

**BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL**

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE ELEMENTO DE PÓRTICO  
TRIDIMENSIONAL SUBMETIDO À VARIAÇÃO DE TEMPERATURA UNIFORME**

**Christopher Rabelo Centofante**

**Rio Verde–GO**

**2024**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO –  
CAMPUS RIO VERDE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL**

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE ELEMENTO DE PÓRTICO  
TRIDIMENSIONAL SUBMETIDO À VARIAÇÃO DE TEMPERATURA UNIFORME**

**Christopher Rabelo Centofante**

Trabalho de curso apresentado, como parte das exigências para obtenção do título de BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano- Campus Rio Verde.

Orientador: Michell Macedo Alves

Rio Verde–GO

2024

**Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática do Sistema Integrado de Bibliotecas do IF Goiano - SIBi**

C397i Rabelo Centofante, Christopher  
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE  
ELEMENTO DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL  
SUBMETIDO À VARIAÇÃO DE TEMPERATURA  
UNIFORME / Christopher  
Rabelo Centofante. Rio Verde 2024.

49f. il.

Orientador: Prof. Dr. Michell Macedo Alves.

Monografia (Bacharel) - Instituto Federal Goiano, curso  
de 0220084 - Bacharelado em Engenharia Civil - Integral -  
Rio Verde (Campus Rio Verde).

1. Implementação computacional. 2. Pórtico Tridimensional. 3.  
Temperatura Uniforme. I. Título.

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO**  
**PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano a disponibilizar gratuitamente o documento em formato digital no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

**IDENTIFICAÇÃO DA PRODUÇÃO TÉCNICO-CIENTÍFICA**

**CIENTÍFICA**

<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	Artigo
<input type="checkbox"/>	Tese (doutorado)	<input type="checkbox"/>	científico Capítulo de
<input type="checkbox"/>	Dissertação (mestrado)	<input type="checkbox"/>	livro Livro
<input checked="" type="checkbox"/>	Monografia (especialização)	<input type="checkbox"/>	Trabalho apresentado em
<input type="checkbox"/>	TCC (graduação)	<input type="text"/>	
Produto técnico e educacional - Tipo:			
<input type="text" value="ChristopherRabeloCentofante"/>		<input type="text" value="0110008008"/>	
Título			
<input type="text"/>			

**RESTRICÇÕES DE ACESSO AO**

Documento   Sim,

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: 1 / 09 /

06

**DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA**

O(a) referido(a) autor(a) declara:

- Que o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- Que obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autoria, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- Que cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

RioerdeGO no.

Documentos assinados digitalmente  
**gov.br** CHRISTOPHER RABELO CENTOFANTE  
Data: 21/02/2025 00:38:17-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Local Data

Assinatura do autor e/ou detentor dos direitos autorais

Ciente e de acordo:

Assinado de  
MICHELL forma digital por MICHELL  
ALVES:04050331683  
Dados: 2025.02.24

Assinatura do(a)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA INSTITUTO  
FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Ata nº 15/2024 - CCTEDI-RV/GEPTNM-RV/DE-RV/CMPRV/IFGOIANO

## ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO

Ao(s) 12 dia(s) do mês de setembro de 2024, às 13 horas e 30 minutos, reuniu-se a banca examinadora composta pelos docentes: Prof. Dr. Michell Macedo Alves (orientador), Prof. Dr. Heitor Cardoso Bernardes (membro interno) e Eng. Civil Msc. Marlos Mangini (membro interno) para examinar o Trabalho de Curso intitulado "Implementação computacional de elementos de pórtico tridimensional submetido à variação de temperatura uniforme" do estudante Christofer Rabelo Centofante, Matrícula nº 2017102200840038 do Curso de Engenharia Civil do IF Goiano – Campus Rio Verde. A palavra foi concedida ao estudante para a apresentação oral do TC, houve arguição do candidato pelos membros da banca examinadora. Após tal etapa, a banca examinadora decidiu pela APROVAÇÃO do estudante. Ao final da sessão pública de defesa foi lavrada a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Observação:

( ) O(a) estudante não compareceu à defesa do TC.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Michell Macedo Alves, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 14/11/2024
- 10:36:22. **Heitor Cardoso Bernardes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 14/11/2024

Este documento foi emitido pelo SUAP em 14/11/2024. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse

<https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 652285



INSTITUTO FEDERAL GOIANO

Campus

Rio Verde Rodovia Sul Goiana, Km 01, Zona Rural, 01, Zona Rural, RIO VERDE / GO,  
CEP 75901-970

(64) 3624-1000

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus por ter me abençoado com oportunidades e motivação para continuar minha trajetória.

Ao Instituto Federal Goiano pela oportunidade que tive em fazer parte do corpo discente, aprendendo e desenvolvendo estudos.

A minha filha Elisa por me dar a alegria de ser pai e motivar-me ainda mais.

Aos meus pais, Elias e Agda que sempre me apoiaram e confiaram nos meus sonhos.

A minha companheira Fernanda por caminhar ao meu lado e dar suporte em todas as situações.

Ao orientador, Prof. Dr. Michell Macedo, pela paciência e comprometimento em exercer o papel de orientador e ensinar, deixo aqui meus verdadeiros agradecimentos.

A minha família e amigos que estiveram comigo nessa caminhada, agradeço imensamente

## RESUMO

O desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise de estruturas tem solucionado problemas estruturais. Todavia, devido a limitações existentes para usuários que não possuam a licença completa ou simplesmente a ferramenta não possui determinada função, as análises podem se restringir a modelos teóricos mais limitados que não considerem fenômenos da ação de temperatura em estruturas. Sendo assim, este trabalho propõe o desenvolvimento de um código computacional gratuito e educacional capaz de calcular deslocamentos e esforços solicitantes em pórticos tridimensionais submetidos à variação uniforme de temperatura. Este código foi implementado na linguagem Python na plataforma Visual Codes. O código possui quatro processos para sua criação, o primeiro sendo a revisão bibliográfica, o segundo a construção do código, o terceiro realizar o teste para verificar a funcionalidade e por fim comparar os resultados com exemplos da literatura. Foi desenvolvido o código que cumpriu os objetivos estabelecidos neste trabalho, uma ferramenta educacional gratuita para o cálculo de pórticos tridimensionais com influência de temperatura uniforme, tendo quatro validações para o mesmo, sendo a primeira mais simples, uma barra engastada no eixo X com deslocamento somente nesse eixo, o segundo um grupo de materiais com deslocamento apenas no eixo X, o terceiro um pórtico em duas dimensões, sendo X e Y com temperatura uniforme em uma barra e a última mais complexa, um pórtico tridimensional composto de 4 pilares e 4 vigas com adição de temperatura uniforme na parte superior da estrutura. Os resultados foram compatíveis com os obtidos na literatura.

**Palavras-chave:** Análise Matricial, Dilatação Térmica, Método da Rigidez

## ABSTRACT

The development of computational tools for structural analysis has solved structural problems. However, due to existing limitations for users who do not have the full license or simply because the tool lacks certain functions, the analyses may be restricted to more limited theoretical models that do not take into account the effects of temperature on structures. Thus, this work proposes the development of a free and educational computational code capable of calculating displacements and demanding forces in three-dimensional frames subjected to uniform temperature variation. This code was implemented in the Python language on the Visual Codes platform. The code has four processes for its creation, the first being the literature review, the second the construction of the code, the third conducting tests to verify functionality, and finally comparing the results with examples from the literature. The code has been developed to meet the objectives established in this work, a free educational tool for the calculation of three-dimensional frames with uniform temperature influence, having four validations for it. The first is simpler, a fixed beam along the X-axis with displacement only in that axis; the second involves a group of materials with displacement only in the X-axis; the third is a two-dimensional frame, along the X and Y axes, with uniform temperature in one beam; and the last, more complex, is a "table"-shaped frame with added temperature on the upper part of the structure in three dimensions. The results were consistent with those obtained in the literature, except for the last one, as it was created.

**Keywords:** Frames, Matrices, Matrix Analysis, Thermal Influence, Displacement

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Pórtico em natura.....	15
<b>Figura 2</b> - Elemento tridimensional e Graus de Liberdade.....	20
<b>Figura 3</b> - Matriz de Rigidez para elemento de Pórtico Tridimensional.....	21
<b>Figura 4</b> – Matriz de Rotação.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b> 2
<b>Figura 5</b> – Matriz de Rotação Expandida. ....	332
<b>Figura 6</b> - Visual Code.....	25
<b>Figura 7</b> - Barra engastada.....	26
<b>Figura 8</b> – Graus de Liberdade. ....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
<b>Figura 9</b> - Matriz de Rigidez da Barra.....	27
<b>Figura 10</b> - Resultados exemplo 1 .....	30
<b>Figura 11</b> – Grupo de Materiais. ....	<b>Error! Bookmark not defined.</b> 30
<b>Figura 12</b> – Esquema de Força do Grupo de Materiais. <b>Error! Bookmark not defined.</b>	<b>1</b>
<b>Figura 13</b> - Pórtico Bidimensional.....	32
<b>Figura 14</b> - Deslocamento pela Variação de Temperatura.....	33
<b>Figura 15</b> - Pórtico Tridimensional.....	35
<b>Figura 16</b> - Diagrama de força no ponto A.....	36
<b>Figura 17</b> - Diagrama Normal.....	37
<b>Figura 18</b> - Diagrama Cortante.....	37
<b>Figura 19</b> - Diagrama Momento Fletor.....	38
<b>Figura 20</b> - Diagrama Momento Torsor.....	38
<b>Figura 21</b> - Pórtico Tridimensional (2) .....	39
<b>Figura 22</b> - Entrada de Dados.....	40
<b>Figura 23</b> - Vista Superior do Pórtico.....	46

**LISTA DE TABELAS**

<b>Tabela 1</b> - Resultados do exemplo 2.....	32
<b>Tabela 2</b> - Resultados do exemplo 3.....	34
<b>Tabela 3</b> - Resultados das Forças no Ponto A.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
<b>Tabela 4</b> - Informações do Pórtico.....	39
<b>Tabela 5</b> - Reações de Apoio.....	41
<b>Tabela 6</b> - Esforços Solicitantes.....	42
<b>Tabela 7</b> - Deslocamentos.....	43
<b>Tabela 8</b> - Resultados exemplo 5 .....	45

