma sequência está entre duas sequências que convergem para a , então esta sequência necessariamente também converge para a . Este resultado é conhecido na literatura como Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche.

Teorema 1.1.5 (Confronto). *Sejam (x_n) , (y_n) e (z_n) sequências de números reais, tais que, $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo n suficientemente grande, e*

$$\lim x_n = \lim y_n = a \in \mathbb{R}.$$

Então, $\lim z_n = a$.

Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 28).

Seja (x_n) uma sequência. Uma **subsequência** de (x_n) , denotada por $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou (x_{n_k}) , é a restrição da função x a um subconjunto infinito de índices $\mathcal{N} = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\} \subset \mathbb{N}$. Neste caso, escrevemos $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$. O Teorema a seguir afirma que as subsequências de (x_n) tem o mesmo limite de (x_n) .

Teorema 1.1.6. *Se (x_n) é uma sequência que converge para $a \in \mathbb{R}$, então toda subsequência de (x_n) converge para a .*

Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 25).

O teorema a seguir, de fundamental importância para teoria, garante que toda sequência convergente é limitada.

Teorema 1.1.7. *Seja (x_n) uma sequência, tal que, $\lim x_n = a$. Então, existe uma constante real $c > 0$, tal que, $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 25).

É imediato que a recíproca do teorema acima não é verdadeira, isto é, nem toda sequência limitada é convergente. De fato, a sequência alternada $(x_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ é limitada, pois $|x_n| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mas não é convergente, pois tem duas subsequências $(x_{n_k}) = (1, 1, 1, 1, \dots)$ e $(y_{n_k}) = (0, 0, 0, 0, \dots)$ que convergem para limites distintos, o que contradiz o Teorema 1.1.6.

Disto, a sequência (x_n) é divergente. A seguir, será definido o que se entende por sequência monótona.

Definição 1.1.8. *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que:*

- (i) (x_n) é **não-decrescente** se, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $x_n \leq x_{n+1}$;
- (ii) (x_n) é **não-crescente** se, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $x_{n+1} \leq x_n$;
- (iii) (x_n) é **monótona** se (x_n) é não-decrescente ou não-crescente.

Em particular, se $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, diz-se que a sequência (x_n) é **crescente**, caso contrário, se $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, diz-se que a sequência (x_n) é **decrescente**.

Segundo Lima (2011, p. 26), "toda sequência monótona não-decrescente (respect. não-crescente) é limitada inferiormente (respect. superiormente) pelo seu primeiro termo".

Sabemos, pelo Teorema 1.1.7, que toda sequência convergente é limitada, porém, como mostrado anteriormente, a recíproca não é verdadeira. Neste ponto, pode-se questionar: quais condições precisam ser impostas a uma sequência limitada para que esta sequência seja convergente? O teorema apresentado a seguir é quase uma recíproca do Teorema 1.1.7 e, em essência, mostra que se adicionarmos a uma sequência limitada a condição de ser monótona, então essa sequência é convergente.

Teorema 1.1.9. *Toda sequência monótona limitada é convergente*

Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 26).

Agora, como consequência do teorema anterior, pode-se mostrar que uma sequência limitada, apesar de não ser convergente, pode admitir subsequência convergente. Este resultado é conhecido como Teorema de Bolzano-Weierstrass e será apresentado à seguir.

Teorema 1.1.10 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 26).

Na próxima seção, estabeleceremos resultados sobre funções contínuas na reta.

1.2 FUNÇÕES CONTÍNUAS

O conceito de função contínua é central no estudo da matemática. Nesta seção, apresentaremos resultados básicos do estudo das funções contínuas que serão aplicados posteriormente

no Capítulo 2 para estudo de existência de raízes de funções em um intervalo real. Um estudo mais profundo sobre o assunto pode ser encontrado na literatura em livros de cálculo diferencial ou análise real. A definição a seguir estabelece o conceito de continuidade de uma função.

Definição 1.2.1. *Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a \in A$. Dizemos que uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua no ponto** a se, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in A$, tem-se que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, sempre que $|x - a| < \delta$. Dizemos que f é uma **função contínua**, se f é contínua em todos os pontos de A . Além disso, se f não é contínua em um ponto $a \in A$, dizemos que f é **descontínua** nesse ponto.*

Equivalentemente, f é contínua no ponto $a \in A$ se $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ sempre que $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Além disso, se $a \in A$ é um ponto de acumulação¹ de A , então f é contínua em a se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1.1)$$

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, por exemplo, é contínua, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n = f(a). \quad (1.2)$$

O teorema a seguir trata sobre continuidade de operações de funções contínuas.

Teorema 1.2.2. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em um ponto $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\alpha f, \quad f + g, \quad fg, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{com } g(a) \neq 0),$$

são funções contínuas em a . Também, se $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in A$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $b \in B$, com $b = f(a)$, e $f(A) \subset B$, então $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 77).

Do teorema anterior, podemos concluir que toda função polinômial $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, é uma função contínua. Também, são contínuas em $\mathbb{R}$ as funções trigonométricas (em seus domínios), exponenciais, logarítmicas e as operações entre essas funções.

O teorema a seguir fornece uma equivalência para definição de função contínua em termos de convergência de sequências.

¹Segundo Lima (2014), " $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se a é o limite de alguma sequência de pontos $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ ".

Teorema 1.2.3. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in A$ se, e somente se, $\lim f(x_n) = f(a)$, para toda sequência $(x_n) \subset A$, com $\lim x_n = a$.*

Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 77).

Outros resultados sobre funções contínuas, como o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Bolzano, por exemplo, estão desenvolvidos no Capítulo 2 deste trabalho. Tal estratégia foi adotada para que haja continuidade no desenvolvimento da teoria feita no Capítulo 2. Para resultados mais detalhados e exemplos adicionais sobre continuidade sugerimos consultar (LIMA, 2014) e suas referências bibliográficas. Na próxima seção, faremos uma breve revisão sobre funções polinomiais.

1.3 FUNÇÕES POLINOMIAIS

Definição 1.3.1. *Um **polinômio** ou **função polinomial** em $\mathbb{R}$ é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.*

Na definição acima, os valores a_i , com $0 \leq i \leq n$, são chamados coeficientes de f e n é denominado grau do polinômio. Se f é um polinômio, então a equação $f(x) = 0$ é denominada **equação polinomial**. A definição a seguir estabelece o conceito de solução de uma equação polinomial.

Definição 1.3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio. Dizemos que $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é uma raiz de f , ou uma solução da equação $f(x) = 0$, se $f(\bar{x}) = 0$.*

O número $\bar{x} = -\frac{b}{a}$, por exemplo, é raiz da função $f(x) = ax + b$. Já o número $\bar{x} = \sqrt{a}$, com $a \in \mathbb{N}$, é uma raiz da função $f(x) = x^2 - a$. O Teorema a seguir, denominado Teorema Fundamental da Álgebra, garante existência de pelo menos uma raiz (neste caso complexa) para uma equação polinomial do grau $n \geq 1$.

Teorema 1.3.3 (Fundamental da Álgebra). *Toda função polinomial não constante de grau $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa.*

Demonstração: Veja (HEFEZ e VILLELA, 2022, p. 145).

O teorema a seguir, cuja prova é feita por indução sobre o grau do polinômio, é uma outra versão do Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 1.3.4 (Fundamental da Álgebra). *Toda função polinômial de grau $n \geq 1$ tem, no máximo, n raízes.*

Demonstração: Veja (HEFEZ e VILLELA, 2022, p. 99).

Um polinômio do grau três, por exemplo, tem no máximo 3 raízes, podendo essas raízes serem todas reais (iguais ou distintas) ou duas complexas e uma real. O teorema a seguir mostra que se um polinômio f tem uma raiz complexa, então este polinômio tem uma segunda raiz complexa.

Teorema 1.3.5. *Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio do grau $n \geq 2$, com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Se $z = \alpha + \beta i$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, é uma raiz de f , então o conjugado de z , dado por $\bar{z} = \alpha - \beta i$ é, também, uma raiz de f .*

Demonstração: Veja (BARROSO *et al.*, 1987, p. 86).

É importante observar que se z é uma raiz de multiplicidade k de f , então $\bar{z}$ também tem multiplicidade k . Voltando ao caso do polinômio do grau três. Suponha que f seja um polinômio do grau três que tem uma raiz complexa. Pelo teorema anterior, como as raízes complexas do polinômio são z e $\bar{z}$ e este polinômio tem, no máximo, três raízes, segue que pelo menos uma raiz deste polinômio deve ser real. Mais geralmente, se f é um polinômio do grau ímpar, então f tem, pelo menos uma raiz real (LIMA, 2014, p. 78).

Por outro lado, se f é um polinômio do grau par, pode ser que f não tenha raízes reais. De fato, a função $f(x) = x^2 - 6x + 10$, por exemplo, tem somente raízes complexas dadas por $z = 3 + i$ e $\bar{z} = 3 - i$.

Outros resultados sobre polinômios podem ser encontrados em (HEFEZ e VILLELA, 2022) e (MUNIZ NETO, 2016). Por se tratar de uma teoria muito grande e trabalhosa, e para não fugir dos objetivos do trabalho, resolvemos tratar aqui somente dos resultados sobre polinômios e equações polinomiais que serão necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Ao leitor interessado em conhecer resultados mais gerais sobre polinômios, sugerimos consultar livros de Álgebra que tratam sobre anéis de polinômios. No próximo capítulo, desenvolveremos um pouco da teoria para aplicação do Método de Newton.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DE NEWTON

Neste capítulo, apresentaremos o Método de Newton para obtenção de solução de equações da forma $f(x) = 0$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Para isso, primeiro, estabeleceremos alguns resultados clássicos de Cálculo que servirão de base para a posterior dedução do Método de Newton. As demonstrações omitidas de alguns teoremas apresentados estão referenciadas ao longo do texto. Os principais resultados deste capítulo se baseiam nos trabalhos de (ARENALES e DAREZZO, 2008), (BARROSO *et al.*, 1987), (FRANCO, 2006), (RUGGIERO e LOPES, 1996) e suas referências bibliográficas.

2.1 INTRODUÇÃO

Em muitos casos na Ciência e Engenharia, tem-se o interesse de determinar um número $\bar{x}$ que anula uma dada função f , ou seja, que satisfaça a condição $f(\bar{x}) = 0$. Este número $\bar{x}$ é chamado de raiz ou zero de f ou de solução da equação $f(x) = 0$. Graficamente, $\bar{x}$ é o ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo das abscissas.

Para as equações de primeiro e segundo grau, existem alguns métodos diretos para determinar uma solução da equação $f(x) = 0$, como, por exemplo, o isolamento da variável no caso de uma equação do primeiro grau e a fórmula de Bháskara ou o completamento de quadrados para equações do segundo grau. Por outro lado, uma classe particular de equações de terceiro e de quarto grau podem ser resolvidas por métodos algébricos como, por exemplo, as Fórmulas de Cardano-Tartaglia. Porém, quando se trata de polinômios de grau superior a quatro, e para grande maioria das equações transcendentais, o problema só pode ser resolvido por **métodos iterativos (ou numéricos)** que aproximam as soluções destas equações.

Através de técnicas numéricas, é possível obter uma solução aproximada da solução exata que esteja tão próxima desta quanto se deseja. A maioria dos procedimentos numéricos fornece uma sequência de aproximações que, a cada iteração, se torna mais próxima da solução exata do que a iteração anterior, de forma que a repetição do procedimento fornece uma aproximação tão próxima que difere do valor verdadeiro por alguma tolerância pré-fixada, denominada **erro** e denotada por ε . Apesar desses métodos numéricos não fornecerem raízes exatas para a equação $f(x) = 0$, elas podem ser calculadas com a precisão desejada, desde que certas condições sobre a função f sejam satisfeitas.

De modo geral, para determinar uma solução de uma equação da forma $f(x) = 0$ utilizando um método numérico, é necessário seguir duas etapas básicas:

- **Etapla 1 - Localização ou Isolamento da Raiz:** Nesta etapa, por meio do Teorema do Valor Intermediário ou por análise gráfica, deve-se determinar um intervalo $[a, b]$ que contenha uma, e somente uma, raiz da equação $f(x) = 0$.
- **Etapla 2 - Refinamento:** Nesta etapa, utilizando um método numérico apropriado, deve-se reduzir o comprimento do intervalo inicial até determinar um intervalo com o menor comprimento possível ou com comprimento pré-fixado que contenha a raiz de f , ou seja, melhorar o valor da raiz aproximada, refinando-a até o grau de exatidão pretendido.

Nas seções a seguir, descreveremos cada uma dessas etapas.

2.2 LOCALIZAÇÃO DAS RAÍZES

Nesta seção, apresentaremos dois métodos para localização das raízes de uma função f . A menos do contrário, ao longo desta seção, f denotará uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. De maneira geral, existem dois métodos para localizar (ou isolar) uma raiz da função f : o Teorema de Bolzano e análise sobre o gráfico de f .

CASO 1 (O TEOREMA DE BOLZANO): Em termos gerais, o Teorema de Bolzano é um caso particular do Teorema do Valor Intermediário e, em essência, garante que se uma função contínua f troca de sinal em um intervalo $[a, b]$, então existe pelo menos uma raiz de f nesse intervalo. A seguir, apresentaremos uma versão para o Teorema de Bolzano cuja demonstração segue as ideias de (GUIDORIZZI, 2013).

Teorema 2.2.1 (Bolzano). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que, $f(a) < 0 < f(b)$. Então, existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$, tal que, $f(x_0) = 0$, isto é, existe pelo menos uma raiz x_0 de f no intervalo $[a, b]$.*

Demonstração: Defina $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e seja c_0 o ponto médio do segmento $[a_0, b_0]$, isto é, $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Se $f(c_0) = 0$, então $x_0 = c_0$ é a raiz procurada. Caso contrário, tem-se que $f(c_0) < 0$ ou $f(c_0) > 0$. Suponha o caso que $f(c_0) < 0$ (o caso $f(c_0) > 0$ segue por analogia) e defina $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$. Neste caso, $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Seja c_1 o ponto médio do segmento $[a_1, b_1]$, isto é, $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Se $f(c_1) = 0$, então $x_0 = c_1$ é a raiz procurada. Caso contrário, tem-se que $f(c_1) < 0$ ou $f(c_1) > 0$. Suponhamos, sem perda de generalidades, que $f(c_1) < 0$ e defina $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Neste caso, $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$. Seja c_2 o ponto médio do segmento $[a_2, b_2]$, isto é, $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$. Prosseguindo com este raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos da forma $[a_i, b_i]$, com $i \geq 0$, tal que.

