



BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

COLORAÇÃO TOTAL NOS GRAFOS DE CAYLEY $H_{l,p}$

THAYNARA DOS SANTOS TEIXEIRA

Rio Verde, GO

2023



INSTITUTO FEDERAL GOIANO - CAMPUS RIO VERDE
BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

COLORAÇÃO TOTAL NOS GRAFOS DE CAYLEY $H_{l,p}$

THAYNARA DOS SANTOS TEIXEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal Goiano - Campus Rio Verde, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. André Da Cunha Ribeiro

Rio Verde, GO

Julho, 2023

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano

T266c Teixeira, Thaynara dos Santos
 Coloração Total nos Grafos de Cayley H₁,p /
 Thaynara dos Santos Teixeira; orientador André da
 Cunha Ribeiro. -- Rio Verde, 2023.
 26 p.

 TCC (Graduação em Bacharelado em Ciência da
 Computação) -- Instituto Federal Goiano, Campus Rio
 Verde, 2023.

 1. Coloração. 2. Grafos de Cayley . 3. Grafo H₁,p.
 I. Ribeiro, André da Cunha , orient. II. Título.



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

Identificação da Produção Técnico-Científica (assinale com X)

- Tese
- Dissertação
- Monografia - Especialização
- Artigo - Especialização
- TCC - Graduação
- Artigo Científico
- Capítulo de Livro
- Livro
- Trabalho Apresentado em Evento
- Produção técnica. Qual: _____

Nome Completo do Autor: Thaynara dos Santos Teixeira

Matrícula: 2018102201940473

Título do Trabalho: Coloração Total nos Grafos de Cayley H_l,p

Restrições de Acesso ao Documento [Preenchimento obrigatório]

Documento confidencial: Não Sim, justifique:

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: 16/08/2023

O documento está sujeito a registro de patente? Sim Não

O documento pode vir a ser publicado como livro? Sim Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

1. O documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
2. Obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
3. Cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Cidade, 16 de agosto de 2023

Thaynara dos Santos Teixeira

Assinado eletronicamente pelo o Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Ciente e de acordo:

André da Cunha Ribeiro

Assinatura eletrônica do(a) orientador(a)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Thaynara dos Santos Teixeira**, 2018102201940473 - Discente, em 16/08/2023 22:29:55.
- **Andre da Cunha Ribeiro**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 16/08/2023 22:26:14.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 16/08/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 522382

Código de Autenticação: 1325816076



INSTITUTO FEDERAL GOIANO

Campus Rio Verde

Rodovia Sul Goiana, Km 01, Zona Rural, 01, Zona Rural, RIO VERDE / GO, CEP 75901-970

(64) 3624-1000



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Ata nº 19/2023 - GEPTNM-RV/DE-RV/CMPRV/IFGOIANO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO

Ao(s) 29 dia(s) do mês de junho de 2023, às 09 horas, reuniu-se a banca examinadora composta pelos docentes: Dr. André da Cunha Ribeiro (orientador), Dra. Diane Castonguay (membro), Dr. Marcio da Silva Vilela (membro), para examinar o Trabalho de Curso intitulado "COLORAÇÃO TOTAL NOS GRAFOS DE CAYLEY H_L,p" da estudante THAYNARA DOS SANTOS TEIXEIRA, Matrícula nº 2018102201940473 do Curso de Bacharel em Ciência da Computação do IF Goiano - Campus Rio Verde. A palavra foi concedida ao estudante para a apresentação oral do TC, houve arguição do candidato pelos membros da banca examinadora. Após tal etapa, a banca examinadora decidiu pela APROVAÇÃO da estudante. Ao final da sessão pública de defesa foi lavrada a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

(Assinado Eletronicamente)

André da Cunha Ribeiro

Orientador(a)

Documento assinado digitalmente



DIANE CASTONGUAY
Data: 29/06/2023 11:06:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dra. Diane Castonguay

Membro

Dr. Marcio da Silva Vilela

Marlus Dias Silva

Membro

Observação:

() O(a) estudante não compareceu à defesa do TC.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Marcio da Silva Vilela, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 29/06/2023 10:32:57.
- **Andre da Cunha Ribeiro, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 29/06/2023 10:30:06.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 29/06/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 509024

Código de Autenticação: a63ebc8dac



INSTITUTO FEDERAL GOIANO
Campus Rio Verde
Rodovia Sul Goiana, Km 01, Zona Rural, 01, Zona Rural, RIO VERDE / GO, CEP 75901-970
(64) 3624-1000

THAYNARA DOS SANTOS TEIXEIRA

COLORAÇÃO TOTAL NOS GRAFOS DE CAYLEY $H_{l,p}$

Trabalho de curso DEFENDIDO E APROVADO em 29 de Junho de 2023, pela Banca Examinadora constituída pelos membros:

Documento assinado digitalmente
 **DIANE CASTONGUAY**
Data: 29/06/2023 11:06:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente
 **MARCIO DA SILVA VILELA**
Data: 29/06/2023 10:55:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dra. Diane Castonguay
Universidade Federal de Goiás

Dr. Marcio da Silva Vilela
Instituto Federal Goiano

Documento assinado digitalmente
 **ANDRE DA CUNHA RIBEIRO**
Data: 29/06/2023 10:40:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. André da Cunha Ribeiro
Orientador

Rio Verde, GO

2023

Este trabalho é dedicado à minha família, que me deu todo o suporte e apoio para concluir essa longa jornada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, aos meus pais, que dedicaram suas vidas para cuidar e moldar quem sou, por sempre me apoiar e me incentivar nas minhas escolhas. A todos os professores que contribuíram de algum modo para o conhecimento adquirido ao longo da minha formação acadêmica e pelos seus ensinamentos. Em especial, ao professor André Da Cunha Ribeiro, por ter sido meu orientador, propondo desafios, orientando e colaborando com meu crescimento tanto profissional como pessoal com dedicação e amizade. Aos meus amigos que estiveram ao meu lado durante esta trajetória fazendo que não parasse no meio do processo.

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer (Albert Einstein).”

RESUMO

TEIXEIRA, Thaynara. **Coloração Total nos Grafos de Cayley $H_{l,p}$** . Julho, 2023. 26 f. Monografia – (Curso de Bacharel em Ciência da Computação), Instituto Federal Goiano - Campus Rio Verde. Rio Verde, GO.

Neste trabalho, apresentamos os limites e os conceitos básicos da coloração de vértices de arestas e total de um grafo. Logo em seguida, definimos o número total de vértices, arestas e grau de cada vértice dos grafos $H_{l,p}$, além, de seus limitantes inferiores e superiores de coloração, juntamente com métodos propriamente determinados ao longo do processo. Concluindo que, para a coloração de vértices utilizamos a ordenação do ciclo hamiltoniano e aplicação do método guloso tendo $l \leq \chi'(H_{l,p}) \leq l(l-1) + 1$, para coloração de arestas utilizamos o método de decomposição de emparelhamento tendo $\Delta \leq \chi'(H_{l,p}) \leq \Delta + 1$ e a total por meio de métodos diferentes sendo $\Delta + 1 \leq \chi''(H_{l,p}) \leq \Delta + 2$, entretanto, por meio do método de coloração de vértices conseguimos realizar a coloração total nos grafos $H_{l,p}$.

Palavras-chave: Coloração, grafos de cayley, grafo $H_{l,p}$.