**LISTA DE EQUAÇÕES**

Equação (1).....	20
Equação (2).....	23
Equação (3).....	24
Equação (4).....	25
Equação (5).....	34
Equação (6).....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>

**LISTA DE SÍMBOLOS LATIM**

$A$  - Área da seção transversal da barra

$C_x$  - Cosseno diretor do eixo  $x$

$C_y$  - Cosseno diretor do eixo  $y$

$C_z$  - Cosseno diretor do eixo  $z$

$F$  - Vetor de forças

$i_x$  - Vetor unitário local em  $x$

$i_y$  - Vetor unitário local em  $y$

$i_z$  - Vetor unitário local em  $z$

$I_x$  - Momento de inércia no eixo  $x$

$I_y$  - Momento de inércia no eixo  $y$

$I_z$  - Momento de inércia no eixo  $z$

$L$  - Comprimento da barra

$M_x$  - Momento em torno do eixo  $X$

$M_y$  - Momento em torno do eixo  $Y$

$M_z$  - Momento em torno do eixo  $Z$

$N_x$  - Força normal no eixo  $X$

$N_y$  - Força normal no eixo  $Y$

$N_z$  - Força normal no eixo  $Z$

$T$  - Temperatura

$u$  - Deslocamento da barra, em coordenadas locais

$U$  - Deslocamento da barra, em coordenadas globais

$V_x$  - Força cortante no eixo  $X$

$V_y$  – Força cortante no eixo Y

$V_z$  – Força cortante no eixo Z

x, y, z - Coordenadas locais

X, Y, Z - Coordenadas globais

### **LISTA DE SÍMBOLOS GREGOS**

$\Delta T$  – Variação de temperatura

$\alpha$  – Coeficiente de dilatação térmica

$\delta$  – Deformação

$\delta_{\Delta T}$  – Deformação devido a variação de temperatura

## SUMÁRIO

<b>RESUMO</b> .....	8
<b>ABSTRACT</b> .....	9
<b>SUMÁRIO</b> .....	15
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>1.1 Justificativa</b> .....	17
<b>1.2 Objetivo Geral</b> .....	18
<b>1.2.1 Objetivos específicos</b> .....	18
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	18
<b>2.1 Efeitos de Temperatura</b> .....	19
<b>2.2 Análise Matricial</b> .....	20
<b>2.3 Método da Rigidez</b> .....	22
<b>2.4 Matriz de Rotação</b> .....	24
<b>2.5 Implementação computacional</b> .....	264
<b>3. MATERIAIS E MÉTODOS</b> .....	264
<b>3.1 Linguagem Python</b> .....	264
<b>3.2 Metodologia</b> .....	275
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	296
<b>4.1 Exemplo 1</b> .....	336
<b>4.2 Exemplo 2</b> .....	30
<b>4.3 Exemplo 3</b> .....	32
<b>4.4 Exemplo 4</b> .....	33
<b>4.5 Exemplo 5</b> .....	37
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	5042
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	42

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico trouxe avanço em todas as áreas do conhecimento, auxiliando os seres humanos em suas tarefas, com a Engenharia Civil não foi diferente. Atualmente, é praticamente impossível executar um projeto de construção sem a ajuda de algum software, gerando facilidades que vão desde uma planilha do Excel até programas que são capazes de executar desenhos, cálculos, representações e simulações, facilitando o trabalho de engenheiros, tais como: o AutoCAD que é um dos softwares do tipo CAD mais conhecido do mundo, o Revit é baseado na tecnologia BIM, ao contrário do AutoCAD, o SketchUp, TQS é um software do tipo CAD, produzido por brasileiros, voltado para o projeto de estruturas em concreto armado, em alvenaria estrutural, entre outros.

Para compreender o comportamento das estruturas em cada tipo de edificação, faz-se necessário a utilização de “softwares” de cálculos pelo método dos elementos finitos e ensaios reais nas mais adversas condições e conhecer os aspectos que influenciam as estruturas em altas temperaturas destacando-se a redução da resistência mecânica e o módulo de elasticidade dos elementos estruturais da edificação, conduzindo a deformações adicionais, podendo levar a estrutura ao colapso. Porém, para ter acesso a essas ferramentas, geralmente, deve-se comprar suas licenças de usos, que em muitos casos possuem um custo elevado para os iniciantes, havendo necessidade de recorrer a outros softwares mais acessíveis.

Uma opção de ferramenta é o Python, de código livre (open source) disponibilizado em diversas plataformas, criado em 1991 (sua primeira versão) pelo holandês Guido Van Rossum, é uma linguagem de fácil interpretação que exige mais da máquina e menos do programador sendo, portanto, uma linguagem facilmente legível, que não prioriza a velocidade de execução, essa linguagem é amplamente utilizada devido ao vasto número de bibliotecas gratuitas disponíveis, que possibilitam uma infinidade de realizações, onde é possível utilizá-la para compilar uma análise matricial da estrutura desejada, que será no caso de um pórtico espacial. De acordo com Kassimali (2015) a análise matricial é a previsão dos resultados de ações sobre uma estrutura, essas ações podem ser cargas e/ou efeitos externos, como movimentação dos apoios ou alteração de temperatura.

A análise estrutural é parte essencial ao projeto estrutural, segundo Martha (2017), “tem como objetivo a concepção de uma estrutura que atenda a todas as necessidades para as quais ela será construída”. Para tanto, há de se conhecer tanto as ações atuantes sobre a mesma, como seu comportamento que, de modo geral, pode ser expresso por seus esforços solicitantes e deslocamentos

As metodologias que utilizam linguagem de programação possuem a capacidade de gerar resultados que condizem com a realidade com bastante fidelidade. Além disso, possuem segurança, pois estão em um ambiente virtual, possibilitando testes diversos e novas abordagens, garantindo uma grande variedade de arranjos.

Contudo, apesar da facilidade o profissional da área não deve ser menosprezado, pois o mesmo deve compreender a utilização dos softwares e interpretar os resultados obtidos dos mesmos.

Este trabalho visou utilizar uma linguagem de programação gratuita Python que solucione deslocamentos ocasionados pela mudança uniforme de temperatura em pórticos tridimensionais, proporcionando aos estudantes de engenharias uma ferramenta educacional.

### **1.1 Justificativa**

Com o avanço da tecnologia em softwares e computadores, suas capacidades de processamento foram ficando mais elevadas, possibilitando a construção de ferramentas computacionais capazes de processar estruturas maiores e mais complexas, porém nem tudo é vantagem. Com esse avanço, também surgiram softwares que necessitam de compra de licenças para sua utilização, que por muitas vezes são valores elevados, principalmente para os profissionais ou estudantes que estão começando na área.

Por isso, o intuito desse trabalho é proporcionar um software open code de forma gratuita e de fácil adaptação para a resolução de pórticos, além disso, maioria dos trabalhos não leva em consideração efeitos de ações indiretas como a temperatura que gera deformações e acabam alterando os esforços internos da estrutura, além da dificuldade de se avaliar a resistência dessa estrutura por meio de ensaios, substituindo-os por programa computacional que possa ser utilizado como método avançado de cálculos, onde se faz uma simulação baseados no método dos elementos finitos e podem ser inseridos vários efeitos na modelagem com ações mecânicas.

Este trabalho tem como finalidade à compreensão do comportamento estrutural de pórtico espacial metálicos com variação uniforme de temperatura, gerando como resultado deslocamento, esforços e reações devido à variação, restringido apenas à variação uniforme de temperatura, assim como a elaboração de um código open source na linguagem Python, proporcionando maior conhecimento no uso de linguagens computacionais, podendo ser uma ferramenta educacional no processo de ensino e aprendizagem para acadêmicos do Curso de Engenharia Civil, onde sua abordagem deve ser contextualizada e clara, servindo também para avaliar os efeitos da temperatura em pórticos tridimensionais gerando deformações, alterando as estruturas internas, assim como esforços solicitantes e reações de apoio.

## 1.2 Objetivo Geral

Desenvolver um software open source capaz de analisar pórticos tridimensionais com influência de temperatura pelo método da rigidez.

### 1.2.1 Objetivos específicos

Elaboração do modelo de análise matricial;

- 1) Implementar o método da rigidez utilizando a linguagem Python;
- 2) Implementar ação da variação de temperatura no algoritmo;
- 3) Comprovar a eficiência e eficácia do algoritmo através da comparação dos resultados do programa com os da literatura;

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Pórtico

Os pórticos são estruturas planas lineares e coplanares formadas pela associação de barras retas articuladas entre si e não concorrentes com cargas ativas e reativas. São resultados da associação entre pilares e vigas de estruturas maciças ou ocas. Os pórticos, juntamente com os elementos portantes secundários, formam o esqueleto resistente do sistema construtivo, no qual são fixados os elementos de cobertura e fechamento lateral. A união destes elementos é normalmente considerada pelos projetistas como ligações perfeitamente rígidas ou ligações perfeitamente articuladas. (SOARES; HANAI, 2001).

**Figura 1** - Pórticos in natura.



Fonte: Fachini Engenharia Civil

Kimura (2018), define como pórtico espacial um modelo tridimensional no qual compreende a estrutura na totalidade, sem restrições no posicionamento dos nós e

direcionamento das barras, permitindo, dessa forma, a aplicação concomitante de ações verticais e horizontais. Assim, este modelo estrutural traduz o tipo mais comum de estruturas reticuladas, haja vista que representam todos os pilares e vigas presentes em um edifício, o que permite uma avaliação completa e eficiente do comportamento global da estrutura.

Os pórticos estão sujeitos a esforços de compressão, tração, flexão, torção e cisalhamento. Os carregamentos e esforços aplicados no pórtico podem variar conforme a posição das barras e carregamentos. E na verificação de sua estabilidade é considerado para cada barra os seguintes esforços: Força Normal (N), Força Cortante (V) e Momento Fletor (M). Um pórtico estável possui todas as barras estáveis em relação aos três esforços.

## 2.1 Efeitos de Temperatura

Azkune, Puente e Insausti (2007), definem a variação da temperatura ambiente como o fator-chave para a redistribuição de tensões na estrutura, principalmente durante a construção. Devido à interação com as condições climáticas do ambiente, a temperatura do concreto fresco sofre grande redução e seu volume diminui, isto é, a peça se contrai, originando tensões térmicas que irão tracioná-la, gerando fissuração de origem térmica (SANTOS, 2012).