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots, \quad (2.1)$$

e $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$, para todo $n \geq 0$. Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados¹, existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que, $x_0 \in [a_n, b_n]$, para todo $n \geq 0$. Além disso, note que as sequências de termos gerais a_n e b_n convergem para x_0 . Da continuidade de f , segue que

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0. \quad (2.2)$$

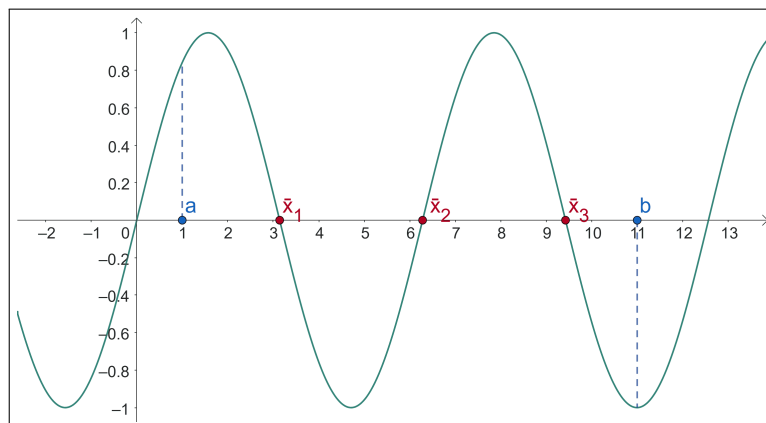
Portanto, concluímos que, $f(x_0) = 0$. Isto prova o Teorema.

□

É consequência imediata do Teorema de Bolzano que se f é uma função contínua em $[a, b]$, tal que, $f(b) < 0 < f(a)$, então f tem pelo menos uma raiz x_0 em $[a, b]$. De fato, definindo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = -f(x)$, tem-se que $g(a) = -f(a) < 0 < -f(b) = g(b)$. Como g é contínua em $[a, b]$ (pois $-f$ é contínua em $[a, b]$) segue, pelo Teorema de Bolzano, que existe $x_0 \in [a, b]$, tal que, $g(x_0) = 0$ e, disto, $f(x_0) = -g(x_0) = 0$.

A Figura 2.1 a seguir fornece uma interpretação geométrica do Teorema de Bolzano no caso em que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

¹**Teorema (Intervalos Encaixados).** *Dada uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$, existe pelo menos um número real x_0 , tal que, $x_0 \in [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
Demonstração: Veja (LIMA, 2014, p. 18).

Figura 2.1: Representação Geométrica do Teorema de Bolzano

Fonte: Gerado pelo autor utilizando o Software Geogebra

Observe, também, que as condições $f(a) < 0 < f(b)$ e $f(b) < 0 < f(a)$ são equivalentes a condição $f(a)f(b) < 0$. Assim, no Teorema de Bolzano, poderíamos substituir a condição $f(a) < 0 < f(b)$ pela condição mais geral $f(a)f(b) < 0$. Logo, quando trocamos a condição $f(a) < 0 < f(b)$ por $f(a)f(b) < 0$, incluímos no Teorema de Bolzano ambas as condições, $f(a) < 0 < f(b)$ e $f(b) < 0 < f(a)$, sem distinguir qual das duas condições ocorre.

Note que o Teorema de Bolzano não garante a unicidade da raiz de f no intervalo $[a, b]$. Com isso, pode ser que o intervalo $[a, b]$ tenha inúmeras raízes de f . Na Figura 2.1, por exemplo, tem-se uma função contínua que satisfaz as condições do Teorema de Bolzano e tem três raízes reais em um intervalo $[a, b]$. Para garantir existência de somente uma raiz de f em $[a, b]$ é necessário impor condições para que f seja somente crescente ou somente decrescente em $[a, b]$. Para isto, basta que a derivada f' de f não troque de sinal em $[a, b]$.

O Teorema a seguir garante a unicidade da raiz de f em $[a, b]$.

Teorema 2.2.2 (Unicidade da raiz). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que, $f(a) < 0 < f(b)$ e $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$)², para todo $x \in [a, b]$. Então, existe um único $x_0 \in [a, b]$, tal que, $f(x_0) = 0$, isto é, x_0 é a única raiz de f no intervalo $[a, b]$.*

Demonstração: Pelo Teorema de Bolzano, existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$, tal que, $f(x_0) = 0$. Provaremos que x_0 é a única raiz de f em $[a, b]$. Para isso, consideraremos o caso em que $f'(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$, e o caso $f'(x) < 0$ segue por analogia. Suponha, por contradição, que existem $x_0, x_1 \in [a, b]$, com $x_0 < x_1$, tais que, $f(x_0) = 0$ e $f(x_1) = 0$. Como $f'(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$, segue que f é crescente em $[a, b]$ e, disto, $0 = f(x_0) < f(x_1) = 0$, o que é

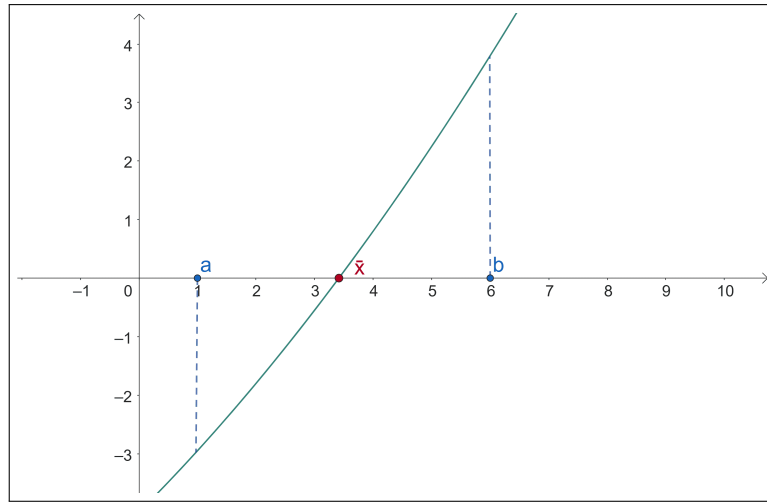
²Se f é uma função contínua em (a, b) e $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é estritamente crescente em (a, b) . Analogamente, se f é uma função contínua em (a, b) e $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é estritamente decrescente em (a, b) . (Veja (Guidorizzi, Vol. 1, 2013))

impossível. Analogamente, se $x_1 < x_0$, pelo crescimento de f , tem-se que $0 = f(x_1) < f(x_0) = 0$, o que é absurdo. Portanto, $x_0 = x_1$ e f tem uma única raiz no intervalo $[a, b]$.

□

A Figura 2.2 a seguir representa geometricamente o caso em que o Teorema de Bolzano admite uma única raiz no intervalo $[a, b]$ com $f'(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Figura 2.2: Representação Geométrica do Teorema de Bolzano com raiz única



Fonte: Gerado pelo autor utilizando o Software Geogebra

Considere, por exemplo, a função $f(x) = \cos(x) - x$. Note que f é contínua, pois é a soma da função trigonométrica $\cos(x)$ com a função polinomial $-x$. Além disso,

$$f(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi < 0 < 1 = \cos(0) - 0 = f(0),$$

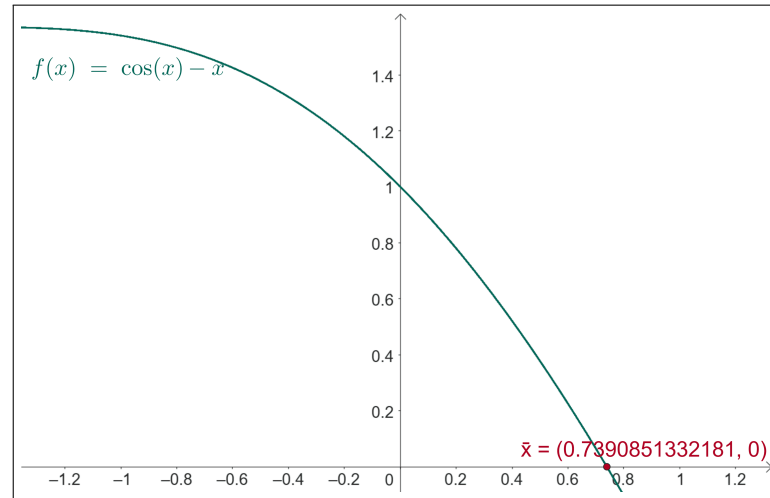
ou seja, $f(0)f(\pi) < 0$. Consequentemente, pelo Teorema de Bolzano, existe pelo menos uma raiz de f no intervalo $[0, \pi]$, isto é, existe pelo menos um $x_0 \in [0, \pi]$, tal que, $f(x_0) = 0$.

Agora, observe que $f'(x) = -\sin(x) - 1$. Como $\sin(x) \geq 0$, para todo $x \in [0, \pi]$, segue que

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 \leq -1 < 0, \text{ para todo } x \in [0, \pi], \quad (2.3)$$

e f é estritamente decrescente no intervalo $[0, \pi]$. Segue do Teorema 2.2.2 que a raiz de f é única no intervalo $[0, \pi]$. De fato, a raiz da função f existe e é aproximadamente 0,739085.

A Figura 2.3 a seguir mostra o gráfico da função $f(x) = \cos(x) - x$ e sua única raiz real no intervalo $[0, \pi]$.

Figura 2.3: Gráfico de $f(x) = \cos(x) - x$ no intervalo $[0, \pi]$ 

Fonte: Gerado pelo autor utilizando o software Geogebra

Mas geralmente, se trocarmos a condição $f(a) < 0 < f(b)$ por $f(a) < d < f(b)$ no Teorema de Bolzano, onde d é um número real diferente de zero, então temos um resultado mais geral, denominado Teorema do Valor Intermediário, que será apresentado a seguir e cuja demonstração segue as ideias de (GUIDORIZZI, 2013).

Teorema 2.2.3 (Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que, $f(a) < d < f(b)$. Então, existe pelo menos um ponto $x_0 \in [a, b]$, tal que, $f(x_0) = d$.*

Demonstração: Defina $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - d$. Logo, g é contínua, $g(a) = f(a) - d$ e $g(b) = f(b) - d$. Disto, $g(a) < 0 < g(b)$. Pelo Teorema de Bolzano, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que, $g(x_0) = 0$, de onde segue que $f(x_0) - d = 0$, ou seja, $f(x_0) = d$.

□

Como visto anteriormente, o Teorema de Bolzano pode ser utilizado para localizar uma raiz real de uma função contínua f que troca de sinal no intervalo $[a, b]$. Diante disso, a pergunta que surge é se é possível determinar a quantidade de raízes reais de f nesse intervalo. O Teorema 2.2.2 mostra que, se f tem derivada positiva (ou negativa) em $[a, b]$, então a raiz real x_0 de f nesse intervalo é única. Mas e no caso em que não se tem informação sobre a derivada de f em $[a, b]$? É possível pelo menos dar uma noção para a quantidade de raízes reais de f em $[a, b]$? Em geral, a resposta é não. Entretanto, no caso em que f é uma função polinomial com coeficientes reais, é possível afirmar se f tem uma quantidade par ou ímpar de raízes no intervalo considerado.

Se $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, por exemplo, tem-se que f tem uma ou três raízes reais. De fato, Lima (2014, p.78) prova que

todo polinômio real de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real. Disto, f tem pelo menos uma raiz real, pois tem grau ímpar. Por outro lado, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, f tem no máximo três raízes. Logo, f só pode ter um raiz real e duas complexas ou três raízes reais. De fato, suponha, por absurdo, que f tenha duas raízes reais. Então, a terceira raiz deve ser complexa. Mas, da teoria das equações algébricas, se z é uma raiz complexa de f , então o conjugado de z , denotado por $\bar{z}$ é, também, uma raiz complexa de f . Isto implicaria em f teria quatro raízes, o que é impossível. Logo, f tem, de fato, um número ímpar de raízes reais, à saber, uma ou três raízes reais.

Por outro lado, se $f(x) = x^2 + 1$, então as raízes de f são $-i$ e i , que são raízes complexas. Portanto, f não tem raízes reais. Note que, para este polinômio, tem-se que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Disto, $f(a)f(b) > 0$, para todo intervalo $[a, b]$.

O Teorema a seguir, cuja demonstração se baseia nas ideias de Iezzi (2013), generaliza os exemplos acima e estabelece condições para que uma função polinomial tenha um número par ou ímpar de raízes reais.

Teorema 2.2.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ uma função polinomial, com $a_n \neq 0$ e $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, \dots, n$, e seja $x \in (a, b)$.*

- (1) *Se $f(a)f(b) < 0$, então existe um número ímpar de raízes reais de f no intervalo (a, b) .*
- (2) *Se $f(a)f(b) > 0$, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais de f no intervalo (a, b) .*

Demonstração: Primeiro, sabemos que se z é uma raiz complexa de $f(x) = 0$, então o conjugado de z , denotado por $\bar{z}$ é, também, uma raiz dessa equação. Assim, sejam $x_1, x_2, \dots, x_m$ as raízes reais de f e $z_1, z_2, \dots, z_p, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_p$ as raízes complexas, com parte imaginária não-nula, dessa equação. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, podemos escrever

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)(x - z_1)(x - \bar{z}_1) \cdots (x - z_p)(x - \bar{z}_p). \quad (2.4)$$

Se $z_j = \alpha_j + \beta_j i$, com $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \neq 0$ e $1 \leq j \leq p$, então $\bar{z}_j = \alpha_j - \beta_j i$ e

$$z_j + \bar{z}_j = (\alpha_j + \beta_j i) + (\alpha_j - \beta_j i) = 2\alpha_j \text{ e } z_j \bar{z}_j = (\alpha_j + \beta_j i)(\alpha_j - \beta_j i) = \alpha_j^2 + \beta_j^2.$$

Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (x - z_j)(x - \bar{z}_j) &= x^2 - (z_j + \bar{z}_j)x + z_j \bar{z}_j = x^2 - 2\alpha_j x + (\alpha_j^2 + \beta_j^2) = (x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2) + \beta_j^2 \\ &= (x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Disto, segue que $(x - z_1)(x - \bar{z}_1) \cdots (x - z_p)(x - \bar{z}_p) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Denotando $Z(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1) \cdots (x - z_p)(x - \bar{z}_p)$, tem-se que $Z(x) > 0$ e

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)Z(x). \quad (2.6)$$

Agora, seja x_i ($1 \leq i \leq m$) uma raiz de $f(x) = 0$. Se $x_i \in (a, b)$, então $(a - x_i)(b - x_i) < 0$. Por outro lado, se $x_i < a < b$ ou $a < b < x_i$, então $(a - x_i)(b - x_i) > 0$. Assim,

$$f(a)f(b) = a_n^2(a - x_1)(b - x_1)(a - x_2)(b - x_2) \cdots (a - x_m)(b - x_m)Z(a)Z(b). \quad (2.7)$$

Disto, os únicos fatores negativos de $f(a)f(b)$ são os fatores da forma $(a - x_i)(b - x_i)$, onde $x_i \in (a, b)$.