ABSTRACT

TEIXEIRA, Thaynara. Total Coloring of Cayley Graphs $H_{l,p}$. Julho, 2023. 26 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Bacharel em Ciência da Computação, Instituto Federal Goiano - Campus Rio Verde. Rio Verde, GO, Julho, 2023.

In this work, we present the limits and the basic concepts of vertex colors of edges and total of a graph. Soon after, we define the total number of vertices, edges and degree of each vertex of the graphs $H_{l,p}$, in addition to their lower and upper color bounds, together with duly determined methods throughout the process. Concluding that, for vertex colors we use the ordering of the hamiltonian cycle and application of the greedy method having $l \leq \chi'(H_{l,p}) \leq l(l-1) + 1$, for colors of edges we use the matching configuration method having $\Delta \leq \chi'(H_{l,p}) \leq \Delta + 1$ and the total through different methods being $\Delta + 1 \leq \chi''(H_{l,p}) \leq \Delta + 2$, however, by means of the vertex color method participated in performing the total color in the graphs $H_{l,p}$.

Keywords: Coloring, Cayley graphs, graph $H_{l,p}$.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pontes de Königsberg.	2
Figura 2 – Representação Geométrica do Grafo.	3
Figura 3 – Representação de um Grafo Caminho.	4
Figura 4 – Representação de um Grafo Ciclo.	4
Figura 5 – Representação de um Grafo Conexo e Desconexo.	5
Figura 6 – Representação de um Grafo Planar e não Planar.	5
Figura 7 – Representação de um Grafo Bipartido.	6
Figura 8 – Representação do Grafo Clique.	6
Figura 9 – Representação dos Grafos Completos.	8
Figura 10 – Representação de um Grafo Hipercubo.	10
Figura 11 – Representação de um Grafo de Cayley.	10
Figura 12 – Representação de Coloração de Grafo.	12
Figura 13 – Representação 3-coloração de vértices própria.	13
Figura 14 – Representação de um Grafo Touro grau máximo 3.	14
Figura 15 – Representação do Grafo Classe 1 e Classe 2.	14
Figura 16 – Representação de um Grafo Cubo, $X''(G) = 4$	15
Figura 17 – Representação da Coloração de Vértices Grafos Completos.	16
Figura 18 – Representação da Coloração de Arestas Grafos Completos.	17
Figura 19 – Representação da Coloração Total Grafos Completos.	18
Figura 20 – Representação dos Grafos $H_{l,p}$	19
Figura 21 – Coloração de Vértices no Grafo $H_{l,p}$	20
Figura 22 – Coloração de Arestas no Grafo $H_{l,p}$	21
Figura 23 – Coloração Total no Grafo $H_{l,p}$	22

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Coloração - Gulosa (G, K)	13
Algoritmo 2 – Coloração de Arestas	21

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
2 – REVISÃO DE LITERATURA	2
2.1 Tipos de Classes de Grafos	4
2.2 Grafos Cliques	6
2.3 Grafos Completos	6
2.4 Abordagens para o Limite Inferior de Grafos	8
2.5 Grafos de Cayley	9
3 – COLORAÇÃO DE GRAFOS	11
3.1 Coloração de Vértices	12
3.2 Coloração de Arestas	13
3.3 Coloração Total	15
3.4 Coloração dos Grafos Completos	16
4 – COLORAÇÃO NOS GRAFOS $H_{l,p}$	19
4.1 Grafo $H_{l,p}$	19
4.2 Coloração de Vértices nos Grafos $H_{l,p}$	20
4.3 Coloração de Arestas nos Grafos $H_{l,p}$	20
4.4 Coloração Total nos Grafos $H_{l,p}$	21
5 – CONCLUSÃO	23
5.1 Trabalhos Futuros	23
Referências	24

1 INTRODUÇÃO

Segundo Ostroski e Menoncini (2009), “um grafo $G = G(V, E)$ pode ser definido como uma estrutura onde V é um conjunto discreto e ordenado de pontos chamados vértices, e E um conjunto de linhas chamadas arestas, e cada aresta está conectada em pelo menos um vértice”. Com a ideia de pontos interligados por linhas, a representação por grafos pode facilitar o entendimento e a resolução de problemas. Desta forma, mapas que representam a estrutura organizacional de uma empresa, rotas de transporte, redes de comunicação, distribuição de produtos, assim como a estrutura química de moléculas, podem ser expressos através de grafos. O estudo sobre grafos está em crescimento devido ao avanço de novas tecnologias computacionais, que permitem a resolução de problemas via algoritmos, com maior eficiência, rapidez e confiança.

Assim, a crescente aplicabilidade desta teoria é um fator positivo para o desenvolvimento, e um desses fatores que merece destaque é o problema conhecido como coloração, o qual pode ser utilizado em situações que exigem a seleção de elementos em conjuntos independentes e com características comuns.

O estudo do problema de coloração de grafos é de grande importância teórica pois é um clássico problema NP-Difícil, progressos na solução dessa classe de problemas motivam diversas pesquisas em computação, matemática e pesquisa operacional. Do ponto de vista prático, o estudo do problema de coloração de grafos é muito importante pois sua estrutura é muito utilizada para modelar problemas de diversas áreas, como: agendamento, tabela de horários, otimização de alocação de registradores, plataforma de trem, atribuição de frequência, redes de comunicação (SANTOS; REGO, 2001). Portanto, este é um problema clássico de teoria dos grafos, e devido a sua importância e aplicação prática ele tem sido objeto de muitos estudos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, revisa a história da Teoria dos Grafos, as definições contidas nela sobre as variações de tipos de classes de grafos como por exemplo grafo caminho, grafo ciclo, entre outros, em seguida uma breve descrição sobre grafos cliques e grafos completos juntamente com suas colorações, servindo de base aos estudos para alcançar o objetivo.

Na sessão 2.4, aborda sobre os limites inferior dos Grafos e dos Grafos de Cayley que leva a abordagem de pesquisa do trabalho. Já no Capítulo 3, apresentamos principalmente o problema da coloração de grafos e definições da coloração de vértice, aresta e total nos grafos juntamente com seus respectivos limites inferiores e superiores. Finaliza-se o trabalho no Capítulo 4, onde defini o que é grafo $H_{l,p}$ e sua importante propriedade para a construção e desenvolvimento, em conjunto a representação e formulação dos resultados da coloração dos grafos $H_{l,p}$ em seus vértices, arestas e total.

2 REVISÃO DE LITERATURA

A Teoria dos Grafos é um ramo da Matemática de conjunto de objetos e as relações desses objetos, estes objetos são chamados grafos e auxiliam no estudo. Segundo Wilson (1990), “o primeiro artigo sobre Teoria dos Grafos foi escrito pelo famoso suíço matemático Euler, que apareceu em 1736”. A Teoria dos Grafos parecia bastante insignificante no começo, uma vez que lidava em grande parte com quebra cabeças, mas recentes desenvolvimentos em matemática e particularmente em suas aplicações, deram um forte impulso à Teoria dos Grafos.

Já no século XIX, os grafos eram usados em campos como circuitos elétricos e diagramas moleculares. Atualmente, existem tópicos em matemática, por exemplo, a teoria das relações matemáticas onde a Teoria dos Grafos é uma ferramenta natural. Também existem inúmeras outras que usa em conexão com questões altamente práticas como: correspondências, problemas de transporte, o fluxo em redes de dutos e os chamados “programação” em geral (WILSON, 1990).