Estas variações podem ser uniformes ou até mesmo apresentar gradientes térmicos e, conseqüentemente, os elementos reticulados de uma estrutura podem estar sujeitos a variações de temperatura distintas para suas faces superior e inferior (MARTHA, 2017).

Em situações mais críticas as estruturas de concreto podem ser submetidas acidentalmente a altas temperaturas ou estas podem compor parte de suas condições usuais de trabalho. Para a maioria dos materiais estruturais, a deformação térmica é proporcional à diferença de temperatura (GERE, 2003; HIBBELER, 2004).

A resistência do concreto quando submetido a temperaturas consideráveis ocorre devido às características térmicas dos materiais que o compõe, dentre as quais se destaca coeficiente de dilatação, dentre outros. Porém, o aumento da temperatura nos elementos de concreto provoca redução no módulo de elasticidade e na resistência características de seus materiais constituintes, havendo prejuízos na rigidez do elemento. Esses efeitos térmicos estão associados à dilatação térmica e à degradação das propriedades mecânicas devido ao aumento da temperatura (RIGOBELLO, 2011).

Uma solução para esses problemas é realizar uma operação matemática que leva em conta o material da estrutura e a variação de temperatura, mais conhecida como dilatação térmica linear que consiste na seguinte fórmula:

$$\Delta L = L_i \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad \text{Equação (1)}$$

Onde:

$\Delta L$  = Variação de comprimento

$L_i$  = Comprimento inicial

$\alpha$  = Coeficiente de dilatação do material

$\Delta T$  = Variação de temperatura.

Em casos aonde não há aplicação de força, se torna necessário fazer a dedução que relaciona a deformação pela força com a temperatura, ficando da seguinte forma:

$$\delta = \delta_{\Delta T}$$

$$\frac{F \times L}{E \times A} = \alpha \times \Delta T \times L$$

$$F = \alpha \times \Delta T \times E \times A$$

## 2.2 Análise Matricial

Com os avanços na tecnologia estrutural, tem-se cada vez mais a exigência de maior rapidez na análise e precisão nos sistemas estruturais, devido à necessidade de demonstrar segurança estrutural, com isso, houve uma necessidade de desenvolver métodos mais precisos de análise, uma vez que os métodos convencionais são satisfatórios quando utilizados em estruturas simples, mais quando aplicados em estruturas complexas já não são mais satisfatórios, havendo a necessidade de novos métodos que estabelecem com maior precisão quaisquer modificações estruturais que possa ocorrer no projeto.

Os métodos matriciais, atende tanto a exigência de velocidade, quando a precisão de análise para estruturas complexas, onde o computador digital é utilizado não apenas para a solução de equações simultâneas, mas também para todo o processo de análise estrutural, desde os dados iniciais de entrada até a saída final, que representa distribuições de tensões e forças, deflexões, coeficientes de influência, características frequências físicas e formas modais.

Os métodos matriciais baseiam-se no conceito de substituição da estrutura contínua real por um modelo matemático composto por elementos estruturais de tamanho finito (também chamados de elementos discretos) com propriedades elásticas e inerciais conhecidas que podem ser expressas em forma de matriz. As matrizes que representam essas propriedades são

consideradas blocos de construção que, quando encaixados de acordo com um conjunto de regras derivadas da teoria da elasticidade, fornecem as propriedades estáticas e dinâmicas do sistema estrutural real. Nos métodos matriciais as partículas são de tamanho finito e tem uma forma especificada. Essas partículas de tamanho finito são chamadas de elementos estruturais, e eles são especificados de forma um tanto arbitrária pelo analista no processo de definição do modelo matemático da estrutura contínua. As propriedades de cada elemento são calculadas, utilizando a teoria da continuidade meio elástico, enquanto a análise de toda a estrutura é realizada para a montagem dos elementos estruturais individuais. Quando o tamanho dos elementos diminui, o comportamento deformacional do modelo matemático converge ao da estrutura contínua (Przemienicki, 1968).

A principal função de qualquer estrutura é suportar e transferir cargas aplicadas externamente aos pontos de reação e, ao mesmo tempo, estar sujeita a algumas restrições específicas e a uma distribuição de temperatura conhecida. Na engenharia civil, os pontos de reação são aqueles pontos da estrutura que estão fixados a uma fundação rígida. O projetista de estruturas está, portanto, preocupado principalmente com a análise de configurações estruturais conhecidas que estão sujeitas a distribuições conhecidas de cargas, deslocamentos e temperaturas estáticas ou dinâmicas. Do seu ponto de vista, entretanto, o que é realmente necessário não é a análise, mas a síntese estrutural que conduza ao projeto mais eficiente (projeto ótimo) para a carga e temperatura ambiente especificadas. Conseqüentemente, o objetivo final do projeto estrutural não deve ser a análise de uma determinada configuração estrutural, mas a geração automatizada de uma estrutura, ou seja, a síntese estrutural com seus esforços, deslocamentos e reações, que satisfará os critérios de projeto especificados.

De acordo com Przemienicki (1968), os métodos de análise estrutural podem ser divididos em dois grupos: métodos analíticos e métodos numéricos. As limitações impostas pelos métodos analíticos são bem conhecidas. Somente em casos especiais são possíveis soluções de forma fechada. Soluções aproximadas podem ser encontradas para algumas configurações estruturais simples, mas, em geral, para estruturas complexas métodos analíticos não podem ser usados, e métodos numéricos devem ser invariavelmente empregados. Os métodos numéricos de análise estrutural podem ser subdivididos em dois tipos, (1) soluções numéricas de equações diferenciais para deslocamentos ou tensões e (2) métodos matriciais baseados na idealização de elementos discretos.

No primeiro tipo as equações de elasticidade são resolvidas para uma configuração estrutural particular, seja por técnicas de diferenças finitas ou por integração numérica direta. Nesta abordagem a análise é baseada numa aproximação matemática de equações diferenciais.

Limitações práticas, no entanto, restringem a aplicação destes métodos a estruturas simples. Embora as várias operações nas técnicas de diferenças finitas ou de integração numérica possam ser convertidas em notação matricial e a álgebra matricial aplicada à solução das equações governantes para as incógnitas, essas técnicas geralmente não são descritos como métodos matriciais, uma vez que as matrizes não são essenciais na formulação da análise.

No segundo tipo, a teoria estrutural completa é desenvolvida do começo em álgebra matricial, por meio de todas as etapas da análise. A estrutura é primeiro idealizada em um conjunto de elementos estruturais discretos com forma assumida de deslocamento ou distribuição de tensões, e a solução completa é então obtida combinando esses deslocamentos aproximados individuais ou distribuições de tensões de uma maneira que satisfaça o equilíbrio de forças e o deslocamento. compatibilidade nas junções desses elementos. Os métodos baseados nesta abordagem parecem ser adequados para a análise de estruturas complexas.

Esses métodos envolvem o uso da álgebra matricial, que é um método conveniente para definir os vários processos envolvidos na análise sem a necessidade de escrever equações por completo. Além disso, a formulação da análise em álgebra matricial é ideal para solução posterior no computador e também permite uma compilação fácil e sistemática dos dados necessários.

Dois métodos matriciais complementares de formulação de qualquer problema estrutural são possíveis: o método dos deslocamentos (método da rigidez), onde os deslocamentos são escolhidos como incógnitas, e o método das forças (método da flexibilidade), onde as forças são desconhecidas. Em ambos os métodos, a análise pode ser pensada como uma combinação sistemática de elementos estruturais individuais desmontados numa estrutura montada na qual as condições de equilíbrio e compatibilidade são satisfatórias.

### **2.3 Método da Rigidez**

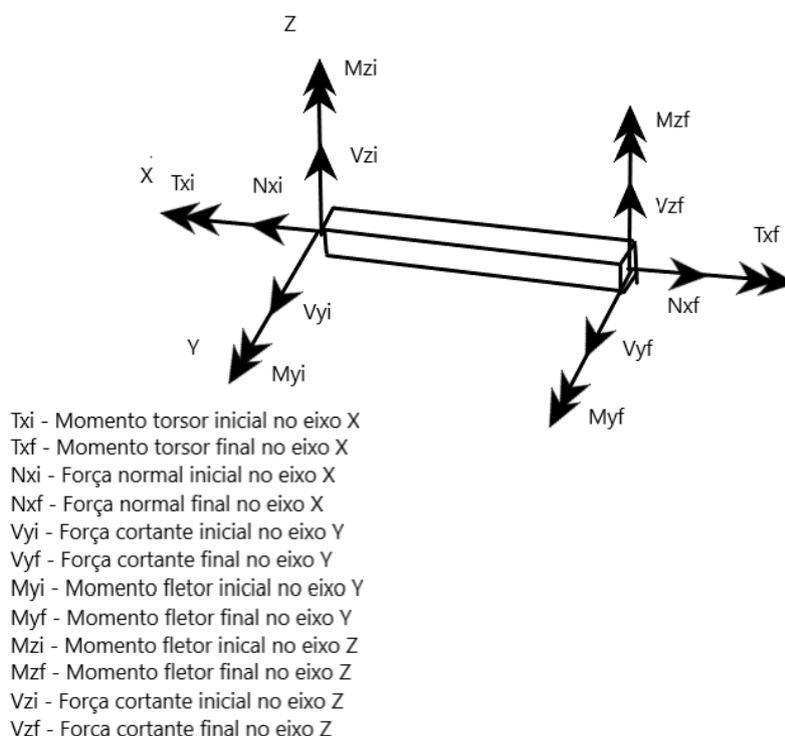
Apesar de haver outros métodos para a resolução de análises matriciais utilizando a implementação computacional, o método da Rigidez é o mais utilizado devido sua capacidade de aplicação de métodos numéricos para resolução.

O método da rigidez se utiliza da superposição de deslocamentos aplicados às condições de contorno que garantem o equilíbrio da estrutura. Assim, a análise estrutural na situação estática apresenta-se como um problema de contorno que deve satisfazer o equilíbrio da estrutura analisada (MARTHA, 2017).