• **Caso 1:** $f(a)f(b) < 0$

Já que $a_n^2 Z(a)Z(b) > 0$, para que $f(a)f(b)$ seja negativo é necessário que exista um número ímpar de fatores negativos da forma $(a - x_i)(b - x_i)$, com $x_i \in (a, b)$, e, conseqüentemente, um número ímpar de raízes de $f(x) = 0$ no intervalo (a, b) .

• **Caso 2:** $f(a)f(b) > 0$

Analogamente, sendo $a_n^2 Z(a)Z(b) > 0$, para que $f(a)f(b)$ seja positivo é necessário que exista um número par de fatores negativos da forma $(a - x_i)(b - x_i)$, com $x_i \in (a, b)$, e, conseqüentemente, um número par de raízes de $f(x) = 0$ no intervalo (a, b) .

□

Por exemplo, considere a função $f(x) = 64x^3 - 56x^2 + 14x - 1$. Note que

$$f(0) = 64 \cdot 0^3 - 56 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 - 1 = -1 \text{ e } f(1) = 64 \cdot 1^3 - 56 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 1 = 21.$$

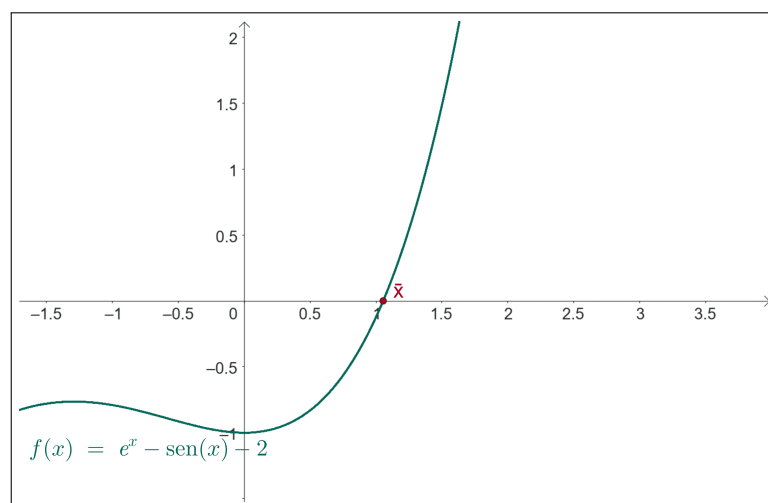
Logo, $f(0)f(1) < 0$ e, pelo Teorema anterior, f tem um número ímpar de raízes no intervalo $(0, 1)$. Como, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, f tem, no máximo, 3 raízes, então f só pode ter uma ou três raízes reais no intervalo $(0, 1)$. É fácil ver que as raízes de f em $(0, 1)$ são exatamente $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,25$ e $x_3 = 0,125$.

Agora, descreveremos o método do gráfico para localização de uma raiz real de uma função f .

CASO 2 (O MÉTODO DO GRÁFICO): O método do gráfico consiste em fazer um esboço do gráfico da função f para determinar um intervalo que contém a raiz real dessa função. Lembre-se que uma raiz real de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação $f(x) = 0$, isto é, é um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que, $f(x_0) = 0$. Geometricamente, este x_0 é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das abscissas.

Consideremos o problema de encontrar um intervalo que contém uma raiz real da função $f(x) = e^x - \sin(x) - 2$. Ao esboçar o gráfico de f encontramos a curva representada na Figura 2.4 a seguir.

Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = e^x - \sin(x) - 2$



Fonte: Gerado pelo autor utilizando o software GeoGebra

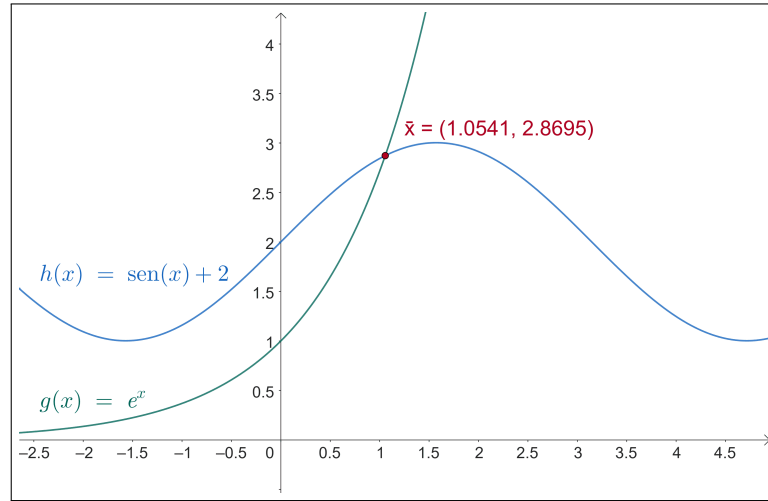
Note que f intersecta o eixo- x em um ponto $\bar{x}$ entre 1 e 2. Logo, concluímos que a raiz de f está no intervalo $[1, 2]$. Observando o gráfico de f , notamos ainda que a raiz $\bar{x}$ está mais próxima de 1. Logo, poderíamos refinar o intervalo e afirmar que a raiz real de f está no intervalo $[1, 1.5]$, que é um intervalo de comprimento menor que o primeiro intervalo determinado.

Outro modo de determinar um intervalo que contém a raiz de f é escrever, quando possível, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, onde $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções conhecidas. Dessa forma, se $\bar{x}$ é uma raiz de f , então $f(\bar{x}) = 0$, de onde segue que $f_1(\bar{x}) - f_2(\bar{x}) = 0$ e, disto, $f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x})$. Geometricamente, $\bar{x}$ é a abscissa do ponto de intersecção dos gráficos de f_1 e f_2 . Reciprocamente, se $\bar{x}$ é um ponto, tal que, $f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x})$, então $f_1(\bar{x}) - f_2(\bar{x}) = 0$ e, assim, $f(\bar{x}) = 0$, ou seja, $\bar{x}$ é uma raiz de f . Assim, trocamos o problema de determinar uma raiz de f para o problema de determinar a abscissa do ponto de intersecção dos gráficos de f_1 e f_2 .

Voltemos, então, a função $f(x) = e^x - \sin(x) - 2$, por exemplo. Definindo $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = \sin(x) + 2$, tem-se que $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Logo, uma raiz de f é um número $x \in \mathbb{R}$,

tal que, $e^x = \sin(x) + 2$. A Figura 2.5 a seguir representa os gráficos das funções f_1 e f_2 .

Figura 2.5: Gráficos de $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = \sin(x) + 2$



Fonte: Gerado pelo autor utilizando o software GeoGebra

Note que a abscissa do ponto de intersecção de f_1 e f_2 está entre 1 e 2. Logo, o intervalo que contém uma raiz de f é o intervalo $[1, 2]$, o que coincide com a informação dada pelo gráfico da Figura 2.4. Vale ressaltar que o método do gráfico deve ser utilizado somente para determinação do intervalo inicial $[a, b]$ que contenha uma raiz exata de f . Para aproximação desta raiz, será necessário utilizar algum método de refinamento. Dentre os principais métodos numéricos para o refinamento do intervalo inicial, destacam-se os métodos de ponto fixo.

De modo geral, os métodos numéricos para a aproximação de uma raiz da função f geram uma sequência numérica (x_n) que converge para uma raiz $\bar{x}$ de f em algum intervalo $[a, b]$. Esses processos iterativos utilizam as aproximações já calculadas para obter as próximas aproximações da raiz de f e, para que este processo não seja longo e exaustivo, é necessário interromper o método por meio de um critério de parada, estabelecido de forma que a aproximação encontrada esteja suficientemente próxima da raiz $\bar{x}$ de f . A definição a seguir apresenta um critério para verificação de quão próximo o n -ésimo termo da sequência (x_n) determinada por um método numérico está da raiz exata $\bar{x}$ de f .

Definição 2.2.5. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\bar{x}$ uma raiz exata de f em $[a, b]$, isto é, $f(\bar{x}) = 0$. Dizemos que x_n é uma raiz aproximada de $\bar{x}$ com precisão $\varepsilon > 0$ se*

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon \text{ ou } |f(x_n)| < \varepsilon.$$

Como a raiz $\bar{x}$ não é conhecida, torna-se inviável utilizar a primeira das condições acima. Para contornar este fato, medimos a distância entre duas raízes aproximadas sucessivas da raiz $\bar{x}$.

Neste caso, dizemos que x_n é uma raiz aproximada de $\bar{x}$ com precisão ε se

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |f(x_n)| < \varepsilon.$$

Assim, quando pelo menos uma das condições acima é satisfeita, o processo iterativo estabelecido pelo método numérico é encerrado e x_n é uma raiz aproximada da função f .

Um conceito importante quando se estuda métodos numéricos é a ordem de convergência do método. De modo geral, a ordem de convergência determina a velocidade de convergência do método. Consequentemente, quanto maior for a ordem de convergência de um método numérico, mais rápido a sequência gerada por este método converge. A definição a seguir, estabelece o conceito de ordem de convergência de um método numérico.

Definição 2.2.6. *Seja (x_n) uma sequência gerada por um método numérico que converge para um número $\bar{x}$. Dizemos que $\alpha \geq 1$ é a ordem de convergência de (x_n) , se existe uma constante $\kappa > 0$, tal que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{|x_n - \bar{x}|^\alpha} = \kappa$$

Além disso, dizemos que um método numérico tem ordem de convergência α , se a sequência (x_n) gerada por este método tem ordem de convergência α .

No caso particular em que $\alpha = 1$, dizemos que o método numérico tem convergência linear. Já no caso em que $\alpha = 2$, dizemos que o método numérico tem convergência quadrática.

Segundo Ruggiero e Lopes (1996, p. 65), "se dois processos iterativos geram sequências (x_n) e (y_n) , ambas convergentes para $\bar{x}$, com ordem de convergência α_1 e α_2 , respectivamente, e se $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 1$, o processo que gera a sequência (x_n) converge mais rapidamente que o outro".

Na próxima seção, definiremos o Método de Newton para aproximação de uma raiz real de uma função dada f .

2.3 REFINAMENTO - O MÉTODO DE NEWTON

Nesta seção, estabeleceremos o Método de Newton para aproximação de uma raiz real de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $[a, b]$ é um intervalo de $\mathbb{R}$. De maneira geral, o Método de Newton consiste em transformar a equação $f(x) = 0$ em uma equação de ponto fixo da forma $x = F(x)$, onde F é uma função real contínua em $[a, b]$, e, a partir de uma aproximação inicial x_0 , determinar uma sequência de aproximações $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, por meio da igualdade $x_{n+1} = F(x_n)$, que converge para uma raiz exata da equação $f(x) = 0$. Neste caso, a função F

deve ser escolhida de modo que $F(x) = x$ se, e somente se, $f(x) = 0$, onde $x \in [a, b]$. A função F é denominada função iteração de ponto fixo.

Podemos encontrar diversas funções F conforme definido anteriormente, mas nem todas geram uma sequência que converge para a raiz de f . De maneira geral, essas funções se apresentam na forma

$$F(x) = x + g(x)f(x), \quad (2.8)$$

para qualquer função g com $g(\bar{x}) \neq 0$, onde $\bar{x} \in [a, b]$ é tal que $f(\bar{x}) = 0$ (FRANCO, 2006, p. 61).

É fácil ver que $f(\bar{x}) = 0$ se, e somente se, $F(\bar{x}) = \bar{x}$. De fato, supondo que $f(\bar{x}) = 0$, tem-se que,

$$F(\bar{x}) = \bar{x} + g(\bar{x})f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Por outro lado, supondo $F(\bar{x}) = \bar{x}$, tem-se que,

$$\bar{x} + g(\bar{x})f(\bar{x}) = \bar{x},$$

de onde segue que $g(\bar{x})f(\bar{x}) = 0$. Já que $g(\bar{x}) \neq 0$, vem que $f(\bar{x}) = 0$, provando a afirmação.

Segundo Ruggiero e Lopes (1996, p. 59, Teorema 2), se I é um intervalo contendo uma raiz $\bar{x}$ de f , $x_0 \in I$ e $|F'(x_0)| < 1$, para todo $x \in I$, então a sequência (x_n) gerada pelas iterações $x_{n+1} = F(x_n)$ aproxima a raiz $\bar{x}$ de f . Assim, com o objetivo de determinar a função g na igualdade (2.8), suporemos que $F'(x) = 0$, para todo x em algum intervalo I suficientemente pequeno que contém uma raiz de f , pois dessa forma o método iterativo aproxima a raiz de f .

Derivando F com respeito à x , tem-se que

$$F'(x) = 1 + g'(x)f(x) + g(x)f'(x). \quad (2.9)$$

Sendo $\bar{x}$ uma raiz de f , tem-se que $f(\bar{x}) = 0$ e de (2.9), segue que $F'(\bar{x}) = 1 + g(\bar{x})f'(\bar{x})$. Fazendo $F'(\bar{x}) = 0$, obtém-se $g(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(\bar{x})}$. Note que g está bem definida desde que $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Definindo $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ e substituindo em (2.8), tem-se que

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \text{com } f'(x) \neq 0. \quad (2.10)$$

A função F dada por (2.10) é denominada Função Iteração de Newton.