Em matemática, a Teoria dos Grafos é classificada como um ramo da topologia, mas também está fortemente relacionado à álgebra e a teoria das matrizes, para um quebra cabeças de pequena extensão continuam a fazer parte da Teoria dos Grafos diferente de muitos dos ramos da Matemática que foram motivados por problemas envolvendo cálculos, movimento entre outros. O desenvolvimento da Teoria dos Grafos se deu através de problemas envolvendo jogos. Atualmente, esta teoria é aplicada em vários ramos da matemática, informática, engenharia e indústria, visto que grafos são um bom modelo para solucionar muitos dos problemas destas áreas (DANTAS, 2015).

Segundo Pereira e Câmara (2008), “acredita-se que um dos primeiros exemplos da utilização de grafos de considerável importância não só para esta teoria como também para a matemática, teria surgido devido as Pontes de Königsberg”. Na cidade de Königsberg (atual Kaliningrado), antiga capital da Prússia Oriental, o rio Pregel circunda uma ilha e separa a cidade em quatro zonas que, no século XVII estavam ligadas por sete pontes, conforme a figura 1, o problema é decidir se é possível seguir um caminho que cruza cada ponte exatamente uma vez e retorna ao ponto de partida.

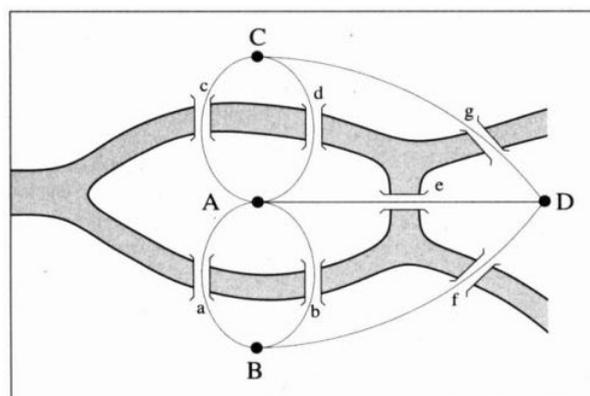


Figura 1 – Pontes de Königsberg.
Fonte: baseado em Dantas (2010).

Em 1946, os soviéticos rebatizaram de Caliningrado e o rio hoje, é chamado Pregolya, atualmente apenas duas pontes são da época. No século XVII a população de

Königsberg perguntava se era possível atravessar as sete pontes sem passar duas vezes por qualquer uma delas. Nos dias ensolarados de domingo os habitantes tentavam encontrar uma maneira de atravessar as sete pontes sem passar duas vezes pelo mesmo lugar, e as tentativas eram sempre em vão.

Apesar de que, muitos deles, acreditavam ser possível encontrar tal caminho. “Em 1736, na Academia de Ciências Russa de São Petersburgo, Leonard Euler foi o primeiro a representar este problema usando grafos e provou que não era possível fazer tal caminho (PONTES, 2019)”.

Definição 1 Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é um par de conjuntos definida por $V(G)$ e $E(G)$, tal que $V(G)$ é um conjunto de elementos chamados de vértices, e $E(G)$ é um multiconjunto de pares não ordenados de vértices, chamados arestas, todo grafo pode ser representado geometricamente por um diagrama.

Desenhamos um ponto para cada vértice e um segmento de curva ligado para cada par de vértice que determina uma aresta na figura 2. A representação geométrica de um grafo não é única, mas para cada representação existe um único grafo.

Exemplo 1 Na figura 2, é apresentado em diagrama um grafo $G = (V, E)$.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (6, 7)\}$$

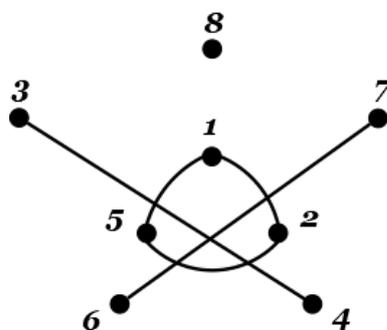


Figura 2 – Representação Geométrica do Grafo.

Fonte: baseado em Donadelli (2010).

Dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que dois vértices v e w estão geometricamente ligados ou relacionados, se $(v, w) \in E$. Nesse caso, diz-se que a aresta (v, w) , à qual é também denotada por vw , incide em v e w . Além disso, v e w são as “pontas” da aresta. Se vw é uma aresta, diremos que os vértices v e w são vizinhos ou adjacentes (DONADELLI, 2010).

Quando nos referimos a um grafo conhecido G sem especificarmos o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas que definem G esses passam a ser referidos como $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Entretanto um laço é uma aresta cujos extremos incidem no mesmo vértice e arestas múltiplas são paralelas n de arestas que incidem sobre o mesmo par de vértices. Um grafo G é simples se G não possui laços ou arestas múltiplas, do contrário, o grafo é denominado multigrafo (ROCHA et al., 2020).

2.1 Tipos de Classes de Grafos

Na Teoria de Grafos contém definições e características de classes de grafos importantes para estudo e conhecimento, destacadas a seguir:

Definição 2 *Grafo Caminho (path graph): é uma sequência de vértices $P = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de tal forma que dois vértices são adjacentes se forem consecutivos na sequência, e não adjacentes, caso contrário. Assim como mostra a figura 3 o comprimento ou tamanho de P , denotado por $|P|$, é o número de arestas de P , ou seja, $|P| = n - 1$, (DANTAS, 2015).*

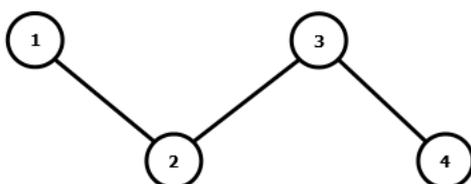


Figura 3 – Representação de um Grafo Caminho.

Fonte: baseado em Dantas (2015).

Definição 3 *Grafo Ciclo (cycle graph): para C_n ($n \geq 3$) é um grafo simples cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência cíclica, de tal forma que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na sequência, e não adjacentes em caso contrário (DANTAS, 2015).*

O primeiro e último vértices coincidem, dado um grafo G com n vértices e k arestas, o tamanho de um ciclo é o número de suas arestas. Um ciclo de tamanho k é chamado de k – ciclo, e um grafo G é acíclico se o mesmo não contém ciclo.

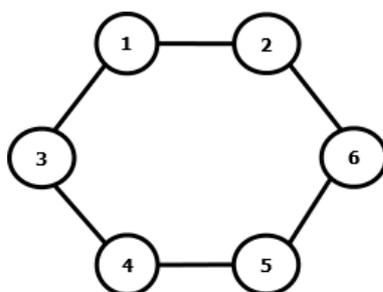


Figura 4 – Representação de um Grafo Ciclo.

Fonte: baseado em Dantas (2015).

Definição 4 *Grafo Conexo: é conexo se quaisquer que sejam os vértices distintos v e u de G , existe sempre um caminho G que os conecta. Quando um grafo não é **conexo**, diz-se que ele é **desconexo** (DANTAS, 2015).*

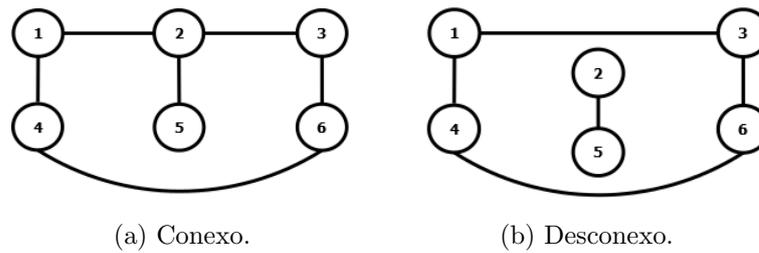


Figura 5 – Representação de um Grafo Conexo e Desconexo.
 Fonte: baseado em Ribeiro (2013).