A aplicação desse método exige que a estrutura seja dividida em partes, segundo Hibbler “a aplicação do método da rigidez exige subdividir a estrutura em uma série de elementos finitos

discretos e identificar seus pontos extremos como nós”. Em cada elemento temos nós iniciais e nós finais e cada nó possui 6 graus de liberdade, como demonstra a imagem abaixo:

**Figura 2** – Elemento tridimensional e Graus de Liberdade.



**Fonte:** Autor

Como exemplo desse método, pega-se uma barra, como na imagem acima, onde temos seis graus de liberdade ou deslocamentos nodais (□) que podem ser relacionados aos esforços nodais externos (□) por meio de sua matriz de rigidez (□), assim obtém-se a seguinte equação:

$$(f) = [k] \cdot (u) \quad \text{Equação (2)}$$

Onde (k) é a matriz de rigidez cuja função é estabelecer a relação de compatibilidade entre forças e deslocamentos no elemento analisado. Como explicado anteriormente, no elemento tem-se 6 graus iniciais e 6 graus, então a matriz (k) é formada por 12 colunas e 12 linhas (12x12).

Já os esforços (f) refere-se ao movimento de translação no sentido e direção do deslocamento, haverá, então, uma força  $f_1$  correspondente ao esforço normal. Desse modo, por meio das definições de tensão em relação à força de deformação, e relação entre força normal com o deslocamento axial obtém-se a equação.

$$F_1 = \left(\frac{EA}{L}\right) \times u_1 \quad \text{Equação (3)}$$

Onde:

E = Módulo de elasticidade do material

A = Área da seção transversal do elemento

L = Comprimento.

Essa equação pode sofrer variações devido às forças nodais, no final tem-se a matriz 12x12 que representa os deslocamentos ocorridos no elemento.

**Figura 3** – Matriz de Rigidez para elemento de Pórtico Tridimensional.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Fonte: Gere e Weaver Junior (1987)

Para as reações de apoio e esforços solicitantes, por exemplo, deve-se atentar que não pode ser utilizado a condição de contorno no momento que for multiplicar as matrizes.

## 2.4 Matriz de Rotação

Na análise estrutural, a matriz de rotação é usada para transformar as propriedades locais de rigidez e massa de elementos estruturais para o sistema de coordenadas global. Essa matriz é obtida a partir da utilização de seus cossenos diretores, levando-se em consideração as coordenadas globais de seus nós inicial e final, de modo que, a transformação das soluções de

uma barra em um sistema tridimensional local para um global, ou seja, ela transforma coordenadas locais em globais, definida como:

**Figura 4** – Matriz de rotação resumida

$$R = \begin{bmatrix} R_{3x3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{3x3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{3x3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{3x3} \end{bmatrix}$$

**Fonte:** Autor

**Figura 5** – Matriz de rotação expandida

$$R = \begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R \end{bmatrix}$$

**Fonte:** Autor

O  $R_{3x3}$  é formado por uma matriz 3x3 com as coordenadas do eixo X, Y e Z da seguinte maneira:

$$R_{3x3} = \begin{bmatrix} C_x X & C_x Y & C_x Z \\ C_y X & C_y Y & C_y Z \\ C_z X & C_z Y & C_z Z \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação é composta por nove elementos, em que cada membro da matriz é obtido através dos cossenos diretores do eixo de coordenadas locais em relação ao eixo de coordenadas globais. A primeira linha da matriz representa os cossenos diretores do eixo x

local, e pode ser analisado usando as coordenadas globais das duas extremidades em que o membro é fixado, como pode ser observado nas equações:

$$C_x X = \text{Cos}\theta_x X = (Xf - Xi) / L$$

$$C_x Y = \text{Cos}\theta_x Y = (Yf - Yi) / L$$

$$C_x Z = \text{Cos}\theta_x Z = (Zf - Zi) / L$$

Onde, L é o comprimento da barra é pode ser descrito da seguinte maneira:

$$L = \sqrt{(Xf - Xi)^2 + (Yf - Yi)^2 + (Zf - Zi)^2} \text{ Equação (4)}$$

## 2.5 Implementação computacional

A tecnologia tem contribuído para melhores resoluções e com mais agilidade em diversos setores, inclusive na Engenharia Civil com novas plataformas, seja de cálculos, desenhos, elaborações de planilhas para orçamentos, planejamento de obras, reuniões entre outras, ea medida que ocorre o avanço tecnológico estes softwares estão cada vez mais sofisticados, tanto no mercado de trabalho, como no ensino nas universidades.

## 3. MATERIAIS E MÉTODOS

### 3.1 Linguagem Python

As linguagens de programação representam papel importante na eficácia e eficiência de um sistema de informação, uma vez que a escolha adequada destas possibilitará a implementação de projetos de maneira mais eficiente (SEBESTA, 2000). Entre as linguagens de programação preferidas pelos desenvolvedores web, encontram-se Perl, PHP e Python. Estudos prévios no Compute world têm eleitos Perl e PHP, enquanto Python está emergindo como uma poderosa alternativa às escolhas tradicionais (KAY, 2005). Estas linguagens baseadas na web proporcionam benefícios e alterações tanto operacionais quanto estratégicas na funcionalidade dos negócios.

De acordo com Manzano (2018), a linguagem de programação Python é voltada ao desenvolvimento de programas para as linhas de microcomputadores com processadores Intel/AMD, para os sistemas operacionais Linux e Windows, e com processador Intel no caso de computadores da família Macintosh com sistema operacional Mac. Tendo sido concebida inicialmente no final do ano de 1989, pelo cientista da computação Guido Van Rossum, A Intenção de Guido era desenvolver uma linguagem intermediária que fosse mais eficiente,

voltada para aplicações científicas, mas podendo ser utilizada para desenvolvimento de programas comerciais.

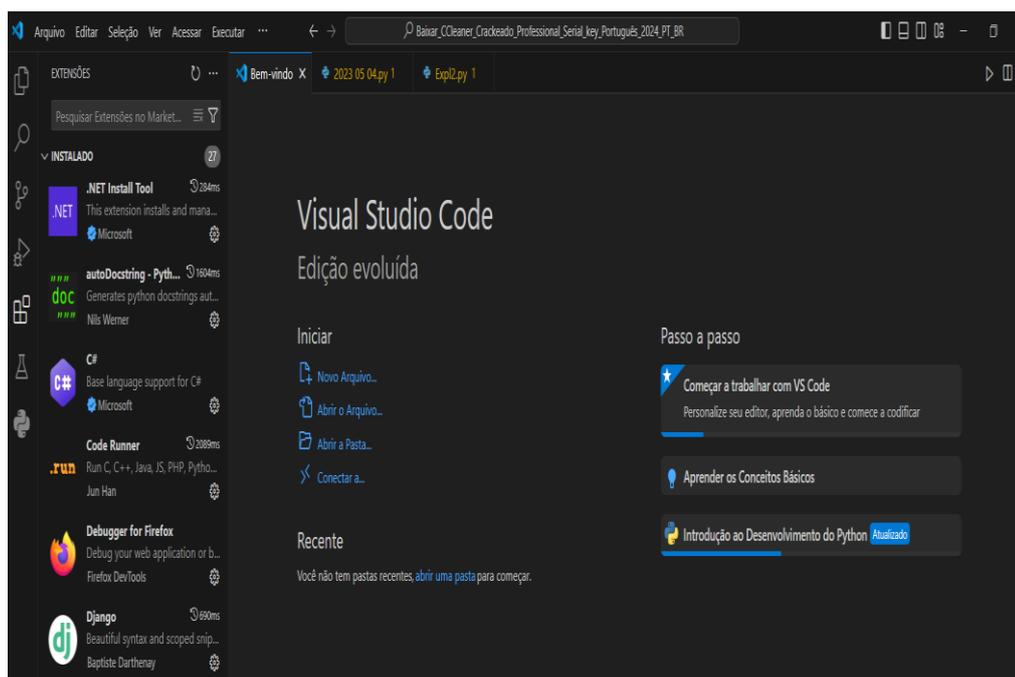
Python é uma linguagem voltada a projetos, facilitando o controle de estabilidade quando estes começam a tomar grandes proporções, porém Python possui uma versatilidade de aplicações.

### **3.2 Metodologia**

A fim de cumprir os objetivos propostos, o trabalho foi desenvolvido mediante emprego dos procedimentos metodológicos: em um primeiro momento foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a análise matricial de estruturas de pórticos tridimensionais e efeitos da temperatura nessas estruturas. Em uma segunda etapa realizou-se uma pesquisa no intuito de se compreender as transformações recíprocas entre coordenadas locais e coordenadas globais. Posteriormente adotou-se uma linguagem de programação para implementação computacional de um programa capaz de determinar deformações e esforços solicitantes de pórtico tridimensional.

Desenvolveu-se um algoritmo contendo todas as etapas para a elaboração da matriz de rigidez da estrutura, vetor de forças de temperatura, condições de contorno e pós-processamento. Na etapa seguinte utilizou-se uma linguagem computacional open source (código livre) Python na plataforma Visual Code. Sendo a linguagem mais eficaz para este projeto. E como última etapa, gerar um código para inserir nas operações matemáticas os valores de variação de temperatura e executar o programa para gerar os valores e conferir sua veracidade.

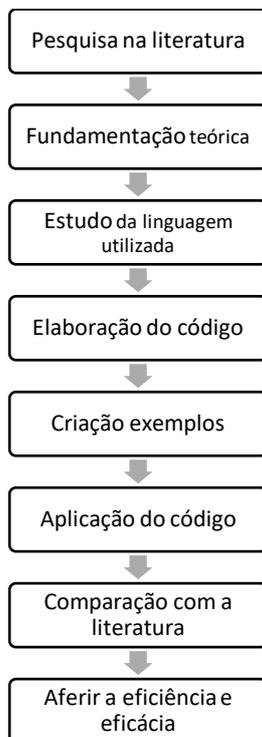
**Figura 6 – Visual Code**



**Fonte:** Autor.

O fluxograma abaixo demonstra todo processo realizado para a elaboração do código em Python.

Estrutura Metodológica adotada.



**Fonte:** Autor.

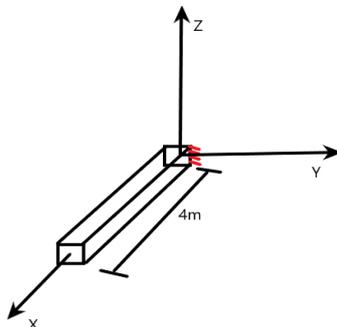
## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para demonstrar eficácia do código foram resolvidos cinco exemplos, com características diferentes focados no efeito que a temperatura causa na barra de aço.

### 4.1 Exemplo 1

Uma barra de aço está engastada em uma ponta e livre na outra. Essa barra está submetida a uma temperatura de 20 °C. Qual o deslocamento sofrido pela barra pelo efeito da temperatura?