Assim, dada uma aproximação inicial x_0 , a sequência gerada por (x_n) será determinada pelo processo iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$, ou seja,

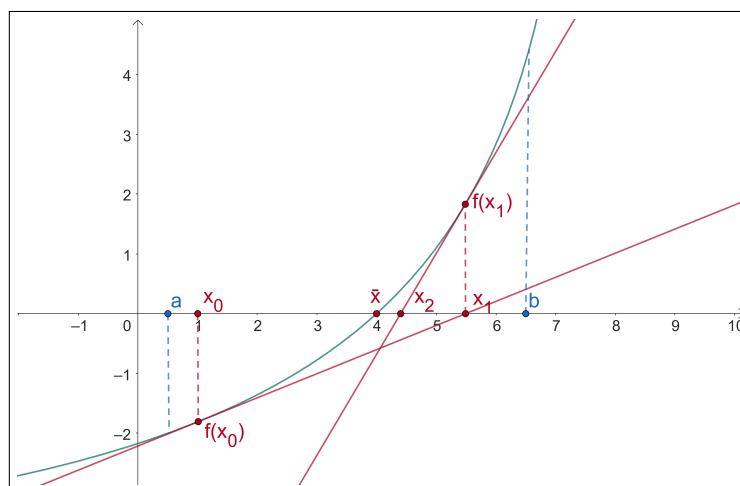
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0. \quad (2.11)$$

O processo iterativo definido pela equação (2.11) é denominado Método de Newton para aproximação de uma raiz de f . Ao longo deste trabalho, a menos que se diga o contrário, f é uma função contínua para o qual se pode aplicar o Método de Newton e $[a, b]$ é um intervalo em $\mathbb{R}$ que contém uma única raiz $\bar{x}$ de f .

Geometricamente, a sequência (x_n) gerada pelo Método de Newton é construída da seguinte forma: dada uma aproximação inicial x_0 , traçamos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Esta reta intersecta o eixo- x em um ponto x_1 , que é a primeira aproximação para a raiz $\bar{x}$ de f . Da mesma forma, traçamos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$. O ponto de intersecção desta reta com o eixo- x , denotado por x_2 , é a segunda aproximação para a raiz $\bar{x}$ de f . Em seguida, pelo ponto $(x_2, f(x_2))$ traçamos a reta a tangente ao gráfico de f , que intersecta o eixo- x em um ponto x_3 , que é a terceira aproximação para a raiz $\bar{x}$ de f . Seguindo este procedimento sucessivamente, construímos uma sequência $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ que converge para a raiz exata $\bar{x}$ da função f . O processo é repetido até que um critério de parada pré-estabelecido seja satisfeito.

A Figura 2.6 a seguir representa o procedimento descrito acima.

Figura 2.6: Interpretação Geométrica do Método de Newton



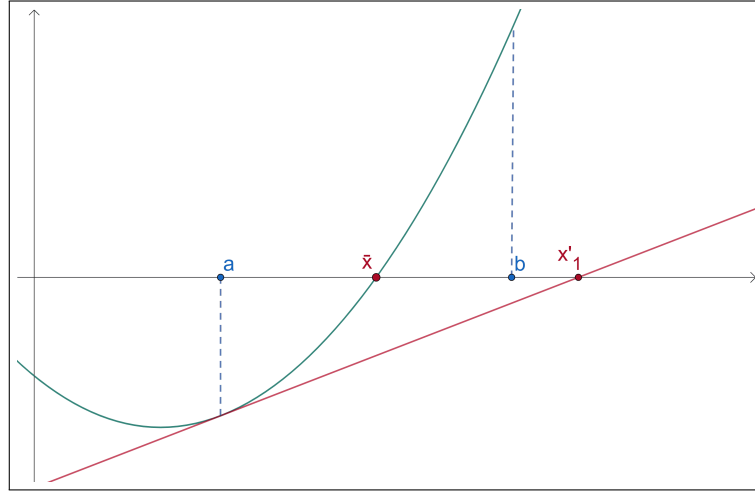
Fonte: Gerado pelo autor utilizando o Software GeoGebra

Mais precisamente, de acordo com Barroso *et al.* (1987, p. 123), o Método de Newton é equivalente a substituir um pequeno arco da curva $y = f(x)$ por uma reta tangente, traçada a partir de um ponto da curva.

Neste ponto surge a seguinte questão: como escolher um ponto x_0 de modo que a sequência (x_n) gerada pelo Método de Newton convirja para a solução exata da equação $f(x) = 0$? Em geral, não é qualquer escolha de x_0 que produzirá a convergência do método. A escolha

acertada de tal ponto é determinante para se garantir essa convergência. Uma escolha ruim para o ponto x_0 pode gerar uma sequência que não converge para a raiz procurada ou até mesmo gerar oscilações em torno da raiz exata. Na Figura 2.7 a seguir, note que ao escolher o ponto x_0 como o ponto $a \in [a, b]$, e traçando a reta tangente a partir do ponto $A = (x_0, f(x_0))$, pode-se encontrar que $x_1 \notin [a, b]$ e o Método de Newton pode não convergir.

Figura 2.7: Representação de escolha de x_0 cujo método não converge



Fonte: Gerado pelo autor utilizando o Software GeoGebra

Por outro lado, seja a função $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x(1 - x^2)$. Note que,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = -\frac{3}{8} \text{ e} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{8}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe uma raiz no intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Sendo $f'(x) = 1 - 3x^2$ e escolhendo $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, tem-se que

$$f(x_0) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right) = \frac{4\sqrt{5}}{25} \text{ e } f'(x_0) = 1 - 3\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5}. \quad (2.13)$$

Calculando, pelo método de Newton, a primeira aproximação para raiz de f para este x_0 , encontramos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\frac{4\sqrt{5}}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -x_0.$$

Além disso,

$$f(x_1) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \left(1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 \right) = -\frac{4\sqrt{5}}{25} \text{ e } f'(x_1) = 1 - 3 \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \frac{2}{5}. \quad (2.14)$$

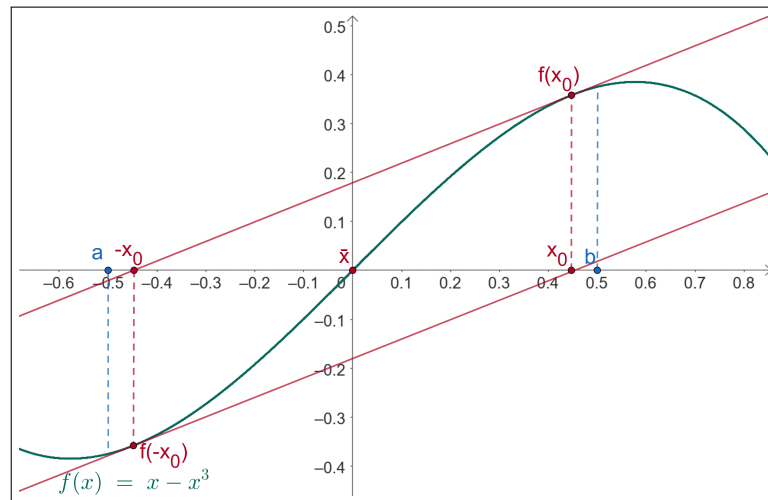
Calculando, pelo método de Newton, a segunda aproximação para raiz de f , teremos que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{25}}{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} = x_0.$$

Seguindo este procedimento e calculando as demais aproximações teremos que $x_2 = x_4 = x_6 = \dots = x_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $x_1 = x_3 = x_5 = \dots = -x_0 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Logo, o método de Newton ficará oscilando entre $x_0, -x_0, x_0, -x_0$ e não convergirá para a raiz de f .

A Figura 2.8 a seguir representa geometricamente este fato.

Figura 2.8: Gráfico de $f(x) = x - x^3$ no intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$



Fonte: Adaptado de (LIMA, 2010)

Assim, retornamos a pergunta: como escolher um ponto x_0 de modo que a sequência (x_n) gerada pelo Método de Newton convirja para a solução exata da equação $f(x) = 0$? Segundo Barroso *et al.* (1987, p. 125), é condição suficiente para a convergência do Método de Newton que:

- (i) $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0$ em (a, b) , f' e f'' preservem o sinal em (a, b) ;
- (ii) $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Note que a condição acima não é necessária, mas somente suficiente. Em outras palavras, se as condições acima são satisfeitas, o Método de Newton convergirá. Porém, caso as condições não sejam satisfeitas, não necessariamente o método não converge. "Em geral, afirma-se que

o Método de Newton converge desde que x_0 seja escolhido "suficientemente próximo" da raiz $\bar{x}$ (RUGGIERO e LOPES, 1996, p. 70).

Faremos agora um estudo mais formal sobre a convergência do Método de Newton. Para isso, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que tem uma única raiz $\bar{x}$ no intervalo $[a, b]$. Suporemos, sem perda de generalidades, que $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$, isto é, f é estritamente crescente e tem concavidade voltada para cima no intervalo $[a, b]$. Neste caso, o gráfico de f tem comportamento semelhante ao gráfico da função da Figura 2.6. Além disso, a sequência (x_n) gerada pelo Método de Newton, dada pela equação (2.11), é monótona decrescente e limitada. Logo, existe $\tilde{x} \in (a, b)$, tal que, $\lim x_n = \tilde{x}$. Passando ao limite em ambos os lados da igualdade em (2.11), e utilizando a continuidade de f , tem-se que

$$\tilde{x} = \lim x_{n+1} = \lim \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = \lim x_n - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}. \quad (2.15)$$

Disto, segue que $f(\tilde{x}) = 0$ e $\tilde{x}$ é uma raiz de f em $[a, b]$. E como f tem somente uma raiz em $[a, b]$, segue que $\tilde{x} = \bar{x}$ e o Método de Newton converge para a raiz exata de f em $[a, b]$.

Além disso, o Método de Newton apresenta ordem de convergência quadrática ($\alpha = 2$), desde que a função de iteração F satisfaça a condição de que a derivada de primeira ordem se anule na raiz $\bar{x}$, isto é, $F'(\bar{x}) = 0$ (RUGGIERO e LOPES, 1996, p. 72).

Na subseção a seguir faremos algumas aplicações do Método de Newton para aproximar uma raiz real de funções contínuas.

2.3.1 EXEMPLOS

Nesta seção, apresentaremos dois exemplos de aplicação do Método de Newton para aproximação de uma raiz real de duas funções contínuas, a saber, uma função polinomial e uma função que é a soma de uma função exponencial e uma função trigonométrica.

Primeiro, consideremos o problema de determinar, utilizando o Método de Newton, uma aproximação para a raiz da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$, com precisão de $\varepsilon < 0,01$. Por simplicidade e para evitar cálculos exaustivos, vamos considerar uma aproximação de 8 casas decimais. Note que

$$f(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) + 3 = -4 < 0 \text{ e } f(0) = 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 0 + 3 = 3 > 0.$$

Como f é contínua, pois é polinomial, e $f(-1) < 0 < f(0)$, pelo Teorema de Bolzano, existe pelo menos um $x \in [-1, 0]$, tal que, $f(x) = 0$. Calculando as derivadas de f , tem-se

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 1 \text{ e } f''(x) = 6x - 10.$$

Assim, $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in [-1, 0]$ e, pela equação (2.11), o Método de Newton para aproximação de uma raiz de f é definido por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5x_n^2 + x_n + 3}{3x_n^2 - 10x_n + 1} = \frac{2x_n^3 - 5x_n^2 - 3}{3x_n^2 - 10x_n + 1}. \quad (2.16)$$

Escolhendo $x_0 = -1$, vem que,

$$f(-1)f''(-1) = (-4) \cdot (-16) = 64 > 0. \quad (2.17)$$

Sendo assim, as condições foram satisfeitas e o Método de Newton convergirá para escolha de $x_0 = -1$. Aplicando o Método de Newton, temos:

- Se $n = 0$ e $x_0 = -1$, então $f(x_0) = -4$ e $f'(x_0) = 14$. Logo, a primeira aproximação para a raiz de f é

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 + \frac{4}{14} = -0,71428571.$$

Observe que, neste caso, o erro cometido é dado por

$$|x_1 - x_0| = |-0,71428571 + 1| = 0,28571429.$$

Como $|x_1 - x_0| > 0,01$, o processo precisa ser repetido até que a precisão desejada seja atingida.

- Se $n = 1$ e $x_1 = -0,71428571$, então $f(x_1) = -0,62973761$ e $f'(x_1) = 9,67346939$. Logo, a segunda aproximação para a raiz de f é

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0,71428571 + \frac{0,62973761}{9,67346939} = -0,64918626.$$

Perceba que, após a segunda iteração, o erro cometido é dado por

$$|x_2 - x_1| = |-0,64918626 + 0,71428571| = 0,06509946.$$

Novamente, como $|x_2 - x_1| > 0,01$, o processo precisa ser repetido.

- Se $n = 2$ e $x_2 = -0,64918626$, então $f(x_2) = -0,02999511$ e $f'(x_2) = 8,75619096$. Logo, a terceira aproximação para a raiz de f é

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0,64918626 + \frac{0,02999511}{8,75619096} = -0,64576067.$$

Neste caso, o erro cometido é dado por

$$|x_3 - x_2| = |-0,64576067 + 0,64918626| = 0,00342559.$$

Como $|x_3 - x_2| = 0,00342559 < 0,01$, segue que a precisão desejada foi atingida e $\bar{x} = x_3 = -0,64576067$ é a raiz aproximada de $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$ no intervalo $[-1, 0]$ com precisão $\varepsilon < 0,01$.

A maneira mais simples de calcular uma raiz de uma função utilizando o método de Newton é construir uma tabela onde em cada linha calcula-se o valor de x_n e o valor de $|x_{n+1} - x_n|$, para saber o quão próximo x_n está da raiz exata de f com uma precisão ε pré-definida.

A Tabela 2.1 representa as iterações feitas anteriormente para o método de Newton para a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$ escolhendo $x_0 = -1$.