Definição 5 *Grafo Planar*: possui uma representação gráfica em que nenhuma de suas arestas se cruzem, chamado de grafo planar, um grafo planar divide o plano em regiões chamadas de faces. A face ilimitada do grafo é chamada de face externa enquanto as outras faces são chamadas de faces internas (DANTAS, 2015).

Na figura 6, um exemplo de grafo planar e um grafo não-planar é dado, o grafo planar possui quatro faces, sendo três internas e a face externa.

Teorema 1 *Fórmula de Euler*: Se G é um grafo planar conexo com n vértices, q arestas e f faces, então $n - q + f = 2$ (COSTA, 2011).

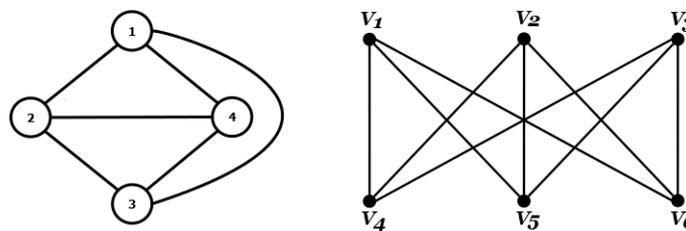


Figura 6 – Representação de um Grafo Planar e não Planar.
 Fonte: baseado em Dantas (2015).

Definição 6 *Grafo Bipartido (bipartite graph)*: é um grafo em que seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos X e Y , tal que uma aresta qualquer tem uma extremidade em X e outra em Y , logo um grafo bipartido é denotado por $G[X,Y]$ (DANTAS, 2015).

Se cada vértice em X é ligado a cada vértice em Y , então $G[X,Y]$ é um grafo bipartido completo. Se o número de vértices em X é n e o número de vértices em Y é m , o número de arestas de um grafo bipartido completo é $K_{m,n}$. Exemplo disto, está representado na figura 7.

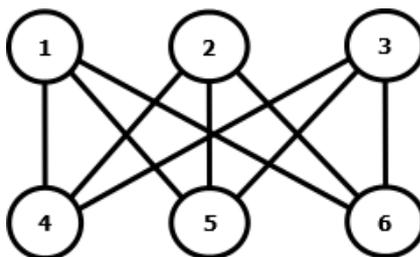


Figura 7 – Representação de um Grafo Bipartido.
Fonte: baseado em Dantas (2015).

Sendo assim, não só essas definições como outras são de extrema importância para a Teoria de Grafos, pois são frequentemente usadas no meio, para metodologias, prova matemática, entre outros.

2.2 Grafos Cliques

Denomina-se clique de um grafo G a um subgrafo (induzido) de G . Em um mesmo grafo, podemos encontrar cliques de diferentes ordens, pois podem existir diferentes subgrafos que podem ser induzidos de G tal que formem um subgrafo completo.

Portanto segundo diz Protti (1998), “o grafo clique de G denotado por $K(G)$, é o grafo cujos vértices correspondem as cliques maximais de G e dos vértices de $K(G)$, são adjacentes se e somente se as correspondentes cliques maximais de G se interceptam”. O grafo clique de G , portanto, é o grafo de intersecção das cliques maximais de G . Pode-se pensar em um clique como um conjunto “totalmente relacionado” de vértices de um grafo.

Exemplo 2 No grafo da figura 8, podemos observar a aresta $f_1(1, 4)$, formando uma clique de tamanho 2. Se analisarmos o subgrafo induzido por vértices $G[S]$, com $S = f_1$ se torna um grafo completo. Outras cliques de tamanho 2 também estão presentes no grafo, as arestas $f_2(2, 5, 6)$, denota uma clique de tamanho 3, pois se analisarmos o subgrafo induzido por vértices $G[S]$, com $S = f_2$, ele também é um grafo completo (SOUZA, 2012).

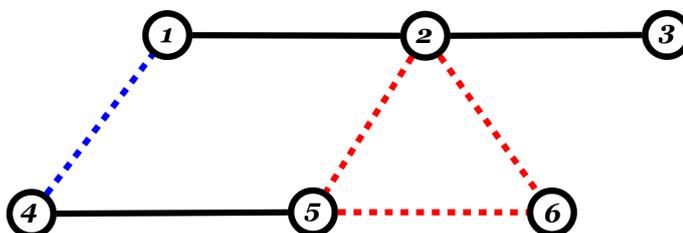


Figura 8 – Representação do Grafo Clique.
Fonte: baseado em Souza (2012).

2.3 Grafos Completos

Um grafo onde todos os seus vértices tem o grau máximo. Ou seja, existe aresta presente entre todos os pares de vértices. Se o conjunto V possui uma quantidade n de elementos, o grafo G pode ser representado por K_n .

Definição 7 Um grafo completo de n vértices denominado K_n , é um grafo simples com n vértices v_1, v_2, \dots, v_n , cujo conjunto de arestas contém exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos (LOUREIRO, 2015).

Teorema 2 O número de arestas de um grafo completo $G = (V, E)$ é $\frac{n(n-1)}{2}$ onde $n = |V|$ (VASCONCELOS, 2018).

Portanto, segundo Vasconcelos (2018), realizou a prova pelo processo de Indução Matemática.

Prova. Seja G_n um grafo que contém n vértices. Consideremos o caso trivial, isto é, o grafo G_1 . Neste caso, como existe apenas um vértice, é impossível definir uma aresta que não seja um laço. Então, para $n = 1$, segue

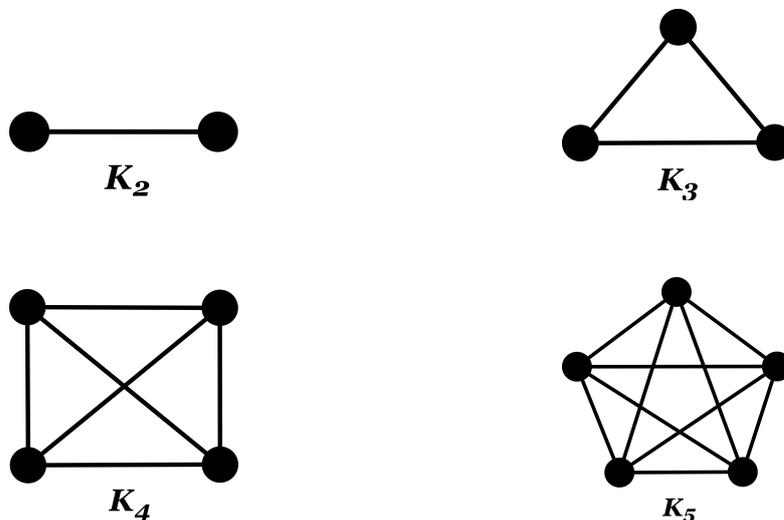
$$\frac{n(n-1)}{2} = 0.$$

Supondo que a hipótese é verdadeira para G_n , onde $n \geq 1$, considere o grafo G_{n+1} . Seja v_{n+1} o vértice adicional que se encontra em G_{n+1} e não em G_n . O número máximo de arestas no grafo G_{n+1} é igual ao número máximo de arestas de G_n mais todas as ligações possíveis entre v_{n+1} e cada vértice de G_n . Como esse número de ligações é igual ao número de vértices em G_n , tem-se que o número de arestas de G_{n+1} é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + n &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Exemplo 3 O grau máximo encontrado na figura 9, foi no grafo K_6 contendo 6 vértices, onde resulta em 15 arestas interligadas entre si. Portanto, para cada vértice contém pelo menos uma aresta.