**Figura 7** – Barra engastada.



Fonte: Autor

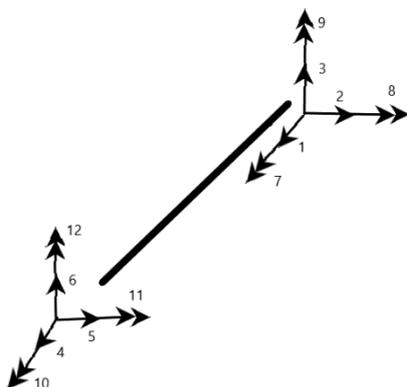
Comprimento(L): 4m

Módulo de Young (E):  $205 \times 10^6$

Área(A):  $0,01 \text{m}^2$

Coefficiente Térmico ( $\alpha$ ):  $12 \times 10^{-3}$

Para começar, deve-se lembrar uma barra possui graus de liberdade que serão influenciadas pelas ações na mesma. São no total 12 graus de liberdade, sendo 6 iniciais e 6 finais como demonstrado na figura abaixo:

**Figura 8** – Graus de liberdade da barra

Fonte: Autor

Tendo como base os 12 graus de liberdade, tem-se a matriz de rigidez, uma matriz constituída de 12 linhas e 12 colunas.

**Figura 9** – Matriz de rigidez

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
 \end{bmatrix}$$

Fonte: Kassimali, 2012.

Primeiro passo é descobrir a força causada para gerar a deformação na barra, no caso é a variação de temperatura, que causa a expansão da barra, que pode ser calculada da seguinte forma:

$$\delta = \delta_{\Delta T}$$

$$\frac{F \times L}{E \times A} = \alpha \times \Delta T \times L$$

$$F = \alpha \times \Delta T \times E \times A$$

$$F = (12 \times 10^{-3}) \times 20 \times (205 \times 10^6) \times 0,1$$

$$F = 492 \text{ kN}$$

Com a força calculada, desenvolve-se a matriz para a solução do deslocamento utilizando a equação abaixo:

$$K \times \{d\} = \{F\} \text{ Equação (5)}$$

Onde:

F = Força

K = Matriz de Rigidez

d = Deslocamento

Na matriz de rigidez, deve-se atentar que 6 graus de liberdade estão engastados; por isso, devem ser removidos da matriz, tornando-a em uma matriz de 6x6, então tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \\ d5 \\ d6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \\ F5 \\ F6 \end{bmatrix}$$

Após montar a equação, substituirá os valores na força e no deslocamento:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 492 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deve-se realizar a multiplicação da matriz de rigidez com a matriz de deslocamento, obtém-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \cdot d1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 492 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, iguala-se a força com o deslocamento:

$$492 = \frac{EA}{L} \times d1$$

$$d1 = \frac{492 \times 4}{0,001 \times 205 \times 10^6}$$

$$d1 = 0,096\text{m}$$

Como observado, a barra deslocou 0,096m no sentido do eixo X. Com esse valor, basta utilizar o programa para comparar os valores, o resultado do programa coincidiu com os obtidos anteriormente, como se observa na imagem abaixo

**Figura 10** – Resultado exemplo 1

```

Vetor de deslocamentos (u):
[ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.096 -0.  0.  0.
 -0.  0.  ]

Vetor de deslocamentos por elemento (Ulocais):
[[ 0. ]
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [ 0.096 ]
 [-0. ]
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [-0. ]
 [ 0. ] ]
Inicial
Final

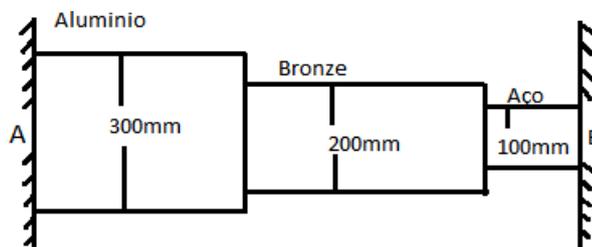
```

Fonte: Autor

Como se pode observar na imagem acima, os resultados coincidiram, o valor de 0 no vetor inicial demonstra que essa parte está engastada, por isso só possui valor no X final aonde a estrutura está livre é positivo, pois o sinal está de acordo com a orientação do eixo.

#### 4.2 Exemplo 2

Um grupo de materiais composto de alumínio, bronze e aço, estão ajustados entre os apoios fixos com a temperatura de 40 °C. Determine o comprimento expandido gerado nos engastes

**Figura 11** – Grupo de materiais.

Fonte: Autor

Dados:

Temperatura (T)=40 °C;  $\alpha_1 = 23 \cdot (10^{-6})$  1/°C;  $E_1 = 73.1$  GPa

Comprimento alumínio ( $L_1$ )= 1.2m;  $d_1 = 300$ mm;  $\alpha_1 = 23 \cdot (10^{-6})$  1/°C;  $E_1 = 73.1$  GPa

Comprimento Bronze ( $L_2$ )= 1.8m;  $d_2 = 200$ mm;  $\alpha_2 = 17 \cdot (10^{-6})$  1/°C;  $E_2 = 103$  GPa

Comprimento aço ( $L_3$ )= 0.9m;  $d_3 = 100$ mm;  $\alpha_3 = 1 \cdot (10^{-4})$  1/°C;  $E_3 = 193$  GPa

$$A = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot d^2 \quad \text{Equação (4)}$$

Deve-se começar transformando o esforço gerado pela deformação dos elementos em apenas duas forças, como mostra na figura abaixo:

**Figura 12** – Esquema de forças do grupo de materiais.



**Fonte:** Autor

Assim, tem-se a seguinte equação de equilíbrio de forças:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_a - F_b = 0 \Rightarrow F_a = F_b \quad \text{Equação (6)}$$

Apesar do elemento estar engastado, a obtenção do comprimento expandido é necessária para identificar qual a força que os engastes teriam que exercer para resistir a essa expansão

$$\delta_T = a_1 \cdot (\Delta T) \cdot L_1 + a_2 \cdot (\Delta T) \cdot L_2 + a_3 \cdot (\Delta T) \cdot L_3$$

$$\delta_T = 23 \cdot 10^{-6} \cdot (20) \cdot 1,2 + 17 \cdot 10^{-6} \cdot (20) \cdot 1,8 + 17 \cdot 10^{-6} \cdot (20) \cdot 0,9$$

$$\delta_T = 1,47mm$$

O resultado em módulo serve tanto para o engaste inicial quanto para o final, pois estão sobre a mesma temperatura e os materiais estão juntos. Assim, utilizando o programa para resolver, obtém-se o seguinte resultado.

```

Reacoes  :
[-1.45702488
  0.
  0.
  0.
  0.      Início
  0.

 1.45702488
  0.
  0.
  0.      Fim
  0.
  0.      ]

```

O resultado do programa foi um pouco diferente, podendo estar relacionado com a aproximação dos valores nas contas. O primeiro resultado sendo no primeiro nó está negativo por estar ao contrário da convenção, aonde o positivo seria para a direita, ou seja, ele estaria em direção oposta a FA, enquanto o segundo nó estaria para sentido à direita e oposto a FB

**Tabela 1** - Resultados do Exemplo II.

Comprimento	Resultados de Literatura	Resultados do Programa	E(%)
X	1.4700	1.4570	1.38

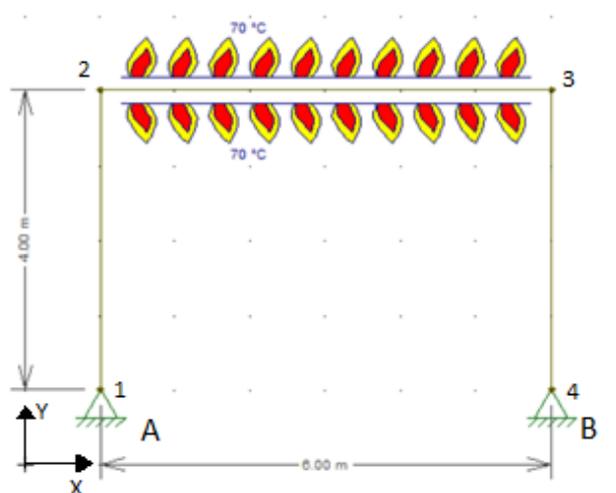
Fonte: Autor.

A tabela acima, apesar de ter uma margem de erro pequena provinda de arredondamentos, comprova a eficiência e eficácia do programa, atingindo o objetivo principal desse trabalho.

### 4.3 Exemplo 3

Como terceiro exemplo, calculou o deslocamento horizontal do ponto B devido à variação de temperatura. Sua estrutura possui um material que tem o coeficiente térmico de  $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$  e suas barras possuem secção retangular de  $0.5\text{m}^2$ .

**Figura 13** – Pórtico bidimensional aquecido



Fonte: Autor.

Para calcular a expansão devido à variação de temperatura, utilizamos a seguinte fórmula:

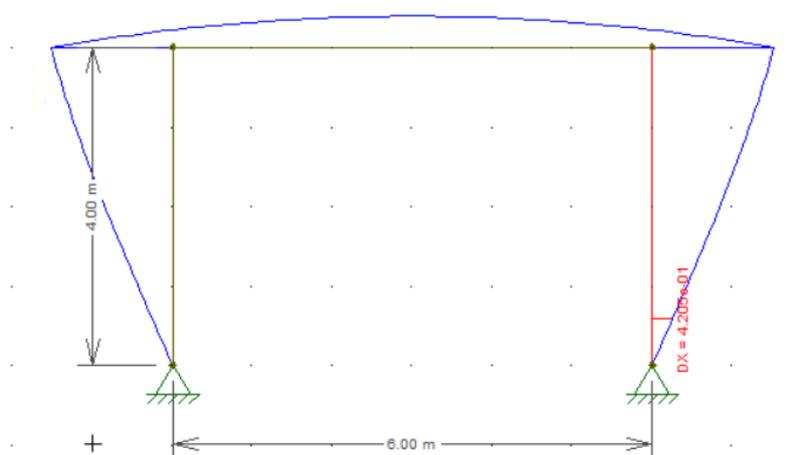
$$\delta = \alpha \times tg \times AN$$

$$\delta = 10^{-5} \times (70) \times (6 \times 1)$$

$$\delta = 0.0042\text{m}$$

$\delta = 0,0042\text{m}$ , ou seja, como o valor foi positivo, pela orientação determinada o ponto B deslocou 4,2 cm para direita.