Tabela 2.1: Método de Newton para $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\varepsilon = x_{n+1} - x_n $
0	-1	-4	14	—
1	-0,71428571	-0,62973761	9,67346939	0,28571429
2	-0,64918626	-0,02999511	8,75619096	0,06509946
3	-0,64576067	-0,00008148	8,70862720	0,00342559

Agora, considere o problema de determinar, utilizando o Método de Newton, uma aproximação para a raiz da função $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$ com precisão $\varepsilon < 0,0001$. Novamente, consideraremos uma aproximação de 8 casas decimais. Note que

$$f(1) = e^{-1} - \cos 1 = -0,17241187 < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = e^{-2} - \cos 2 = 0,43446248 > 0.$$

Como f é contínua, pois é a soma de uma função exponencial com uma função trigonométrica, e $f(1) < 0 < f(2)$, segue, pelo Teorema de Bolzano, que existe pelo menos uma solução para a equação $e^{-x^2} - \cos(x) = 0$ no intervalo $[1, 2]$. Calculando as derivadas de f , tem-se

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \sin x \quad \text{e} \quad f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} + \cos x.$$

Logo, pela equação (2.11), o Método de Newton para aproximação de uma raiz de f é definido por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n^2} - \cos x_n}{-2x_n e^{-x_n^2} + \sin x_n}. \quad (2.18)$$

Escolhendo $x_0 = 1,5$, temos que as iterações para o cálculo da raiz de f no intervalo $[1, 2]$ estão dadas na Tabela 2.2 a seguir:

Tabela 2.2: Método de Newton para $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\varepsilon = x_{n+1} - x_n $
0	1,5	0,03466202	0,68129731	—
1	1,44912350	0,00108862	0,63768343	0,05087650
2	1,44741635	0,00000132	0,63613560	0,00170715
3	1,44741428	0,00000000	0,63613372	0,00000207

Já que $|x_3 - x_2| = 0,00000207 < 0,0001$, tem-se que $\bar{x} = x_3 = 1,44741428$ é a raiz aproximada da função f no intervalo $[1, 2]$.

2.3.2 O MÉTODO DAS SECANTES

Existe uma desvantagem ao aplicar o Método de Newton para aproximar uma solução de $f(x) = 0$, que é a necessidade de calcular a derivada $f'(x)$, assim como calcular seu valor numérico a cada iteração. A depender da função, esta derivada pode ser muito difícil ou trabalhosa para calcular. A pergunta que surge neste ponto é: há formas de se contornar esta situação e aplicar o Método de Newton sem a necessidade do cálculo desta derivada? A resposta é sim! Existem algumas maneiras de remodelar o Método de Newton com o objetivo de eliminar essa desvantagem. Uma delas consiste em trocar a derivada $f'(x_n)$ por sua aproximação:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \quad (2.19)$$

onde x_n e x_{n-1} são duas aproximações sucessivas para a raiz exata de f .

Substituindo (2.19) em (2.11), tem-se que

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \\
 &= x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
 &= \frac{x_n f(x_n) - x_n f(x_{n-1}) - x_n f(x_n) + x_{n-1} f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
 &= \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

A igualdade (2.20) é denominada **Método das Secantes** para aproximação de uma raiz real da função f .

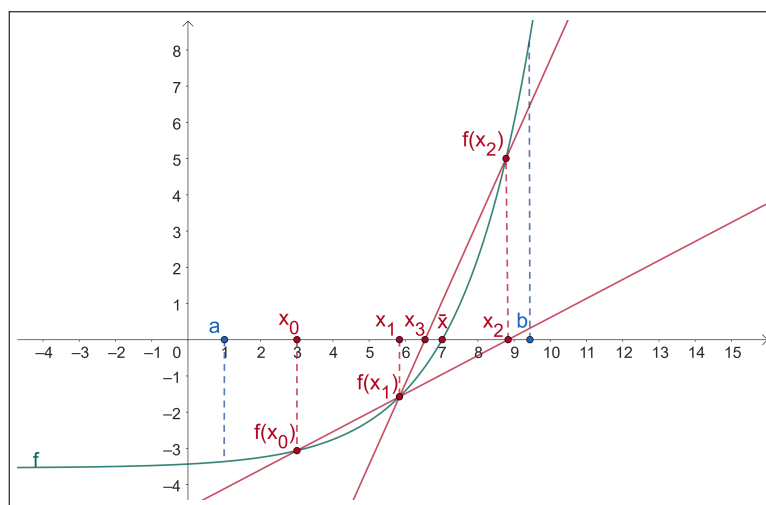
Como foi observado anteriormente, a vantagem de se utilizar o Método da Secantes é o fato de não precisar calcular a derivada de f , porém, o método também tem suas desvantagens, que são:

- O método tem convergência mais lenta, ou seja, é necessário um número maior de iterações para aproximar uma raiz de f ;
- São necessárias duas aproximações iniciais para começar a aplicação deste método.

Geometricamente, a sequência (x_n) gerada pelo Método das Secantes é construída da seguinte forma: dados dois pontos iniciais x_0 e x_1 , traçamos a reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. O ponto de intersecção desta reta com o eixo- x , denotado por x_2 , é a primeira aproximação para a raiz $\bar{x}$ de f . Em seguida, traçamos a reta secante ao gráfico de f nos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. O ponto de intersecção desta reta com o eixo- x , denotado por x_3 , é a segunda aproximação para a raiz $\bar{x}$ de f . Repetindo este processo sucessivas vezes, encontramos uma sequência $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ que converge para a raiz exata $\bar{x}$ da função f . E, assim como no Método de Newton, as iterações se repetem até que o critério de parada seja satisfeito.

A Figura 2.9 a seguir apresenta o procedimento descrito acima.

Figura 2.9: Interpretação Geométrica do Método das Secantes



Fonte: Gerado pelo autor utilizando o Software Geogebra

Como já foi dito, o Método das Secantes é uma aproximação do Método de Newton, logo, as condições de convergência destes métodos são semelhantes, acrescentando que se $f(x_n) \approx f(x_{n-1})$ o Método das Secantes pode divergir. Também, o critério de parada a ser utilizado para este método é o mesmo critério utilizado para o Método de Newton dado na Definição 2.2.5 da Seção 2.2.

Por exemplo, vamos utilizar o Método das Secantes para aproximar uma raiz da função $f(x) = \cos x - x^2$, com precisão de $\varepsilon < 0,01$. Para isso, primeiro, observe que

$$f(0) = \cos 0 - 0^2 = 1 \text{ e } f(\pi) = \cos \pi - \pi^2 = -10,8696044. \quad (2.21)$$

Já que f é uma função contínua (pois é a diferença de uma função trigonométrica com uma função polinomial) e $f(\pi) < 0 < f(0)$, pelo Teorema de Bolzano, existe pelo menos um $\bar{x} \in [0, \pi]$, tal que, $f(\bar{x}) = 0$. Utilizaremos como critério de parada a segunda condição dada na Definição 2.2.5, isto é, x_n será raiz aproximada da raiz exata de f com precisão ε se $|f(x_n)| < \varepsilon$. Disso, lembrando que o Método das Secantes é dado por

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad (2.22)$$

e tomando $x_0 = 0$ e $x_1 = \pi$, tem-se que,

$$x_2 = \frac{x_0f(x_1) - x_1f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{0 \cdot (-10,8696044) - \pi \cdot 1}{-10,8696044 - 1} = 0,26467543.$$

Além disso, $f(x_2) = \cos(0,26467543) - (0,26467543)^2 = 0,895124374$.

Como $|f(x_2)| > 0,01$, segue que o critério de parada não é satisfeito e devemos continuar aplicando o método. Calculando a terceira aproximação para a raiz de f , tem-se que

$$x_3 = \frac{x_1f(x_2) - x_2f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{\pi \cdot 0,895124374 - 0,26467543 \cdot (-10,8696044)}{0,895124374 - (-10,8696044)} = 0,483566896$$

Além disso, $f(x_3) = \cos(0,483566896) - (0,483566896)^2 = 0,651505222$.

Como $|f(x_3)| > 0,01$, segue que o critério de parada não é satisfeito e devemos calcular a quarta aproximação da raiz de f . Assim,

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{x_2f(x_3) - x_3f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = \frac{0,26467543 \cdot 0,651505222 - 0,483566896 \cdot 0,895124374}{0,651505222 - 0,895124374} \\ &= 1,068943423. \end{aligned}$$

Também, $f(x_4) = \cos(1,068943423) - (1,068943423)^2 = -0,66158925$.

Já que $|f(x_4)| > 0,01$, tem-se que o critério de parada ainda não é satisfeito. A quinta aproximação para a raiz de f é

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{x_3f(x_4) - x_4f(x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} = \frac{0,483566896 \cdot (-0,66158925) - 1,068943423 \cdot 0,651505222}{-0,66158925 - 0,651505222} \\ &= 0,774007434. \end{aligned}$$

Além disso, $f(x_5) = \cos(0,774007434) - (0,774007434)^2 = 0,11602769$. Como $|f(x_5)| > 0,01$, o critério de parada continua não sendo satisfeito. Calculando a sexta aproximação da raiz de f , tem-se que

$$\begin{aligned} x_6 &= \frac{x_4f(x_5) - x_5f(x_4)}{f(x_5) - f(x_4)} = \frac{1,068943423 \cdot 0,11602769 - 0,774007434 \cdot (-0,66158925)}{0,11602769 - (-0,66158925)} \\ &= 0,81801463. \end{aligned}$$

Note que, $f(x_6) = \cos(0,81801463) - (0,81801463)^2 = 0,014523522$. Como $|f(x_6)| > 0,01$, segue que o critério de parada não é satisfeito, e devemos calcular a sétima aproximação da raiz de f . Neste caso,

$$\begin{aligned} x_7 &= \frac{x_5 f(x_6) - x_6 f(x_5)}{f(x_6) - f(x_5)} = \frac{0,774007434 \cdot 0,014523522 - 0,81801463 \cdot 0,11602769}{0,014523522 - 0,11602769} \\ &= 0,824311312. \end{aligned}$$

Além disso, $f(x_7) = \cos(0,824311312) - (0,824311312)^2 = -0,000426461$.

Como a $|f(x_7)| = 0,000426461 < 0,01$, temos que a precisão desejada é atingida e a raiz aproximada de $f(x) = \cos x - x^2$ é $\bar{x} = 0,824311312$. E, assim como no Método de Newton, no Método das Secantes também conseguimos construir uma tabela onde, em cada linha, calculamos os valores das aproximações x_n e os valores de $f(x_n)$, para saber o quão próximo x_n está da raiz exata de f com uma precisão ε dada. A Tabela 2.3 representa as iterações feitas anteriormente para o Método das Secantes para a função $f(x) = \cos x - x^2$.

Tabela 2.3: Método das Secantes para $f(x) = \cos x - x^2$

Iteração	x	$f(x)$
0	0	1
1	3,141592654	-10,8696044
2	0,26467543	0,895124374
3	0,483566896	0,651505222
5	0,774007434	0,11602769
6	0,81801463	0,014523522
7	0,824311312	-0,000426461

No próximo capítulo, mostraremos como implementar o Método de Newton para aproximação da raiz de uma função dada f utilizando como ferramentas os softwares Excel e Scilab.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES DO MÉTODO DE NEWTON UTILIZANDO OS SOFTWARES EXCEL E O SCILAB

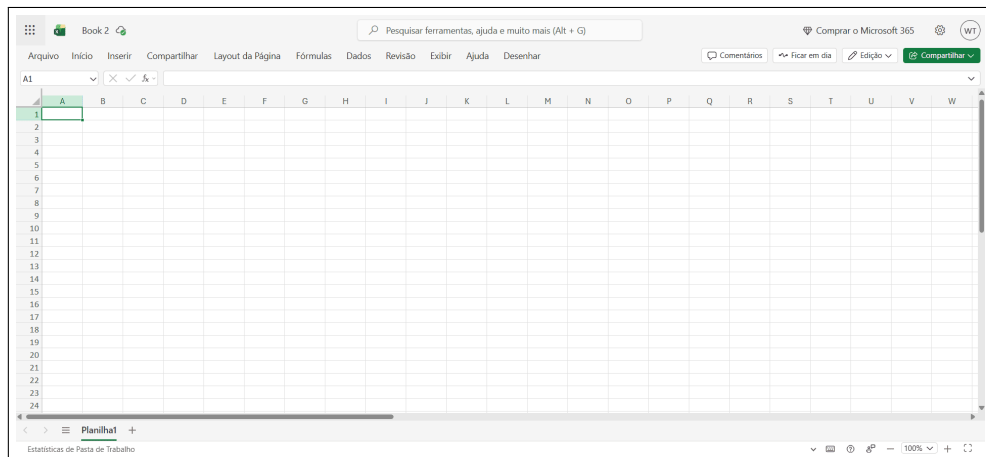
Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações computacionais do Método de Newton utilizando os softwares Microsoft Excel e Scilab. O objetivo é mostrar que com a ajuda computacional é possível determinar uma raiz de uma equação da forma $f(x) = 0$, onde f é uma função contínua, evitando operações manuais exaustivas, erro humano e economizando tempo. Para produzir as aplicações deste capítulo, utilizaremos a versão on-line do Microsoft Excel disponível em <<https://excel.cloud.microsoft/>> e a versão livre do aplicativo instalável do Scilab disponível em <<https://www.scilab.org/>>. Algumas funções utilizadas nas implementações são funções conhecidas encontradas nos trabalhos de (BARROSO *et al.*, 1987), (RUGGIERO e LOPES, 1996) e suas referências bibliográficas.

3.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON COM O EXCEL

O software Excel é um programa de planilhas eletrônicas desenvolvido pela empresa Microsoft e faz parte do pacote Office. Esse programa tem como principal função organizar, calcular, analisar, visualizar e compartilhar dados. É o programa de planilhas eletrônicas mais utilizado na atualidade para a organização geral de dados e tem importantes recursos voltados para o cálculo de despesas e para a matemática financeira, por exemplo. É por meio das células (intersecção entre linhas e colunas da planilha) que o programa permite a entrada de dados, usando fórmulas para calcular e organizar tais dados. Com o Excel, é também possível criar gráficos para visualização e análise das informações.

A Figura 3.1 a seguir apresenta a tela inicial do software Excel.