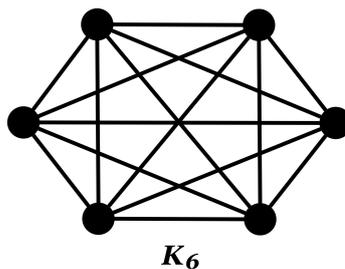


Figura 9 – Representação dos Grafos Completos.
Fonte: autoria própria.

Sendo assim, exemplo 3 representa a definição 7 dos grafos completos, e também serve para realizar o processo da coloração base dos estudos nos grafos $H_{l,p}$.

2.4 Abordagens para o Limite Inferior de Grafos

Para o problema de coloração os métodos exatos para determinar o número cromático de um grafo, demandam o cálculo de bons limites inferiores e superiores. Por isso, o estudo desses elementos são importantes.

Definição 8 Dado um grafo G colorido com k cores, diz-se que o grafo possui uma k -coloração. Um grafo G é k -colorível se existe uma k -coloração para G (DANTAS, 2015).

Definição 9 O número cromático de G , é o menor inteiro positivo para o qual G é k -colorível, e é denotado por $X(G)$, se $X(G) = k$, então G é um k -cromático (DANTAS, 2015).

Definição 10 Um grafo G é crítico ou k -crítico, se $X(G) = k$ e $X(G - v) < k$, para cada um dos vértices de v do grafo G (JENSEN, 2002).

Definição 11 Grau Máximo para um grafo G , denote o grau máximo de G por:

$$\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$$

Definição 12 Grau Mínimo para um grafo G denote o grau mínimo de G por:

$$\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$$

Definição 13 Uma coloração própria c de vértices em um grafo G é uma atribuição de cores aos vértices de G de tal forma que um vértice v possua cores diferentes dos seus vértices adjacentes (DANTAS, 2015).

As cores são representadas por números inteiros positivos $\{1, \dots, k\}$. Dessa forma, uma coloração própria pode ser vista como uma função $c : V(G) \rightarrow N$ (sendo N o conjunto dos números naturais) tal que, se u e v são vértices adjacentes em G , temos que $c(v) \neq c(u)$.

Definição 14 Grafo k -cromático se G é k -crítico, então $\delta \geq k - 1$ (POSNER, 2014).

Prova. Por contradição, seja G um grafo k -crítico com $\delta < k - 1$ e seja $v \in V(G)$ um vértice de grau δ . Como G é crítico, $G - v$ é $(k - 1)$ colorível. Considere $c : v(G - v) \rightarrow \{1, \dots, k - 1\}$ uma $(k - 1)$ coloração de $G - v$. Por definição, v é adjacente em G à $\delta <$

$k - 1$ vértices, então v não deve ser adjacente à todos os vértices. Logo, $(v_1, v_2, \dots, v_j \cup v, \dots, V_{k-1})$ é uma $(k - 1)$ coloração de G . Uma contradição. Portanto, $\delta \geq k - 1$. \square

O problema de colorir um grafo é tarefa trivial, uma vez que se pode imaginar distribuir uma cor diferente para cada vértice. O problema da coloração realmente surge quando desejamos colorir o tal grafo, utilizando o menor número possível de cores, que é um Problema NP-Difícil. Portanto, os estudos de casos de coloração e limites superior e inferior em um grafo são extremamente definidos para que seja possível colorir no menor número possível (POSNER, 2014).

2.5 Grafos de Cayley

Na matemática, um grafo de Cayley, também conhecido como diagrama de Cayley, é um grafo de codificação de estrutura abstrata de um certo grupo. Os grafos de Cayley foram introduzidos por Arthur Cayley em 1878, com o intuito de associar a teoria dos grupos e a Teoria dos Grafos. A teoria dos grupos estuda as estruturas algébricas conhecidas como grupos. Um grupo é um conjunto de elementos associado a uma operação que combina dois elementos para formar um terceiro que também pertence ao conjunto. Além disso, um grupo possui as seguintes propriedades: a operação do grupo é associativa, existe um elemento identidade e o inverso de cada elemento também está no grupo (RIBEIRO, 2013).

Definição 15 *Grafos de Cayley (cayley Graph):* Sejam G um grupo finito e S um conjunto gerador de G . O grafo de G (associado a S), que vamos denotar por $\Gamma(G, S)$, é um grafo de Cayley com conjunto de vértices $V(\Gamma)$ sendo os elementos de G , $vw \in E(\Gamma)$ se existe $s \in S$ tal que $w = vs$. Quando S é simétrico (ou fechado para inverso), isto é, se $s \in S$ implica $s^{-1} \in S$ e não contém a identidade 1 , o grafo de Cayley de G (associado a S), (G, S) , é não-direcionado e não contém laços (KONSTANTINOVA, 2008).

A Teoria dos Grafos estuda as estruturas discretas que modelam as relações entre os objetos de um determinado conjunto. Assim, um grafo é definido por um conjunto de vértices ou nós e um conjunto de arestas que conectam pares de vértices. Um grafo de Cayley é um grafo formado por um grupo e um conjunto gerador do grupo, onde os vértices estão associados aos elementos do grupo e as arestas estão associadas aos elementos do conjunto gerador. Os grafos de Cayley são conexos, regulares e vértice-transitivos (RIBEIRO, 2013).

Segundo Ribeiro (2013), “propriedades dos grafos de Cayley como: grau, distância, e diâmetro são consideradas. Os grafos de Cayley são conexos, regulares, podem ter diâmetro logarítmico no número de vértices e podem ser utilizados para criar interconexão de redes”. Um grafo geralmente utilizado para interconexão de redes é o grafo hipercubo regular com 2^n vértices, que correspondem aos subconjuntos de um conjunto de n elementos (RIBEIRO, 2013). Consideramos duas famílias de grafos de Cayley: grafos $H_{l,p}$ e $H'_{l,p}$, onde $H'_{l,p}$ é um subgrafo gerador do $H_{l,p}$ mais esparsos e o grafo hipercubo é isomorfo, os grafos $H'_{l,p}$ e $H_{l,p}$ têm diâmetro e grau logarítmicos.

O hipercubo H_n é um grafo de Cayley com conjunto de vértices (x_1, x_2, \dots, x_n) em que dois vértices (v_1, v_2, \dots, v_n) e (u_1, u_2, \dots, u_n) são adjacentes se, e somente se $v_i = u_i$ para todos os pares v_i, u_i exceto um i , $1 \leq i \leq n$. Ele é um grafo de Cayley de ordem 2^n , grau n e diâmetro n (RIBEIRO, 2013).