**Figura 14** – Deslocamentos devido à Variação Temperatura (Ftool).



Fonte: Autor

Com a execução do código, obtive o deslocamento gerado pelo aquecimento da viga da estrutura, ou elemento 2, gerando os seguintes valores:

Vetor de deslocamentos (u):

```

[-4.20000000e-03 X1
 0.00000000e+00 Y1
 0.00000000e+00 Z1
-8.90000000e-03 X2
 1.29073982e-17 Y2
 0.00000000e+00 Z2
 8.90000000e-03 X3
 1.29073982e-17 Y3
 0.00000000e+00 Z3
 4.20000000e-03 X4
-0.00000000e+00 Y4
-0.00000000e+00 Z4

```

Como observado nos resultados, os valores negativos se referem a orientação, contrario no caso adotada. O valor obtido em X no ponto B que é o objetivo do exemplo coincidiu com o obtido na literatura retirada no livro Análise estrutural do Kassimali, gerando a tabela abaixo.

**Tabela 2** - Resultados do Exemplo III.

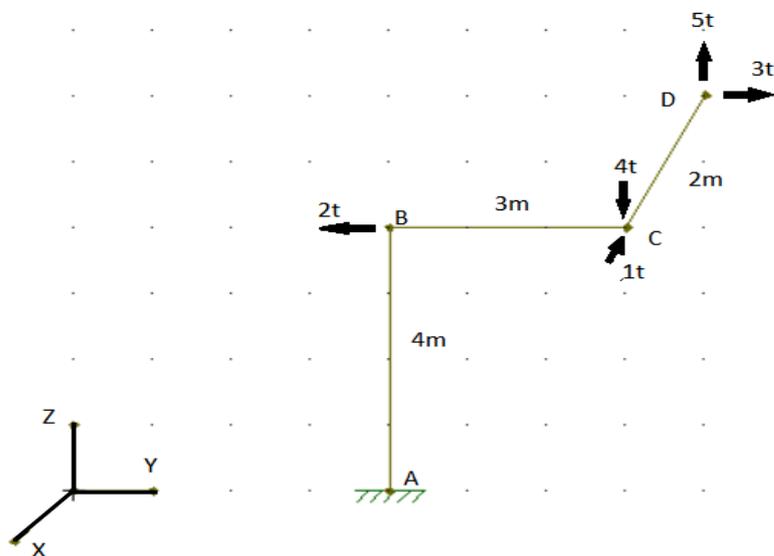
<b>Graus de liberdade</b>	<b>Resultados de Literatura</b>	<b>Resultados do Programa</b>	<b>E(%)</b>
$\delta$ (m)	0,0042m	0,0042m	0

**Fonte:** Autor.

#### 4.4 Exemplo 4

Calcular as reações de apoio no engaste A da estrutura tridimensional, cujo ângulo entre as barras é de 90°. Apesar do exemplo não conter a variação de temperatura, o mesmo foi utilizado para demonstrar que o programa consegue calcular momentos e forças na estrutura.

Figura 15 – Pórtico tridimensional.



Fonte: Autor

Temos as seguintes forças atuando:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \Rightarrow X_A = 1t \\ \sum Y &= 0 \Rightarrow Y_A = -1t \\ \sum Z &= 0 \Rightarrow Z_A = -1t\end{aligned}$$

Momento em X:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_{Xa} + 2 \times 4 - 4 \times 3 + 5 \times 3 - 3 \times 4 = 0 \Rightarrow M_{Xa} = 1m$$

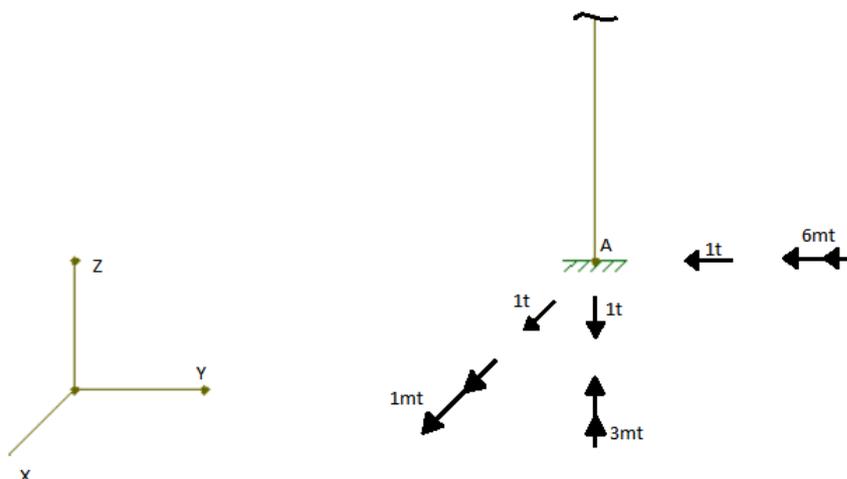
Momento em Y:

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{Ya} - 1 \times 4 + 5 \times 2 = 0 \Rightarrow M_{Ya} = -6m$$

Momento em Z:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_{Za} + 1 \times 3 - 3 \times 2 = 0 \Rightarrow M_{Za} = 3m$$

Com isso tem-se a seguinte configuração:

**Figura 16** – Forças no ponto A

Fonte: Autor.

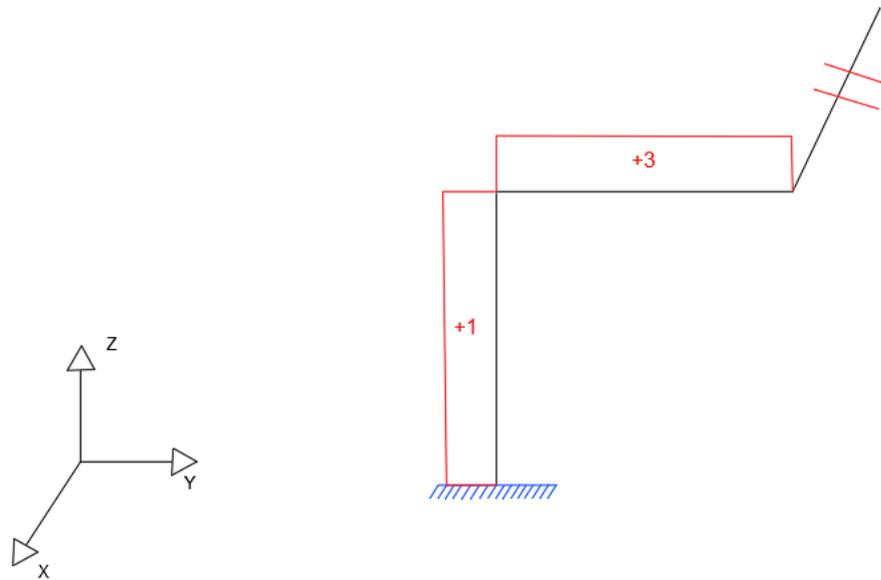
**Tabela 3** - Resultados das forças no ponto A.

Graus de liberdade	Resultados de Literatura	Resultados do Programa	E(%)
$M_{XA}$ (mt)	1.00	-1.000	0
$\sum M_{YA}$ (mt)	-6.00	6.000	0
$M_{ZA}$ (mt)	3.00	-3.000	0

Fonte: Autor.

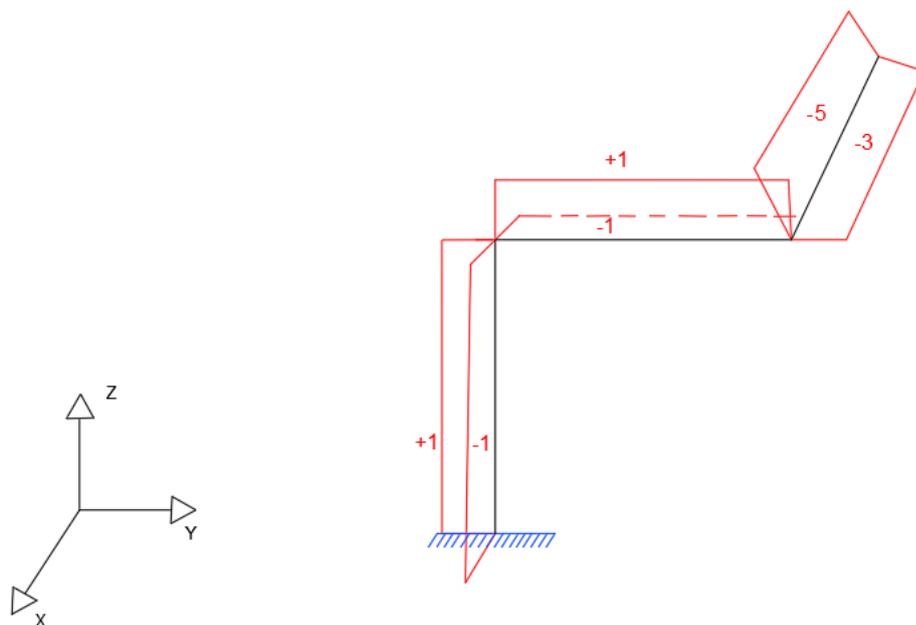
Apesar dos resultados obtidos terem sinais opostos aos obtidos na literatura, em módulo possuem o mesmo valor, isso ocorre, pois a orientação de sinais da literatura é diferente do adotado pelo programa, ou seja, se na literatura o momento em sentido horário é positivo no programa é negativo, com os resultados para fins educativos tem-se os diagramas de força normal, cortante, momento fletor, o mais importante para o exemplo e momento torsor, pois é o objetivo do exemplo, segundo as figuras abaixo:

**Figura 17 – Diagrama Normal**



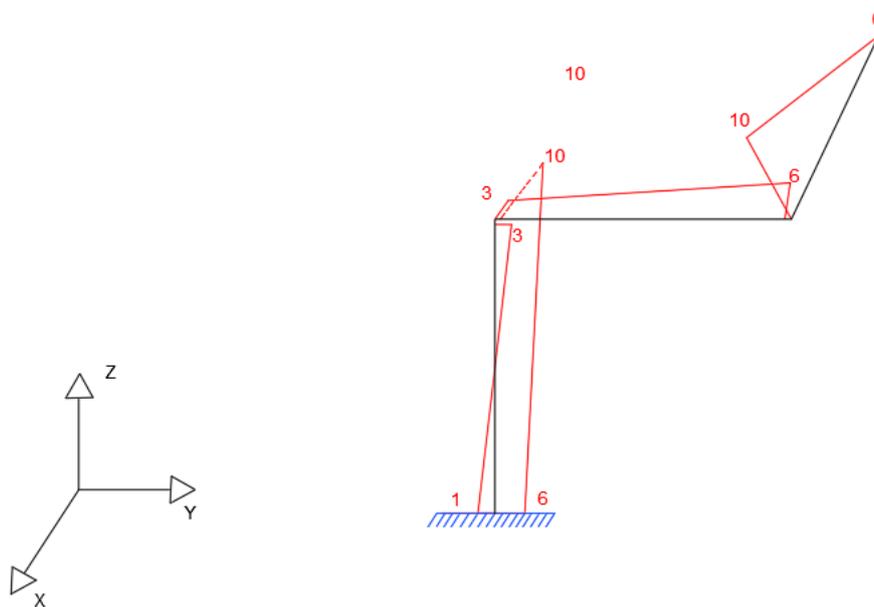
Fonte: Autor

**Figura 18 – Diagrama Cortante**



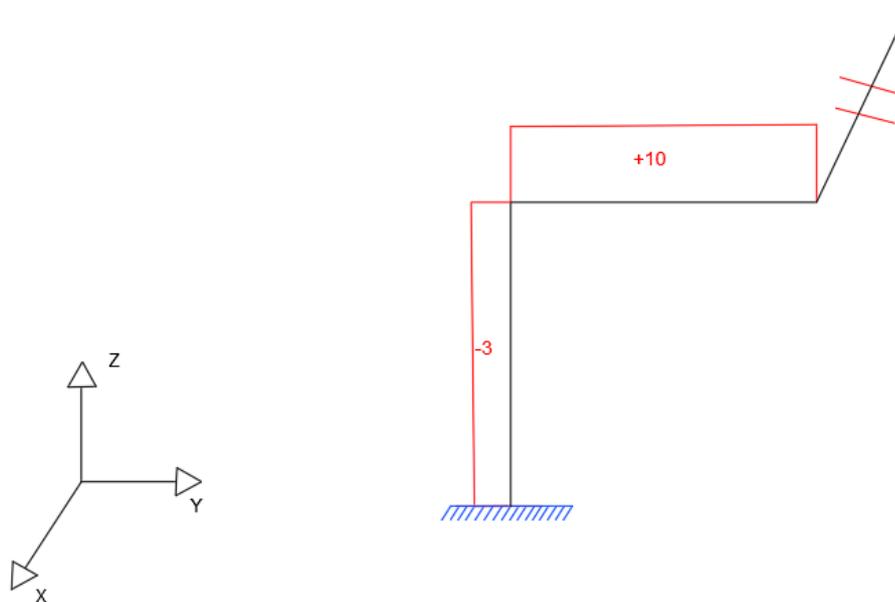
Fonte: Autor

**Figura 19** – Diagrama de Momento Fletor



Fonte: Autor

**Figura 20** – Diagrama de Momento Torsor

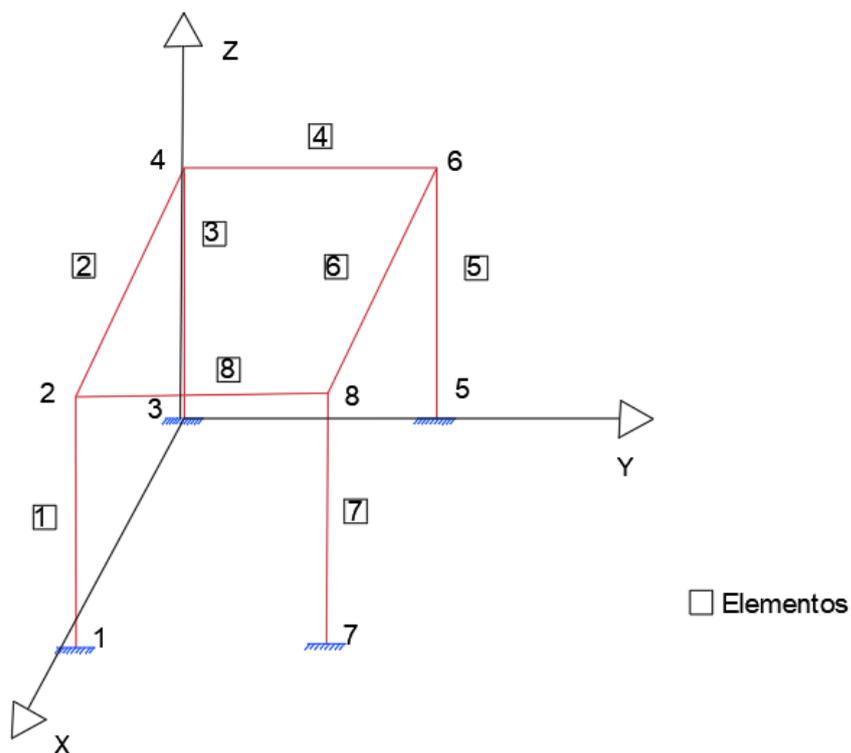


Fonte: Autor

### 4.5 Exemplo 5

A parte superior de um pórtico em formato de “mesa”, foi aquecido à 20 °C, as barras possuem a mesma medida e material metálico. Determinar o deslocamento gerado por esse aumento de temperatura.

**Figura 21** – Pórtico tridimensional (2)



Fonte: Autor

A tabela abaixo contém informações necessárias para a execução do exemplo no programa

**Tabela 4 – Informações do Pórtico**

Propriedade	Valor	Unidade
Comprimento (L)	4	m
Young (E)	100	MPa
Poisson ( $\nu$ )	0,25	-
Iy	5000000	mm <sup>4</sup>
Iz	5000000	mm <sup>4</sup>
Temperatura	20	°C
Área(A)	5000	mm <sup>2</sup>

Fonte: Autor

Esse exemplo será solucionado utilizando somente o programa por dois motivos: o primeiro devido à complexidade do mesmo, fazê-lo de outra forma seria extremamente complicado e estaria desviando da proposta do trabalho; segundo, com base nos exemplos anteriores, o programa está cumprindo seu objetivo.

Em primeiro lugar, deve-se inserir os dados correspondentes ao exemplo e em seguida executar o mesmo, segue abaixo a imagem.

**Figura 22 – Entrada de dados**

```

8 # Entrada de dados
9 elemento = 'Portico3D'
10 Nele = 8
11 Nnos = 8
12 Nvinc = 24
13 Nf = 0
14 Nm = 0
15 Nenc = 4
16 Ntg = 0
17
18 Vele = numpy.zeros((Nele)) # cria um vetor/lista nulo de tamanho Nele
19 Vele = [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ] # ordem crescente sempre!
20
21 noi = numpy.zeros((Nele))
22 nof = numpy.zeros((Nele))
23 noi = [ 1, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 2 ]
24 nof = [ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7 ]
25
26 Young = numpy.zeros((Nele))
27 poison = numpy.zeros((Nele))
28 Young = [ 100.0, 100.0, 100.0, 100.0, 100.0, 100.0, 100.0, 100.0 ]
29 poison = [ 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25 ]
30 alfa = [ 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001 ]
31
32 A = numpy.zeros((Nele))
33 Iy = numpy.zeros((Nele))
34 Iz = numpy.zeros((Nele))
35 A = [ 50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0 ]
36 Iy = [ 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0 ]
37 Iz = [ 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0 ] # 800.0, 800.0, 800.0, 800.0, 800.0, 800.0, 800.0, 800.0
38 # Entrada do ângulo em graus
39 Irot_deg = [ 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 ]
40

```

Fonte: Auto

O primeiro resultado que se tem são as reações de apoio nos nós 1, 3, 5 e 7, pois são os que sustentam a estrutura como demonstrado na figura do exemplo. O que se percebe é que como a temperatura não está sendo aplicada nos elementos pertencentes nesses nós que estão engastados, os valores são muito baixos ou praticamente zero

**Tabela 5** – Reações de Apoio

Apoio	Valor
X 1	-3.74999297e-05
Y 1	3.74999297e-05
Z 1	-8.94412719e-16
θX 1	-9.99998125e-02
θY 1	-9.99998125e-02
θZ 1	-3.52881146e-13
X 3	3.74999297e-05
Y 3	3.74999297e-05
Z 3	7.82438643e-16
θX 3	-9.99998125e-02
θY 3	9.99998125e-02
θZ 3	-3.52875069e-13
X 5	3.74999297e-05
Y 5	-3.74999297e-05
Z 5	1.81273174e-15
θX 5	9.99998125e-02
θY 5	9.99998125e-02
θZ 5	-3.52883895e-13
X 7	-3.74999297e-05
Y 7	-3.74999297e-05
Z 7	-1.70072178e-15
θX 7	9.99998125e-02
θY 7	-9.99998125e-02
θZ 7	-3.52881830e-13

Fonte: Autor

O segundo resultado que se obtém, são os esforços solicitantes. Note que na tabela 6 estão descritos os resultados dos graus de liberdade dos nós iniciais e finais referentes aos oito elementos. , pode-se notar que nos nós em que os elementos não possuem o aquecimento, ou seja, os que estão engastados citados na tabela acima, o valor é basicamente zero como observado na tabela abaixo

**Tabela 6 – Esforços Solicitantes**

		ELEMENTOS							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Graus de liberdade	E								
	Xi	- 8.94412719e- 16	- 1.99999625e+01	7.82438643e- 16	- 1.99999625e+01	1.81273174e- 15	- 1.99999625e+01	- 1.70072178e- 15	- 1.99999625e+01
	Yi	3.74999297e- 05	-7.99524165e- 16	- 3.74999297e- 05	-9.75962316e- 16	3.74999297e- 05	7.99509738e-16	3.74999297e- 05	-9.75966187e- 16
	Zi	3.74999297e- 05	7.02928926e-16	- 3.74999297e- 05	7.94923480e-17	- 3.74999297e- 05	1.89219029e-15	3.74999297e- 05	-1.91476880e- 16
	θXi	- 3.52881146e- 13	7.22581717e-14	- 3.52875069e- 13	3.17142146e-13	- 3.52883895e- 13	7.22442939e-14	- 3.52881830e- 13	3.17138676e-13
	θYi	- 9.99998125e- 02	4.99999062e-02	4.99999063e- 02	-4.99999063e- 02	4.99999063e- 02	-4.99999063e- 02	- 4.99999062e- 02	-4.99999062e- 02
	θZi	9.99998125e- 02	-1.59905868e- 12	- 4.99999063e- 02	-1.95193984e- 12	4.99999062e- 02	1.59902007e-12	4.99999063e- 02	-1.95194501e- 12
	Xf	8.94412719e- 16	1.99999625e+01	- 7.82438643e- 16	1.99999625e+01	- 1.81273174e- 15	1.99999625e+01	1.70072178e- 15	1.99999625e+01