Figura 3.1: Tela inicial do Excel



Fonte: Print da tela do Excel

O Excel é amplamente utilizado em ambientes profissionais e pessoais para a gestão financeira e tratamento de dados. Na análise numérica, o Excel pode ser utilizado, por exemplo, para minimizar cálculos manuais e determinar as raízes aproximadas de uma equação da forma $f(x) = 0$ utilizando algum método numérico, bastando ao usuário analisar as condições do método a ser aplicado e programar as linhas conforme condições do método numérico escolhido. Nesta seção, mostraremos como utilizar o Excel para aproximar uma raíz real de uma equação da forma $f(x) = 0$, onde f é uma função real que satisfaz as condições para a aplicação do Método de Newton determinadas no Capítulo 2.

O procedimento a seguir apresenta as linhas de programação para implementação do Método de Newton em Excel para determinar uma raíz real da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$ com precisão de $\varepsilon < 0,001$. Primeiro, veja que f é uma função contínua, pois é uma função polinomial, e $f(0) = -2 < 0 < 3 = f(1)$. Logo, pelo Teorema de Bolzano, existe uma raíz de f no intervalo $[0, 1]$. Além disso, $f'(x) = 6x^2 + 6x$ e tome $x_0 = 0,5$ como aproximação inicial para aplicação do método.

Assim, configuraremos uma tabela em Excel, com cinco colunas, denominadas A , B , C , D e E , onde:

- A coluna A representa o número n de iterações do processo iterativo;
- A coluna B representa, para cada linha n , as aproximações x_n da raíz exata de f dadas pelo Método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3.1)$$

- A coluna C representa os valores de $f(x_n)$;

- A coluna *D* representa os valores de $f'(x_n)$;
- A coluna *E* representa o erro cometido a cada iteração calculado por $|x_{n+1} - x_n|$.

Além disso, na linha 1, identificamos os elementos que desejamos calcular, a saber: n , x_n , $f(x_n)$, $f'(x_n)$ e $\varepsilon = |x_{n+1} - x_n|$.

Na linha 2, começaremos a inserir os dados para implementação do método. A célula A2 contém o identificador da iteração do método. Na célula B2, inserimos a aproximação inicial $x_0 = 0,5$. Nas células C2 e D2, calculamos os valores de f e da derivada de f no ponto x_0 , respectivamente, pelas fórmulas

$$= 2*B2^3 + 3*B2^2 - 2 \quad \text{e} \quad = 6*B2^2 + 6*B2$$

Não preenchemos a célula E5, pois ainda não há erro a ser calculado. Logo, a primeira linha do processo iterativo será dada conforme a Figura 3.2 a seguir:

Figura 3.2: Programação da primeira linha do Método de Newton

	A	B	C	D	E
1	n	x _n	f(x _n)	f'(x _n)	e
2	0	0,5	=2*B2^3+3*B2^2-2	=6*B2^2+6*B2	----
3					
4					
5					

Fonte: Print da tela do Excel

Na linha 3, a programação da célula B3 é feita de forma a satisfazer a equação (3.1), isto é, basta calcular $=B2-C2/D2$, onde $/$ representa a operação de divisão no Excel. As células C3 e D3 são programadas de forma análoga ao que fizemos para as células C2 e D2. Já para calcular o erro dado na célula E3, basta programar $=ABS(B3-B2)$, onde $=ABS$ é a função que calcula o valor absoluto no software Excel.

Agora, para a programação da linha 4 utilizaremos a função $=SE$ do Excel para verificação do critério de parada e a interrupção do processo iterativo quando esse critério for satisfeito. Em seguida, "arrastaremos" verticalmente a programação dessa linha para preenchimento e programação automática das demais linhas da tabela. Para programação da célula B4, por exemplo, utilizamos a seguinte função

$$=SE(E3 < 0,001; "Para" ; B3 - C3/D3). \quad (3.2)$$

Mais precisamente a função acima significa que: se o erro calculado na célula E3 for menor que 0,001, então o processo iterativo irá "Para". Caso contrário, calcula-se $B3-C3/D3$.

Observe que, de maneira análoga, a função =SE foi utilizada para realizar os cálculos das células C4, D4 e E4. É importante ressaltar que o comando "Para" não faz o processo iterativo ser interrompido automaticamente, mas somente informa ao usuário qual é o ponto de parada, ficando a cargo do usuário identificar qual é a raiz nesse ponto. A Figura 3.3 apresentada a seguir mostra essa programação.

Figura 3.3: Programação da segunda e terceira linhas do Método de Newton

A	B	C	D	E
n	xn	f(xn)	f'(xn)	e
0	0,5	-1	4,5	
1	=B2-C2/D2	=2*B3^3+3*B3^2-2	=6*B3^2+6*B3	=ABS(B3-B2)
2	=SE(E3<0,001;"Para";B3-C3/D3)	=SE(E3<0,001;"Para";2*B4^3+3*B4^2-2)	=SE(E3<0,001;"Para";6*B4^2+6*B4)	=SE(E3<0,001;"Para";ABS(B4-B3))
3				
4				
5				
6				
7				

Arrastar Arrastar Arrastar Arrastar

Função: f(x)=2x³+3x²-2 Criterio de parada: e<0,001
 Derivada: f'(x)=6x²+6x Valor inicial: x₀=0,5

Fonte: Print da tela do Excel

Na figura abaixo, depois de "Arrastar" todas as colunas, vamos ter o resultado da programação em excel e a raiz aproximada procurada de f . A linha com a palavra "Para" é a linha onde deve ser interrompido o processo para identificação da raiz.

Figura 3.4: Programação do Método de Newton para $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$

A	B	C	D	E
n	xn	f(xn)	f'(xn)	e
0	0,5	-1	4,5	
1	0,722222222	0,31824417	7,462963963	0,222222222
2	0,678579083	0,013180119	6,848440876	0,042643139
3	0,67765454	2,61998E-05	6,82122129	0,001924543
4	0,677650699	1,04241E-10	6,821167011	3,84092E-06
5				

Raiz aproximada Para Para

Função: f(x)=2x³+3x²-2 Criterio de parada: e<0,001
 Derivada: f'(x)=6x²+6x Valor inicial: x₀=0,5

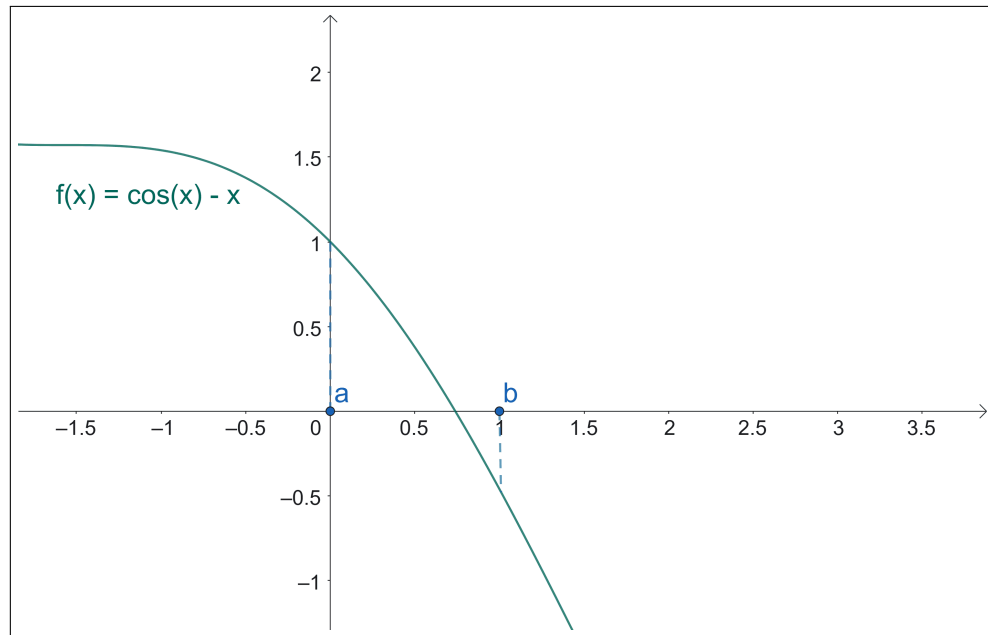
Fonte: Print da tela do Excel

Note que, para este caso, a raiz de f é $\bar{x} = x_4 = 0,677650699$ e isto conclui a implementação do método numérico.

Agora, vamos fazer a implementação do Método de Newton em Excel para uma função f que tem termo trigonométrico. Assim, considere o problema de determinar uma raiz real para

função $f(x) = \cos x - x$ com precisão $\varepsilon < 0,001$. Análogo ao caso anterior, temos que f é uma função contínua (pois é a soma da função trigonométrica $\cos x$ com a função polinomial $-x$) e $f(\pi) < 0 < f(0)$ e, pelo Teorema de Bolzano, existe uma raiz de f no intervalo $[0, \pi]$. Além disso, $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$, para todo $x \in [0, \pi]$. Logo, a raiz de f é única no intervalo $[0, \pi]$. A Figura 3.5 a seguir apresenta o gráfico de f :

Figura 3.5: Gráfico da função $f(x) = \cos x - x$



Fonte: Print da tela do Excel

Escolhendo a aproximação inicial $x_0 = 0$, tem-se que a primeira iteração do método de Newton para aproximação de uma raiz de f em $[0, \pi]$ pode ser programada conforme a Figura 3.6 a seguir:

Figura 3.6: Programação da primeira linha do Método de Newton

	A	B	C	D	E
1	n	xn	f(xn)	f'(xn)	e
2	0	0	=COS(B2)-B2	=-SEN(B2)-1	erro
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

Fonte: Print da tela do Excel

Análogo ao que fizemos no exemplo anterior, programando a Linha 3 e aplicando a função =SE para programação da Linha 4, tem-se as seguintes linhas de programação apresentadas na Figura 3.7 a seguir:

Figura 3.7: Programação da Linha 3 e Linha 4 do Método de Newton

A	B	C	D	E
n	xn	f(xn)	f'(xn)	e
0	0	1	-1	1
1	=B2-C2/D2	=COS(B3)-B3	=SEN(B3)-1	=ABS(B3-B2)
2	=SE(E3<0,001;"Para";B3-C3/D3)	=SE(E3<0,001;"Para";COS(B4)-B4)	=SE(E3<0,001;"Para";SEN(B4)-1)	=SE(E3<0,001;"Para";ABS(B4-B3))
3				
4				
5				
6				
7				

Função: f(x)=cos(x)-x
 Derivada: f'(x)=-sen(x)-1
 Critério de parada: e<0,001
 Valor inicial: x0=0

Fonte: Print da tela do Excel

Por último, após utilizar o comando de "Arrastar" colunas do Excel, preenchemos as demais células do tabelamento do Método de Newton para a solução do problema dado, obtendo a raiz aproximada de f , apresentada na Figura 3.8 a seguir.

Figura 3.8: Programação do Método de Newton para a função $f(x) = \cos x - x$

A	B	C	D	E
n	xn	f(xn)	f'(xn)	e
0	0	1	-1	1
1	1	-0,459697694	-1,841470985	1
2	0,750363868	-0,018923074	-1,681904953	0,249636132
3	0,739112891	-4,64559E-05	-1,673632544	0,011250977
4	0,739085133	-2,84721E-10	-1,673612029	2,77575E-05
5	Para	Para	Para	Para

Função: f(x)=cos(x)-x
 Derivada: f'(x)=-sen(x)-1
 Critério de parada: e<0,001
 Valor inicial: x0=0

Fonte: Print da tela do Excel

Portanto, a raiz aproximada de f encontrada aqui pelo Método de Newton é $\bar{x} = x_4 = 0,739085133$. Note que, tal raiz é aproximadamente a mesma raiz apresentada na Figura 2.3 do Capítulo 2. Na seção a seguir, será apresentada uma implementação em Excel para aproximar uma raiz de uma função f pelo Método das Secantes.

3.1.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DAS SECANTES

O Método das Secantes, como já foi mostrado no Capítulo 2, é uma variação do Método de Newton para o caso em que desejamos contornar a necessidade do cálculo da derivada da

função f . Com isso, a programação desse método no Excel segue os moldes do que foi feito para o Método de Newton.

Considere o problema de se determinar, utilizando o Método das Secantes, uma raiz real da função $f(x) = 4 \sin(x) - e^x$ com erro de $\varepsilon < 0,00001$. Primeiro, veja que f é uma função contínua (pois é a soma de uma função trigonométrica com uma função exponencial, que são ambas contínuas) e $f(0) = -1 < 0 < 4 \sin 1 - e = f(1)$. Logo, pelo Teorema de Bolzano, existe pelo menos um $\bar{x} \in [0, 1]$, tal que, $f(\bar{x}) = 0$. Por (2.20), o Método das Secantes é dado por

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (3.3)$$

Para aplicar o Método das Secantes precisamos de duas aproximações iniciais, denotadas por x_0 e x_1 . Neste caso, tomaremos as aproximações iniciais como sendo os extremos do intervalo considerado, isto é, $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Assim, a primeira iteração do método será dada por

$$x_2 = \frac{x_0f(x_1) - x_1f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{0 \cdot f(1) - 1 \cdot f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{-f(0)}{f(1) - f(0)}. \quad (3.4)$$

Assim, construiremos uma tabela em Excel, com três colunas, denominadas A , B e C , onde:

- A coluna A representa o número n de iterações do processo iterativo;
- A coluna B representa, para cada linha n , as aproximações x_n da raiz exata de f dadas pela equação (3.3)
- A coluna C representa os valores de $f(x_n)$.

Para este método, utilizaremos o critério de parada dada pela segunda condição da Definição 2.2.5, ou seja, diremos que x_n é uma raiz aproximada da raiz exata de f com uma precisão suficientemente pequena ε dada, se $|f(x_n)| < \varepsilon$.

Além disso, na linha 1, identificamos os elementos que desejamos calcular, a saber: as iterações na coluna A , as aproximações x_n na coluna B e os valores de $f(x_n)$ na coluna C .