O grafo completo K_n é um grafo de Cayley no grupo aditivo Z_n dos números inteiros módulo n com conjunto gerador formado por todos os elementos diferentes de zero de Z_n . Um *circulante* é um grafo de Cayley formado pelo par (Z_n, C) onde $C \subseteq Z_n$ é um

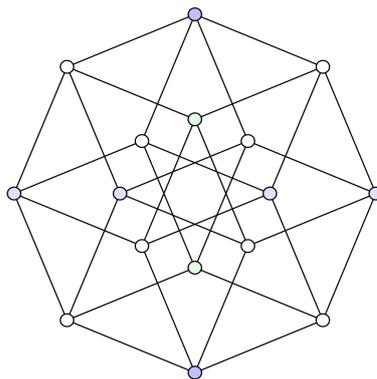


Figura 10 – Representação de um Grafo Hipercubo.
 Fonte: baseado em Hipercubo (2019).

conjunto gerador arbitrário. Um exemplo simples de um circulante é o grafo C_n , tomando $C = \{1, n - 1\}$ (RIBEIRO, 2013).

As famílias de grafos de Cayley são complexas e previamente definidas pelos seus automorfismos, sendo uma forma de simetria em que o grafo é mapeado em si preservando a conectividade vértice e arestas.

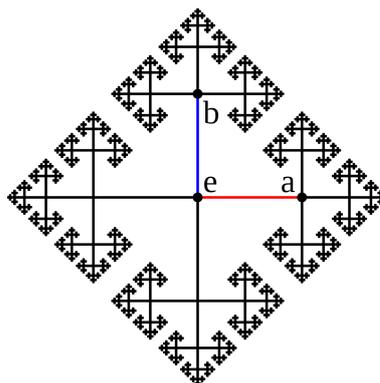


Figura 11 – Representação de um Grafo de Cayley.
 Fonte: baseado em Cayley (2021).

3 COLORAÇÃO DE GRAFOS

Os problemas de coloração em grafos são importantes para a Computação e Matemática, pois a aparente simplicidade dos modelos utilizados e a robustez de representação, propriedades e restrições tornam-os ideais para o estudo de problemas clássicos (AIRES, 2016).

Segundo Lima (2017) acredita-se que o “estudo do problema de coloração de grafos originou-se no século XIX em 1852, enquanto o matemático Francis Guthrie coloria o mapa da Inglaterra e observou que quatro cores eram suficientes para colorir de maneira que regiões vizinhas não recebessem a mesma cor.”

Segundo Campello (1994) “o problema das quatro cores somente viria se resolvido em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, com o emprego de uma técnica de prova por computador, que utilizou resultados já estabelecidos da teoria dos grafos juntamente com certo raciocínio matemático adicional para demonstrar que o problema geral pode ser reduzido a um número finito de casos particulares, dotados de certas propriedades que permitem estabelecer que a coloração pode ser efetuada com somente quatro cores”. Por meio do uso de programas de computador, em torno de 1.700 instâncias do problema foram cuidadosamente criadas, e após 1.200 horas de processamento verificou-se que todos os casos necessitaram de no máximo quatro cores para solução, ficando então este resultado conhecido como o Teorema das Quatro Cores.

Contudo, vale salientar que o Teorema das Quatro Cores é aplicável apenas a classe de grafos planares, pois a coloração de mapas representa um caso específico da coloração de grafos. O Problema das Quatro Cores tem a característica indubitavelmente fascinante de ser um problema matemático de formulação muito simples, e uma enorme complexidade de resolução, que fez com que permanecesse por resolver durante mais de uma centena de anos (SOUSA, 2001).

Dado um grafo qualquer, realizar uma coloração nada mais é do que atribuir rótulos a elementos de um grafo (vértices ou arestas), os quais chamamos de “cores”. Tal processo é efetuado com base em algumas restrições e é chamado de uma coloração de vértices (ou arestas). No caso de uma coloração de vértices, dois vértices adjacentes não devem receber a mesma cor, no caso de uma coloração de arestas, atribuímos uma cor para cada aresta de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor, e no caso de uma coloração total é uma atribuição de cores aos vértices e arestas de um grafo, quando própria são impostas tanto as restrições da coloração de vértices quanto as da coloração de arestas, somadas à restrição de que cada aresta tem cor diferente das cores dos vértices em que incide. (ALVES et al., 2015).

Ao efetuarmos uma coloração de vértices em um grafo simples, é fácil produzir uma coloração com muitas cores. O caso mais elementar seria atribuir uma cor diferente para cada vértice. Porém, obter uma coloração com poucas cores pode não ser um problema tão simples. Os problemas de coloração só fazem sentido para grafos simples (ALVES et al., 2015).

Do ponto de vista teórico Lozano (2007), “o problema de coloração em grafos encontra-se na classe NP-difícil, logo é pouco provável que ele possa ser resolvido de maneira exata em tempo polinomial”. Do ponto de vista prático, os algoritmos exatos existentes atualmente se tornam inviáveis conforme aumenta-se o número de vértices do grafo, e até mesmo para grafos relativamente pequenos, esses métodos extrapolam, em geral, limites de tempo aceitáveis. Um dos elementos importantes para melhorar a eficiência

desses métodos é a determinação de bons limites inferiores e superiores para o valor ótimo do problema. A importância do problema de coloração tem incentivado as pesquisas nesse sentido, buscando métodos que aproximem os limites inferiores do número cromático do grafo.

Na figura 12, é um exemplo de coloração de todos os seus vértices, que não compartilha as mesmas cores entre seus vizinhos.

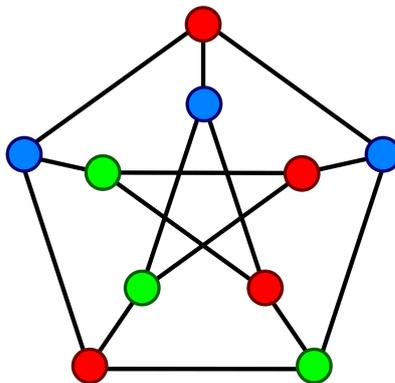


Figura 12 – Representação de Coloração de Grafo.

Fonte: baseado em COLORAÇÃO (2022).

3.1 Coloração de Vértices

Ao efetuarmos uma coloração de vértices em um grafo, é fácil produzir uma coloração com muitas cores. O caso mais complexo seria atribuir uma cor diferente para cada vértice. Porém, obter uma coloração com poucas cores pode não ser um problema tão simples. Segundo Siqueira (2011) diz que, “uma coloração de vértices própria é uma coloração de vértices tal que nenhum par de vértices adjacentes tem associada a mesma cor.”

Definição 16 *O número cromático $X(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Se o número de cores utilizado na coloração de vértices de um grafo for igual a $X(G)$, a coloração é dita ótima (ALVES et al., 2015).*

Observamos que o processo de coloração de vértices é sempre possível, uma vez que, se o grafo tem n vértices, podemos usar n cores distintas. Isso significa que o subconjunto $A \subset N$, cujos elementos correspondem à quantidade de cores relativa a cada coloração de vértices para G , é não vazio. Ou seja, $X(G)$ está bem definido como sendo o mínimo do conjunto A . Portanto, a entrada do problema é composta por um grafo G e um inteiro $k > 0$ enquanto que a saída resume-se em determinar se há uma coloração com k cores ou menos, em muitas situações inteiros positivos $(1, 2, \dots, k)$ são empregados para representar as cores e a razão desta substituição é que na maioria das vezes o principal interesse consiste em determinar somente a quantidade de cores utilizada na solução do problema (CHARTRAND; ZHANG, 2008).