Yf	- 3.74999297e- 05	7.99524165e-16	3.74999297e- 05	9.75962316e-16	- 3.74999297e- 05	-7.99509738e- 16	- 3.74999297e- 05	9.75966187e-16
Zf	- 3.74999297e- 05	-7.02928926e- 16	3.74999297e- 05	-7.94923480e- 17	3.74999297e- 05	-1.89219029e- 15	- 3.74999297e- 05	1.91476880e-16
θXf	3.52881146e- 13	-7.22581717e- 14	3.52875069e- 13	-3.17142146e- 13	3.52883895e- 13	-7.22442939e- 14	3.52881830e- 13	-3.17138676e- 13
θYf	- 4.99999062e- 02	-4.99999063e- 02	9.99998125e- 02	4.99999063e-02	9.99998125e- 02	4.99999062e-02	- 9.99998125e- 02	4.99999063e-02
θZf	4.99999062e- 02	-1.59906314e- 12	- 9.99998125e- 02	-1.95191332e- 12	9.99998125e- 02	1.59901368e-12	9.99998125e- 02	-1.95192365e- 12

Fonte: Autor

O terceiro resultado e o mais importante que é o deslocamento causado pelo acréscimo de temperatura, vale ressaltar, que os que possuem zero, são onde os elementos estão restringidos pelos engaste. Percebe-se que alguns nós possuem o mesmo valor, porém com sinais invertidos, como exemplo o nó 2 e o nó 4, o que indica que expandem para sentidos opostos, lembrando que o fato que os sinais representam a direção em sentido a favor ou contrario à orientação adotada no exemplo. Os demais valores que são muito baixos serão desconsiderados, devido às dimensões do objeto como demonstrado na tabela abaixo.

**Tabela 7 - Deslocamentos**

Nós	Valor (cm)
<b>1 uX</b>	<b>0</b>
<b>1 uY</b>	<b>0</b>
<b>1 uZ</b>	<b>0</b>
<b>1 θx</b>	<b>0</b>
<b>1 θy</b>	<b>0</b>
<b>1 θz</b>	<b>0</b>
<b>2 uX</b>	<b>7.99998500e+00</b>
<b>2 uY</b>	<b>-7.99998500e+00</b>

<b>2 uZ</b>	<b>7.15530175e-16</b>
<b>2 <math>\theta_x</math></b>	<b>1.99999625e-03</b>
<b>2 <math>\theta_y</math></b>	<b>1.99999625e-03</b>
<b>2 <math>\theta_z</math></b>	<b>3.52881146e-14</b>
<b>3 uX</b>	<b>0</b>
<b>3 uY</b>	<b>0</b>
<b>3 uZ</b>	<b>0</b>
<b>3 <math>\theta_x</math></b>	<b>0</b>
<b>3 <math>\theta_y</math></b>	<b>0</b>
<b>3 <math>\theta_z</math></b>	<b>0</b>
<b>4 uX</b>	<b>-7.99998500e+00</b>
<b>4 uY</b>	<b>-7.99998500e+00</b>
<b>4 uZ</b>	<b>-6.25950914e-16</b>
<b>4 <math>\theta_x</math></b>	<b>1.99999625e-03</b>
<b>4 <math>\theta_y</math></b>	<b>-1.99999625e-03</b>
<b>4 <math>\theta_z</math></b>	<b>3.52875069e-14</b>
<b>5 uX</b>	<b>0</b>
<b>5 uY</b>	<b>0</b>
<b>5 uZ</b>	<b>0</b>
<b>5 <math>\theta_x</math></b>	<b>0</b>
<b>5 <math>\theta_y</math></b>	<b>0</b>
<b>5 <math>\theta_z</math></b>	<b>0</b>
<b>6 uX</b>	<b>-7.99998500e+00</b>
<b>6 uY</b>	<b>7.99998500e+00</b>
<b>6 uZ</b>	<b>-1.45018539e-15</b>
<b>6 <math>\theta_x</math></b>	<b>-1.99999625e-03</b>
<b>6 <math>\theta_y</math></b>	<b>-1.99999625e-03</b>
<b>6 <math>\theta_z</math></b>	<b>3.52883895e-14</b>
<b>7 uX</b>	<b>0</b>
<b>7 uY</b>	<b>0</b>
<b>7 uZ</b>	<b>0</b>

<b>7 <math>\theta_x</math></b>	<b>0</b>
<b>7 <math>\theta_y</math></b>	<b>0</b>
<b>7 <math>\theta_z</math></b>	<b>0</b>
<b>8 uX</b>	<b>7.99998500e+00</b>
<b>8 uY</b>	<b>7.99998500e+00</b>
<b>8 uZ</b>	<b>1.36057742e-15</b>
<b>8 <math>\theta_x</math></b>	<b>-1.99999625e-03</b>
<b>8 <math>\theta_y</math></b>	<b>1.99999625e-03</b>
<b>8 <math>\theta_z</math></b>	<b>3.52881830e-14</b>

Fonte: Autor

Em resumo os elementos 2, 4, 6 e 8 expandem em X e Y aproximadamente 8 cm conforme a orientação dos sinais. Para comprovar esse valor de maneira simples basta utilizar a fórmula da dilatação térmica, da seguinte maneira:

$$\delta_{\Delta T} = \alpha \times \Delta T \times L$$

$$\delta_{\Delta T} = 0.001 \times 20 \times 4$$

$$\delta_{\Delta T} = 0.08 \text{ m ou } 8 \text{ cm}$$

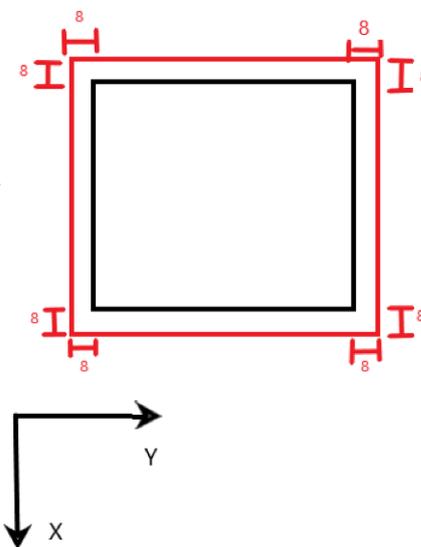
Esse resultado serve em módulo para os nós 2, 4, 6 e 8 visto que possuem as mesmas qualidades diferenciando somente na orientação explicada na tabela 7. Assim tem-se a seguinte tabela:

**Tabela 8 - Resultados exemplo 5**

Deformação Térmica	Literatura	Programa	E(%)
$\delta_{\Delta T}$	8.000 cm	7.999cm	0.013%

O resultado do programa apresentou uma variação de 0.013% em relação ao executado de forma manual ,o que se deve ao menor número de casas decimais utilizado nos cálculos realizados pelo valor de referência. Tem-se na figura abaixo a representação do efeito gerado pela temperatura na parte superior da estrutura

**Figura 23** – Visão superior do pórtico



**Fonte:** Autor

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados apresentados, pode-se concluir-se que o programa desenvolvido é eficaz para a análise de pórticos espaciais considerando-se a variação uniforme de temperatura determinada estrutura, com uma margem de erro insignificante

A utilização de software para resolução de cálculos em qualquer área de estudo é essencial para reduzir o tempo gasto na sua execução e confiabilidade, nesse sentido a linguagem Python, demonstrou eficiência na análise de pórticos tridimensionais com influência de temperatura uniforme pelo método da rigidez, podendo o pórtico ser uniforme ou não conforme os resultados obtidos e embasados na literatura.

A linguagem Python, proporciona maior conhecimento e aplicabilidade no uso de linguagens computacionais, podendo ser uma ferramenta educacional no processo de ensino e aprendizagem para acadêmicos do Curso de Engenharia Civil, além de possibilitar a expansão para outros temas como estruturas não simétricas, variações de temperatura não uniforme.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZKUNE, M. PUENTE, I. INSAUSTI, A. Effect of ambient temperature on the redistribution of loads during construction of multi-storey concrete structures. *Engineering Structures*. Science Direct. San Sebastian: Elsevier, 2007.

HIBBELER, R. C. Resistência dos Materiais. 10ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2019.

KASSIMALI, ASLAM. Matrix Analysis of Structures, 2ed. Stamford, 2012

KASSIMALI, Aslam. Análise Estrutural. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 820 p. Tradução de: Noveritis do Brasil; Revisão técnica de: Luiz Antônio Vieira Carneiro.

KIMURA, Alio. Informática aplicada a estruturas de concreto armado. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2018. 428 p.

MARTHA, Luiz Fernando. Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017. 569 p.

MCGUIRE, WILLIAM; GALLAGHER, RICHARD H.; E ZIEMIAN, RONALD D., "Análise Estrutural de Matriz, 2ª Edição" (2000). *Livros da Faculdade*. 7. <https://digitalcommons.bucknell.edu/books/7>

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor. Vol. 2. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora Edgard Blucher, 2014. 375 p. 4 v.

PRAVIA, ZACARIAS MARTIN CHAMBERLAIN, EDUARDO PASQUETTI, AND JULIANA ANA CHIARELLO. "Visualbarras: um software didático para o ensino de análise matricial de estruturas reticuladas planas." *XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Vol. 10. 2001.

PRZEMIENICKI, J.S. Theory of Structural Analysis. United States Of America: McGraw-Hill, 1968. 481 p.

SANTOS, M. R. G.. Deterioração das **estruturas de concreto armado** – estudo de caso. 2012. 122f. Monografia (Curso de Especialização em Construção Civil) Universidade Federal de

Minas Gerais, Minas Gerais, 2012. Disponível em:  
<<http://pos.demc.ufmg.br/novocecc/trabalhos/pg2/88.pdf>>. Acesso em: 07 nov. 2016.