Nas linhas 2 e 3 (iterações 0 e 1), começaremos a inserir dos dados para implementação do método, adicionando as informações referentes às aproximações iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, respectivamente. Nas células $C2$ e $C3$, calculamos os valores de f nos pontos x_0 e x_1 , respectivamente, pelas fórmulas

$$= 4 * SEN(B2) - EXP(B2) \quad \text{e} \quad = 4 * SEN(B3) - EXP(B3).$$

Assim, as duas primeiras linhas do Método das Secantes em Excel estão apresentadas na Figura 3.9:

Figura 3.9: Programação das primeiras linhas do Método das Secantes

	A	B	C
1	Iteração	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$
2	0	0	$=4*SEN(B2)-EXP(B2)$
3	1	1	$=4*SEN(B3)-EXP(B3)$
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		

Fonte: Print da tela do Excel

Note que, nessa primeira parte, apenas substituímos os valores de x_0 e x_1 na função f . Na segunda parte, a programação da célula B4 é feita de forma a satisfazer a equação (3.3), ou seja, $= (B2*C3 - B3*C2)/(C3 - C2)$, e na célula C4 basta inserir a fórmula $= 4*SEN(B4) - EXP(B4)$. Agora, para programação da linha 5 (iteração 3), usaremos a função $=SE$ nas células da coluna B a fim de determinar as aproximações x_n e nas células da coluna C para determinar os valores de $f(x_n)$. Depois, "arrastaremos" verticalmente a programação destas linhas para preenchimento automático da programação das demais linhas da tabela até que a precisão desejada seja atingida e o método seja interrompido. Para programação das células B5 e C5, utilizaremos os seguintes algoritmos, respectivamente:

$$= SE(ABS(C4) < 0,00001; "Para"; (B3*C4 - B4*C3)/(C4 - C3)),$$

e

$$= SE(ABS(C4) < 0,00001; "Para"; 4*SEN(B5) - EXP(B5)).$$

A Figura 3.10 a seguir apresenta a programação da terceira e quarta aproximações da raiz de f no intervalo $[0, 1]$.

Figura 3.10: Programação das aproximações da raiz exata de f

	A	B	C
1	Iteração	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$
2	0	0	$=4*SEN(B2)-EXP(B2)$
3	1	1	$=4*SEN(B3)-EXP(B3)$
4	2	$=(B2*C3-B3*C2)/(C3-C2)$	$=4*SEN(B4)-EXP(B4)$
5	3	$=SE(ABS(C4)<0,00001;"Para";(B3*C4-B4*C3)/(C4-C3))$	$=SE(ABS(C4)<0,00001;"Para";4*SEN(B5)-EXP(B5))$
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12			
13	Função:	$4sen(x)-e^x$	
14	Critério de parada:	0,00001	
15	Valores iniciais:	$x_0=0; x_1=1$	

Fonte: Print da tela do Excel

Após "arrastar" as colunas B e C para preenchimento das demais linhas, temos a solução aproximada da função f , conforme pode ser visto na Figura 3.11 a seguir.

Figura 3.11: Programação do Método das Secantes para $f(x) = 4 \sin(x) - e^x$

Iteração	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$
0	1	1
1	0,606942655	0,647602111
2	-0,266518467	0,446622202
3	0,434798223	-1,819539665
4	0,384606582	0,140258278
5	0,369925254	0,031741691
6	0,370558098	-0,001443434
7	0,370558098	1,30936E-05
8	0,370558098	5,26049E-09
9		

Para
Raiz aproximada

Para
<0,00001

Função: $4\sin(x)-e^x$
 Critério de parada: 0,00001
 Valores iniciais: $x_0=0; x_1=1$

Fonte: Print da tela do Excel

Note que o processo iterativo deverá ser interrompido na linha 11 onde ocorre pela primeira vez a palavra "Para", isto significa que na linha anterior o erro foi menos que 0,00001. Portanto, a raiz aproximada da função f é dada na linha anterior (linha 10, iteração 8), ou seja, a raiz aproximada é $\bar{x} = x_8 = 0,370558098$.

Na próxima seção, mostraremos como implementar o Método de Newton utilizando o aplicativo Scilab.

3.2 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON COM O SCILAB

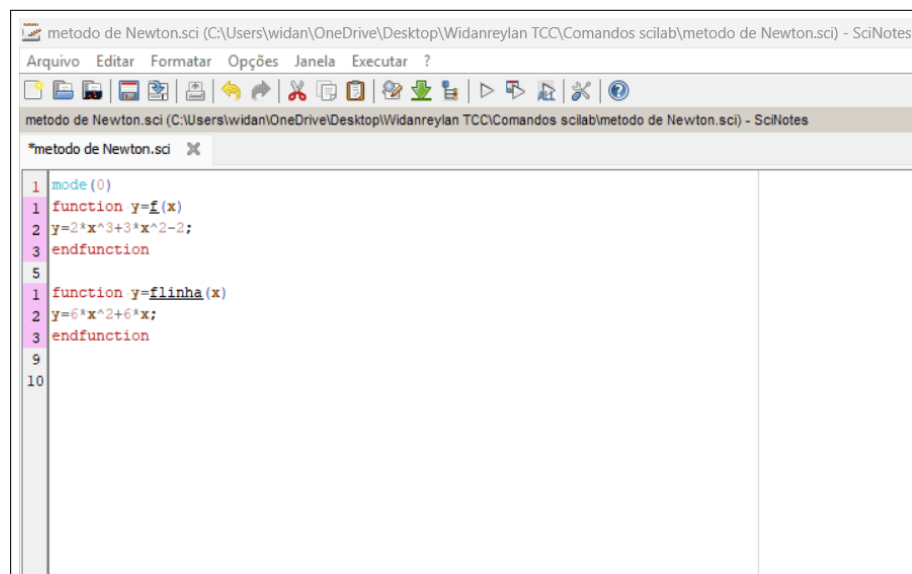
O Scilab é um software livre de código aberto destinado à computação científica e automação. Desenvolvido inicialmente pelo instituto de pesquisa francês INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique), o programa fornece um ambiente de programação de alto nível que possibilita a realização de cálculos numéricos, simulações, análises estatísticas e processamento de sinais. É um programa gratuito que pode ser encontrado para download em seu endereço eletrônico oficial <<https://www.scilab.org/>> e está disponível sob a licença GPL v2.0, o que permite ao usuário utilizar o software para qualquer finalidade e alterar o software para que se adapte às suas necessidades. Entre suas principais funcionalidades destacam-se métodos numéricos, otimização, modelagem de sistemas dinâmicos e a geração de gráficos bidimensionais e tridimensionais. O programa também tem sua versão online disponível em <<https://cloud.scilab.in/>>.

Por ser distribuído sob licença livre, o Scilab constitui uma alternativa acessível a softwares pagos como, por exemplo, o MATLAB, sendo amplamente empregado em contextos acadêmicos e profissionais, devido à sua versatilidade, confiabilidade e capacidade de integração com outras linguagens e bibliotecas. Para mais detalhes sobre funcionalidades ou como utilizar o software sugerimos consultar os manuais disponíveis no site oficial do Software. Para o bom desenvolvimento desta seção entende-se que o leitor conhece pelo menos a tela inicial do Scilab.

O objetivo desta seção é utilizar o Scilab para implementar um algoritmo para aproximação de uma raiz real de uma dada função f utilizando o Método de Newton como ferramenta.

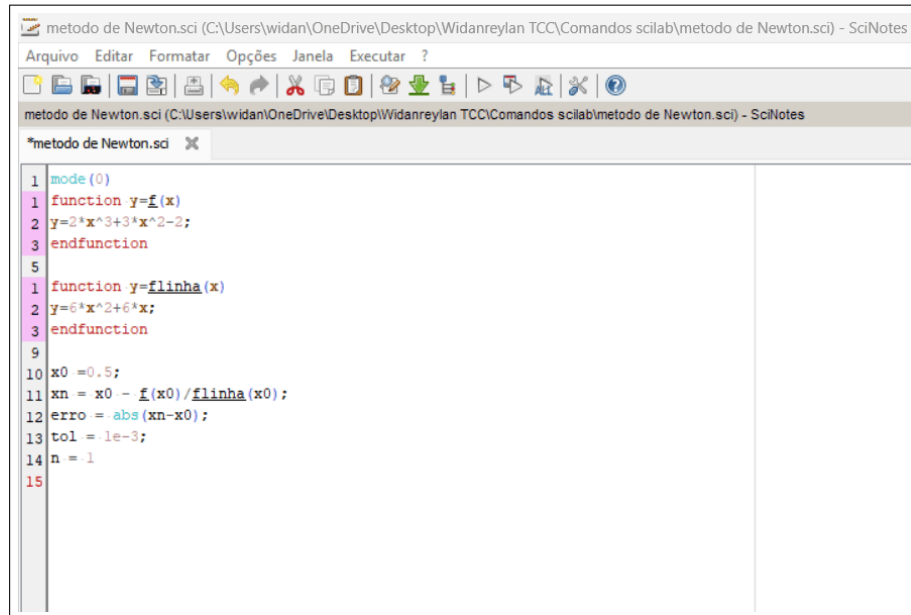
Para isso, consideremos o problema de construir um algoritmo em Scilab para implementação do Método de Newton para aproximação de uma raiz real da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$ com precisão de $\varepsilon < 0,001$. Pelo que fizemos na seção anterior, sabemos que f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$ e que f' é positiva nesse intervalo, o que garante a unicidade da raiz em $[0, 1]$. Além disso, análogo ao que fizemos anteriormente, tomaremos como valor inicial $x_0 = 0,5$. Para começar, na área de trabalho do Scilab, definiremos a função f e sua derivada conforme mostra a Figura 3.12 a seguir:

Figura 3.12: Área de trabalho do Scilab



Fonte: Print da tela do Scilab

Na Figura 3.12 acima, o comando `mode(0)` será usado para mostrar os resultados das aproximações encontradas em cada iteração. Após definir essas funções, vamos definir o Método de Newton e as variáveis que serão usadas para implementação do método, a saber: o valor de x_0 , o erro, a tolerância (ou precisão) e o método iterativo dado pela equação (2.11). A Figura 3.13 mostra tais definições:99

Figura 3.13: Programação do Método de Newton em Scilab


```

metodo de Newton.sci (C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\metodo de Newton.sci) - SciNotes
Arquivo  Editar  Formatar  Opções  Janela  Executar  ?

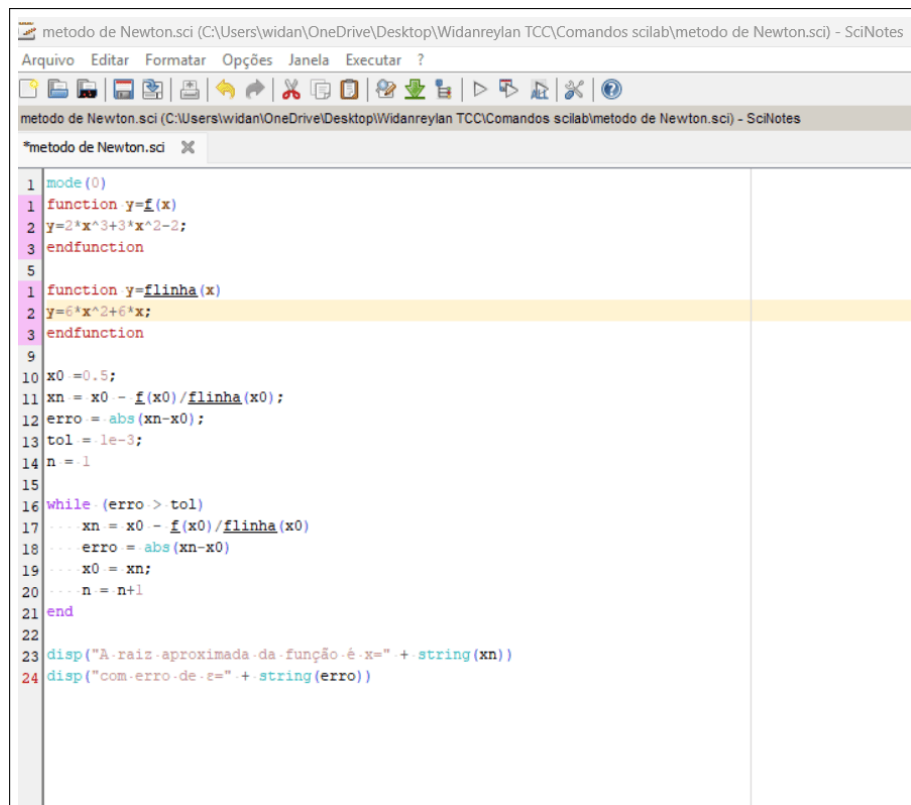
metodo de Newton.sci (C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\metodo de Newton.sci) - SciNotes
*metodo de Newton.sci

1  mode(0)
2  function y=f(x)
3  y=2*x^3+3*x^2-2;
4  endfunction
5
6  function y=flinha(x)
7  y=6*x^2+6*x;
8  endfunction
9
10 x0 =0.5;
11 xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
12 erro = abs(xn-x0);
13 tol = 1e-3;
14 n = 1
15

```

Fonte: Print da tela do Scilab

A seguir, utilizaremos o comando "while" com o objetivo de fazer o programa executar e repetir o algoritmo até que a tolerância seja atingida. O comando "while" funciona como um laço de repetição que executa uma condição enquanto ela for verdadeira. Veja a Figura 3.14:

Figura 3.14: Implementação do Método de Newton em Scilab


```

metodo de Newton.sci (C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\metodo de Newton.sci) - SciNotes
Arquivo  Editar  Formatar  Opções  Janela  Executar  ?

metodo de Newton.sci (C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\metodo de Newton.sci) - SciNotes
*metodo de Newton.sci

1  mode(0)
2  function y=f(x)
3  y=2*x^3+3*x^2-2;
4  endfunction
5
6  function y=flinha(x)
7  y=6*x^2+6*x;
8  endfunction
9
10 x0 =0.5;
11 xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
12 erro = abs(xn-x0);
13 tol = 1e-3;
14 n = 1
15
16 while (erro > tol)
17   ... xn = x0 - f(x0)/flinha(x0)
18   ... erro = abs(xn-x0)
19   ... x0 = xn;
20   ... n = n+1
21 end
22
23 disp("A-raiz-aproximada-da-função-é-x=" + string(xn))
24 disp("com-erro-de-ε=" + string(erro))

```

Fonte: Print da tela do Scilab

Na Figura 3.14 acima, o comando "disp" é utilizado para que o programa retorne com uma mensagem na área de trabalho com os valores das aproximações da raiz exata de f . Já o comando "string" converte números, variáveis ou expressões em texto, tornando o programa mais didático. Por fim, basta iniciar a programação feita clicando sobre o botão "Executar".