Teorema 3 *Seja G um grafo simples, então $\chi(G) \leq \Delta + 1$ (RABUSKE, 1992).*

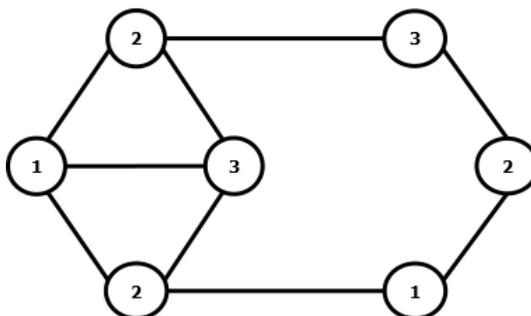


Figura 13 – Representação 3-coloração de vértices própria.

Fonte: autoria própria.

A Figura 13, mostra uma coloração de vértices própria com as cores 1, 2 e 3. Neste caso, $X(G) = 3$.

No manuseio de ir em busca do mínimo de cores possíveis de um dado grafo, a coloração dos vértices se baseiam na atribuição de métodos e definições propriamente ditas, um método comprobatório sequencial correspondente a uma heurística gulosa que determina a solução analisando elemento a elemento, sendo que cada passo é acionado um único elemento "candidato". Ele é escolhido seguindo um critério, sendo assim, termina quando todos os elementos candidatos foram analisados, vale ressaltar que um algoritmo heurístico pode determinar boas soluções na maioria das vezes, mas não é possível garantir uma boa solução para todos os casos. Exemplo disso no algoritmo 1, percorrer todos os vértices do grafo se não houver conflitos de independência acrescentamos o vértice ao conjunto (ALVES et al., 2015).

Algoritmo 1: Coloração - Gulosa (G, K)

```

1 início
2   for  $v \leftarrow n_1$  até  $v_n$  do
3     | atribua a menor cor possível ao vértice  $v$ 
4     end
5 fim
```

A coloração gulosa sequencial de G é dividido em dois seguintes estágios:

- Determinar uma sequência de coloração elemento a elemento nos vértices de G .
- Aplicar o processo da Coloração gulosa em cima do grafo G .

3.2 Coloração de Arestas

Segundo Costa (2022), “a coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ consiste em atribuir cores ao conjunto de arestas E de G . Esta coloração é denominada própria, se para qualquer par de arestas adjacentes (incidentes a um mesmo vértice), as cores destas duas arestas são diferentes. Se G admite uma coloração própria com k cores, G é dito k -colorível”. O Problema da Coloração de Arestas consiste em, dado um grafo G de entrada, obter o menor número de cores para colorir seu conjunto de arestas propriamente, este número é chamado de índice cromático de G e é denotado por $X'(G)$.

A partir da definição 13 de uma coloração própria, podemos concluir imediatamente que o grau máximo é um limite inferior para o índice cromático, ou seja, para qualquer

grafo $G : X'(G) \geq \Delta(G)$. A figura 14, ilustra um grafo G e uma atribuição de cores própria ao seu conjunto de arestas.

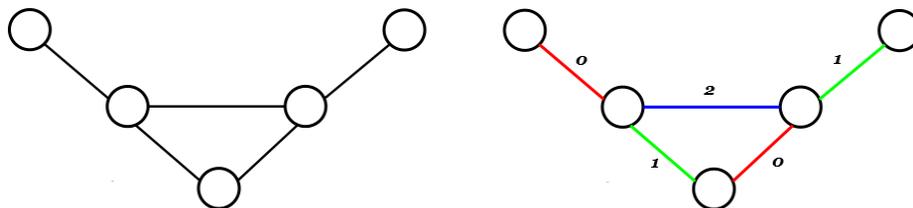


Figura 14 – Representação de um Grafo Touro grau máximo 3.
 Fonte: baseado em Costa (2022).

Conforme dito acima, sabemos, intuitivamente, qual é o limite inferior para o índice cromático de um grafo G , mas junto com este resultado, pode surgir o seguinte questionamento: e quanto ao limite superior para $X'(G)$? Podemos pensar em $|E(G)|$ como um limite superior intuitivo, mas claramente esse limite não é justo. A pergunta que surge então é se um limite bem mais justo é conhecido. E a resposta para tal pergunta é sim, e este é um resultado extremamente importante e conhecido da teoria dos grafos foi enunciado em 1964 por Vizing (COSTA, 2022).

Teorema 4 (Teorema de Vizing, 1964), seja G um grafo simples, então $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ (VIZING, 1964).

Sendo assim, Vizing (1964) provou que “existe um limitante superior bastante justo para o índice cromático de um grafo simples G ”. Perceba que, pela definição de uma coloração de arestas, um limitante inferior para o número de cores em uma coloração de arestas de um grafo é o máximo entre o número de arestas incidentes em um mesmo vértice, esse número é chamado de grau máximo de G e é denotado por $\Delta(G)$ (GONZAGA, 2021).

Em seu trabalho, Vizing provou que o índice cromático de G é no máximo $\Delta(G)+1$, essa forte restrição que limita as possibilidades do índice cromático a dois valores, $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$, deu origem ao Problema da Classificação, que é responder se G é *Classe 1* em que $X'(G) = \Delta(G)$ ou *Classe 2* caso em que $X'(G) = \Delta(G) + 1$ (GONZAGA, 2021).

A figura 15a e 15b é um exemplo de um grafo *Classe 1* e um grafo *Classe 2*.



(a) Grafo Roda W_5 classe 1.

(b) Grafo K_3 classe 2

Figura 15 – Representação do Grafo Classe 1 e Classe 2.
 Fonte: baseado em Costa (2022).

O que é interessante mesmo existindo apenas duas possibilidades para o valor do índice cromático de um grafo G , o problema da coloração de arestas ainda é provado ser

NP-completo. Holyer (1981) mostrou que “classificar grafos como *Classe 1* ou *Classe 2* é um problema NP-completo. Portanto, no caso geral, decidir se um grafo é *Classe 1* é um problema NP-completo. Perceba que por se tratar de um problema difícil é comum que ele seja considerado em classes bem estruturadas de grafos.”

3.3 Coloração Total

A coloração total é uma atribuição de cores aos vértices e arestas de um grafo, quando própria são impostas tanto as restrições da coloração de vértices quanto as da coloração de arestas, somadas à restrição de que cada aresta tem cor diferente das cores dos vértices em que incide.

Um limite inferior natural para o número cromático total de um grafo G pode ser obtido ao colorirmos um vértice de grau máximo do grafo bem como as arestas incidentes a ele. Claramente, são necessárias $\Delta(G) + 1$ cores nesse caso. O menor número de cores necessário para colorir totalmente um grafo G é chamado de número cromático total e é denotado por $X''(G)$ (COSTA, 2022).

Segundo os pesquisadores Behzad (1965) e Vizing (1968), de “forma independente durante os anos de 1965 a 1968, introduziram uma conjectura chamada: Conjectura da Coloração Total (do inglês Total Coloring Conjecture, denotada por TCC). Tal conjectura afirma que é possível colorir totalmente qualquer grafo G com $\Delta(G) + 1$ ou $\Delta(G) + 2$ cores”. Os grafos que se encaixam no primeiro caso são chamados de *Tipo 1* e os grafos que se enquadram na segunda categoria são chamados de *Tipo 2*. A figura 16 ilustra um grafo G e a sua coloração total ótima.

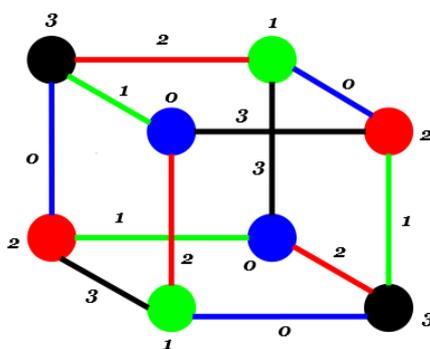


Figura 16 – Representação de um Grafo Cubo, $X''(G) = 4$.