A Figura 3.15 a seguir apresenta o algoritmo programado para o método, bem como o programa implementado com apresentação da solução do problema proposto.

Figura 3.15: Implementação do Método de Newton em Scilab para $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$

```

Scilab 2025.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos  ?

Execução de iniciação:
carregando o ambiente inicial

--> exec('C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\metodo de Newton.sci', -1)
n =
1.
xn =
0.7222222
erro =
0.2222222
n =
2.
xn =
0.6795791
erro =
0.0426431
n =
3.
xn =
0.6776545
erro =
0.0019245
n =
4.
xn =
0.6776507
erro =
0.0000038
n =
5.
"A raiz aproximada da função é x=0.6776507"
"com erro de ε=0.0000038"

-->

metodo de Newton.sci (C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\metodo de Newton.sci)
*metodo de Newton.sci  cos x - x.sci
1  mode(0)
2  function y=f(x)
3  y=2*x^3+3*x^2-2;
4  endfunction
5  function y=flinha(x)
6  y=6*x^2+6*x;
7  endfunction
8
9  x0=0.5;
10 xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
11 erro = abs(xn-x0);
12 tol = 1e-3;
13 n = 1
14 while (erro > tol)
15     xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
16     erro = abs(xn-x0);
17     x0 = xn;
18     n = n+1
19 end
20 disp("A raiz aproximada da função é x=" + string(xn))
21 disp("com erro de ε=" + string(erro))
22

```

Fonte: Print da tela do Scilab

Note que, a cada iteração, o método apresenta o valor da raiz aproximada e o erro cometido nessa iteração. Nesse caso, a raiz aproximada de f é $\bar{x} = 0,6776507$.

Para limpar o ambiente de trabalho caso ocorra erros ou para iniciar uma nova programação, basta inserir o comando "clear" na área de trabalho.

A seguir apresentamos o algoritmo utilizando para aproximar uma raiz real de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$ com tolerância $\varepsilon < 0,001$.

Algoritmo para Implementação do Método de Newton em Scilab

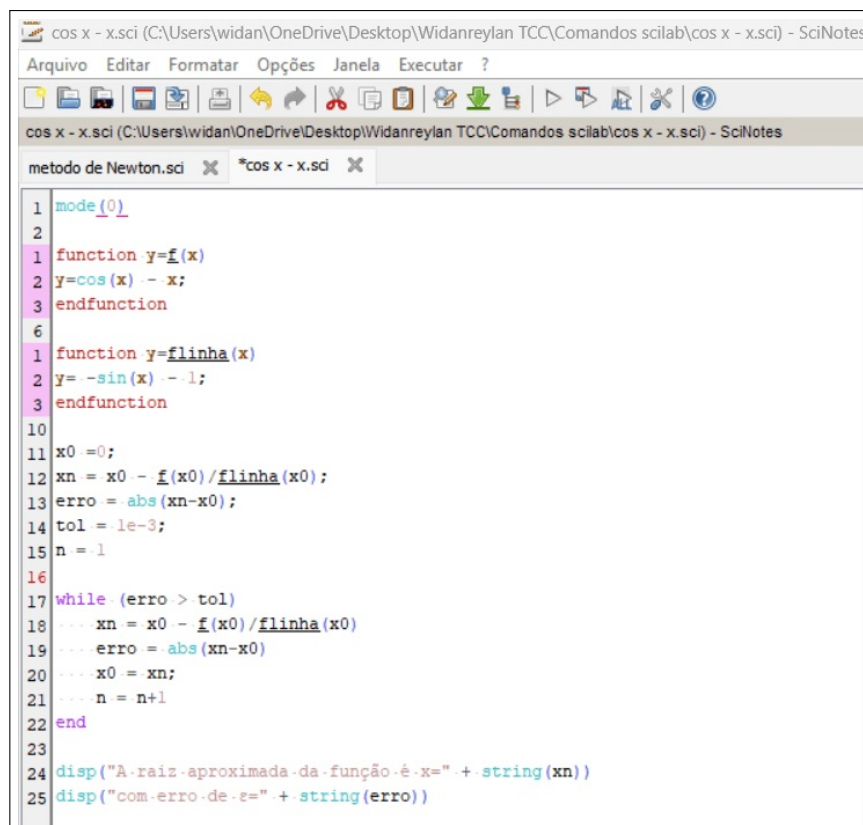
```

mode(0)
function y=f(x)
y = 2*x^3 + 3*x^2 - 2;
endfunction
function y=flinha(x)
y = 6*x^2 + 6*x;
endfunction
x0 = 0.5;
xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
erro = abs(xn-x0);
tol = 1e-3;
n = 1
while (erro > tol)
xn = x0 - f(x0)/flinha(x0)
erro = abs(xn-x0)
x0 = xn;
n = n+1 end
disp("A raiz aproximada da função é x="+ string(xn))
disp("com erro de ε="+ string(erro))

```

Agora, considere o problema de construir um algoritmo em Scilab para implementar o Método de Newton para aproximação de uma raiz real da função $f(x) = \cos x - x$ no intervalo $[0, 1]$, com precisão $\varepsilon < 0,001$ e aproximação inicial dada por $x_0 = 0$. A Figura 3.6 a seguir mostra o algoritmo para aproximação da raiz de f .

Figura 3.16: Algoritmo do Método de Newton em Scilab para $f(x) = \cos x - x$



```

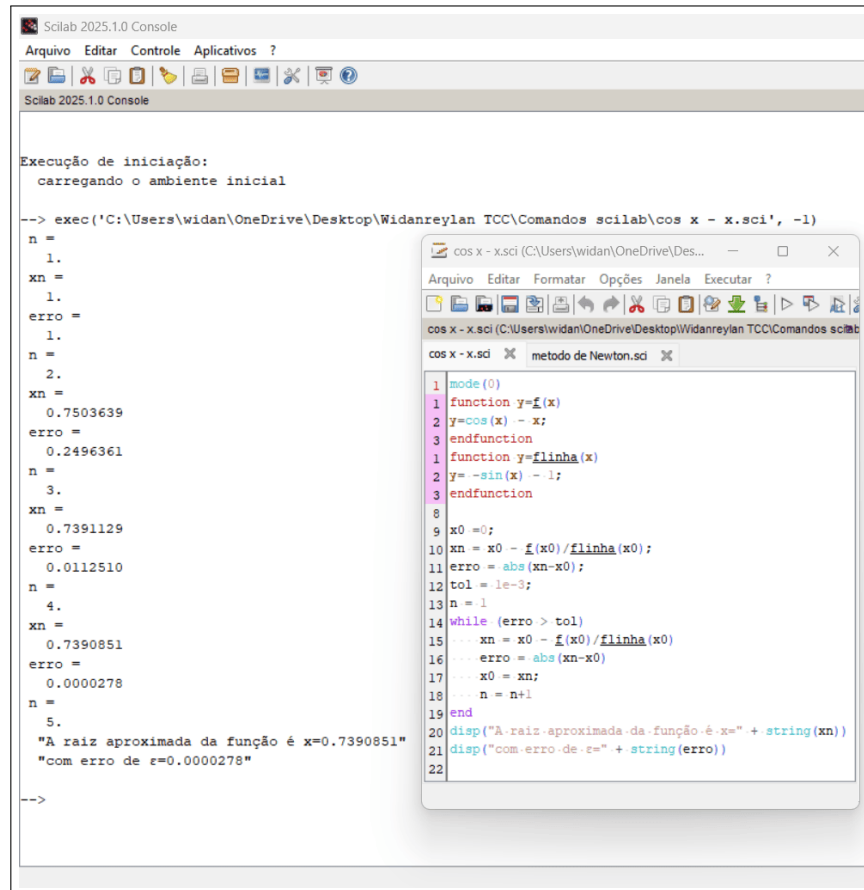
cos x - x.sci (C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\cos x - x.sci) - SciNotes
Arquivo  Editar  Formatar  Opções  Janela  Executar  ?
cos x - x.sci (C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\cos x - x.sci) - SciNotes
metodo de Newton.sci  *cos x - x.sci
1  mode(0)
2
3  function y=f(x)
4  y=cos(x)-x;
5  endfunction
6
7  function y=flinha(x)
8  y=-sin(x)-1;
9  endfunction
10
11 x0 = 0;
12 xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
13 erro = abs(xn-x0);
14 tol = 1e-3;
15 n = 1
16
17 while (erro > tol)
18 ... xn = x0 - f(x0)/flinha(x0)
19 ... erro = abs(xn-x0)
20 ... x0 = xn;
21 ... n = n+1
22 end
23
24 disp("A raiz aproximada da função é x=" + string(xn))
25 disp("com erro de ε=" + string(erro))

```

Fonte: Print da tela do Scilab

Agora, basta iniciar a programação clicando sobre o botão "Executar". A Figura 3.17 a seguir apresenta a implementação do algoritmo e a solução do problema proposto.

Figura 3.17: Implementação do Método de Newton em Scilab para $f(x) = \cos x - x$



```

Scilab 2025.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos  ?

Execução de iniciação:
carregando o ambiente inicial

--> exec('C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\cos x - x.sci', -1)

n =
1.
xn =
1.
erro =
1.
n =
2.
xn =
0.7503639
erro =
0.2496361
n =
3.
xn =
0.7391129
erro =
0.0112510
n =
4.
xn =
0.7390851
erro =
0.0000278
n =
5.
"A raiz aproximada da função é x=0.7390851"
"com erro de ε=0.0000278"
-->

cos x - x.sci (C:\Users\widan\OneDrive\Desktop\Widanreylan TCC\Comandos scilab\cos x - x.sci)
cos x - x.sci
metodo de Newton.sci

1 mode(0)
2 function y=f(x)
3 y=cos(x) - x;
4 endfunction
5 function y=flinha(x)
6 y=-sin(x) - 1;
7 endfunction
8
9 x0 = 0;
10 xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
11 erro = abs(xn-x0);
12 tol = 1e-3;
13 n = 1
14 while (erro > tol)
15 ... xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
16 ... erro = abs(xn-x0);
17 ... x0 = xn;
18 ... n = n+1;
19 end
20 disp("A raiz aproximada da função é x=" + string(xn))
21 disp("com erro de ε=" + string(erro))
22

```

Fonte: Print da tela do Scilab

Note novamente que, a cada iteração, o método apresenta a raiz aproximada e o erro cometido nessa aproximação. Além disso, a raiz é mais próxima quanto menor for o erro desejado. Neste caso, a raiz aproximada de f é $\bar{x} = 0,7390851$.

Note que o algoritmo construído para $f(x) = \cos x - x$ é o mesmo construído para $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$, a menos dos valores das variáveis a serem inseridas, isto é, a menos dos valores de x_0 , do erro, da função f e da derivada de f . Consequentemente, este algoritmo pode ser utilizado para aproximação de qualquer da raiz real de qualquer função que satisfaça as condições necessárias, bastando ao usuário trocar os valores das variáveis do problema a ser resolvido.

No quadro a seguir, apresentamos o algoritmo utilizando para aproximar uma raiz real de $f(x) = \cos x - x$ com tolerância $\varepsilon < 0,001$.

Algoritmo para Implementação do Método de Newton em Scilab

```
mode(0)
function y=f(x)
y = cos(x)-x;
endfunction
function y=flinha(x)
y = -sin(x)-1;
endfunction
x0 = 0;
xn = x0 - f(x0)/flinha(x0);
erro = abs(xn-x0);
tol = 1e-3;
n = 1
while (erro > tol)
xn = x0 - f(x0)/flinha(x0)
erro = abs(xn-x0)
x0 = xn;
n = n+1 end
disp("A raiz aproximada da função é x="+ string(xn))
disp("com erro de ε="+ string(erro))
```

Os mesmos algoritmos podem ser utilizados na versão em nuvem do Scilab disponível em <https://cloud.scilab.in/>.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, desenvolvemos um estudo claro e estruturado sobre o Método de Newton, abordando desde os fundamentos teóricos até sua aplicação prática em ambientes computacionais. A análise inicial dos teoremas de Bolzano e do Valor Intermediário mostrou-se essencial para compreender o processo de localização de raízes e para garantir que o método seja aplicado de forma adequada. Em seguida, discutimos a formulação do Método de Newton, suas condições de convergência, a importância da escolha do ponto inicial e sua relação com o Método das Secantes, destacando semelhanças, diferenças e potenciais de cada abordagem.

A implementação dos métodos no Excel e no Scilab permitiu visualizar, de maneira prática, o funcionamento dos algoritmos e comparar a eficiência das ferramentas utilizadas. As ilustrações apresentadas contribuíram para tornar o processo mais acessível e facilitar a compreensão das etapas envolvidas.

Portanto, entende-se que este trabalho pode contribuir para a disseminação do conhecimento em Matemática e servirá como um material de pesquisa sobre cálculo numérico com ênfase no Método de Newton, de modo a auxiliar os discentes dos cursos de graduação nos estudos de Matemática e áreas afins.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARENALES, Selma, DAREZZO, Artur. **Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software**, São Paulo: Thonsom Learning, 2008.
- [2] BARROSO, Leônidas Conceição, BARROSO, Magali Maria de Araújo, FILHO, Frederico Ferreira Campos, CARVALHO, Marcio Luiz Bunte de, MAIA, Miriam Lourenço. **Cálculo Numérico (com aplicações)**, São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1987.
- [3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**, 2^a ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1996.
- [4] FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [5] HEFEZ, Abramo, VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e Equações Algébricas**, Rio de Janeiro: SBM, 2022.
- [6] IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar: complexos, polinômios, equações**, v. 6, 8^a ed. São Paulo: Atual, 2013.
- [7] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, v. 1, 5 ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2013.
- [8] LIMA, Elon Lages. **Análise Real Volume 1: Funções de uma variável**, 1^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [9] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios**, 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [10] RUGGIERO, Márcia A. Gomes, LOPES, Vera Lúcia de Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Técnicos e Computacionais**, São Paulo: Pearson, 1996.
- [11] SCILAB. Numerical Analysis Using Scilab: Solving Nonlinear Equations. **scilab.org**. Disponível em: <https://www.scilab.org/sites/default/files/prg/att/1691/Numerical_Analysis_Scilab_Root_Finding_0.pdf>. Acesso em 04 de novembro de 2025.