Fonte: baseado em Costa (2022).

Conjectura 1 *Seja G um grafo simples, então $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ (BEHZAD, 1965), (VIZING, 1968).*

O grafo da figura 16 é um exemplo de grafo Tipo 2, onde necessita de $\Delta(G) + 2$ cores para satisfazer a coloração. O problema da coloração total, assim como o problema da coloração de arestas é um problema extremamente desafiador no geral.

Para os grafos em geral, Arroyo (1989) mostra que “decidir se o grafo é *Tipo 1* e *Tipo 2* é um problema NP-Completo, neste mesmo trabalho mostraram que o problema da coloração total é NP-Completo para os bipartidos cúbicos, que são grafos bipartidos onde todos os vértices tem grau 3 representado na figura 16”.

Por esse resultado, pode-se concluir que a existência de um algoritmo polinomial que resolva o Problema da Coloração Total ainda que apenas para os grafos bipartidos cúbicos. Ele também mostrou que determinar o número cromático total é NP-Difícil mesmo para grafos bipartidos em que todos os vértices têm grau k onde k é um valor fixo maior ou igual a 3 (BECHER, 2019).

3.4 Coloração dos Grafos Completos

Coloração de grafos é uma atribuição de restrições específicas para cada elemento do grafo, uma forma de colorir as arestas tal que atribui uma cor para cada aresta adjacente que não contenha a mesma cor chamado de coloração de aresta. De certa forma, temos a coloração de vértices onde não haja dois vértices adjacentes que compartilham a mesma cor, e a coloração total é uma atribuição de cores aos vértices e arestas de um grafo.

Com a representação na figura 9, partimos para a coloração respectivamente de vértices, arestas e total dos grafos completos.

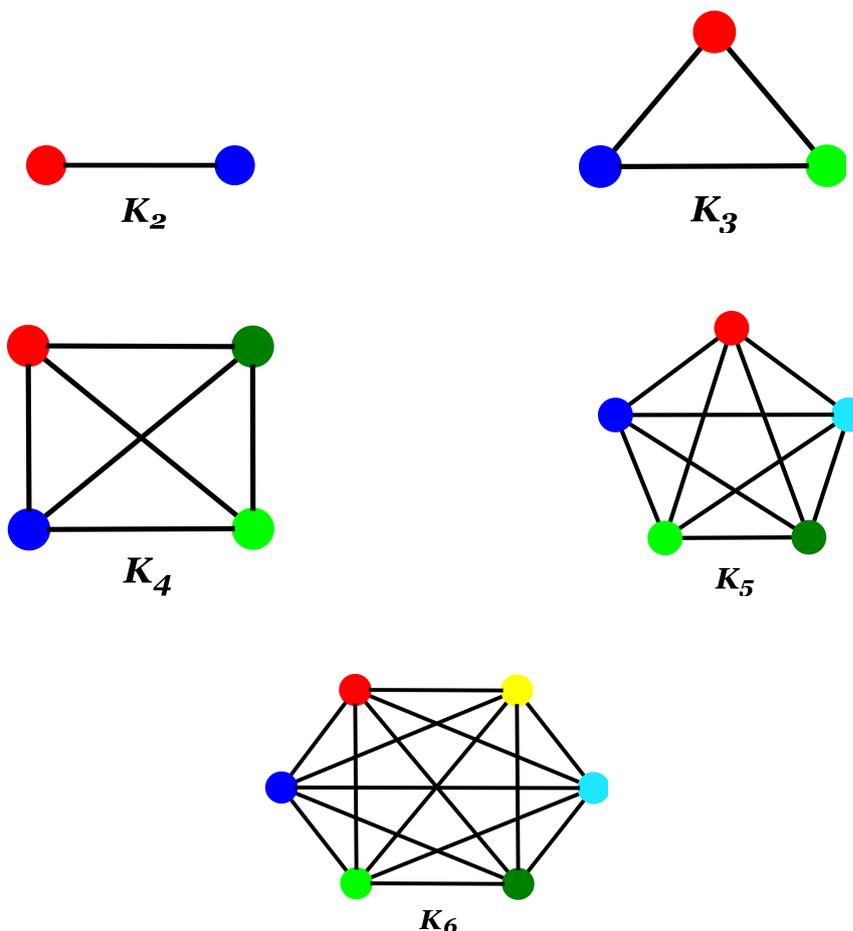


Figura 17 – Representação da Coloração de Vértices Grafos Completos.
Fonte: autoria própria.

A coloração dos vértices representado na figura 17, demonstra uma ligação entre os vértices e seus vizinhos, atribuindo a cada vizinho uma respectiva cor, onde não compartilhem a mesma cor entre eles.

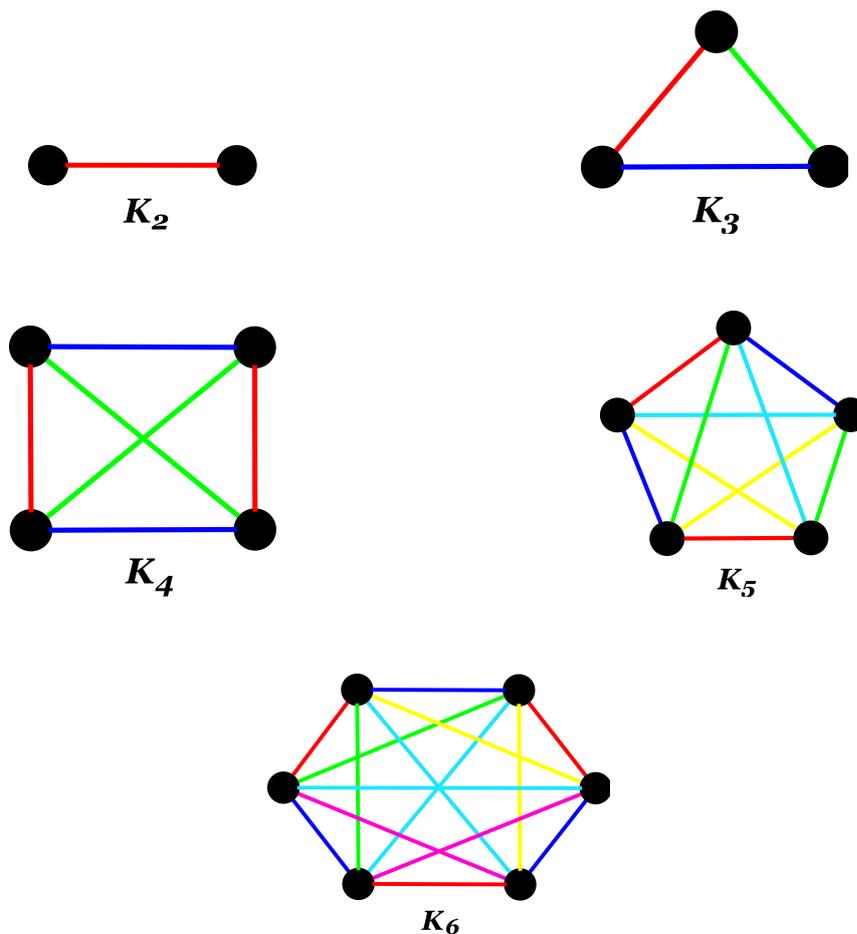
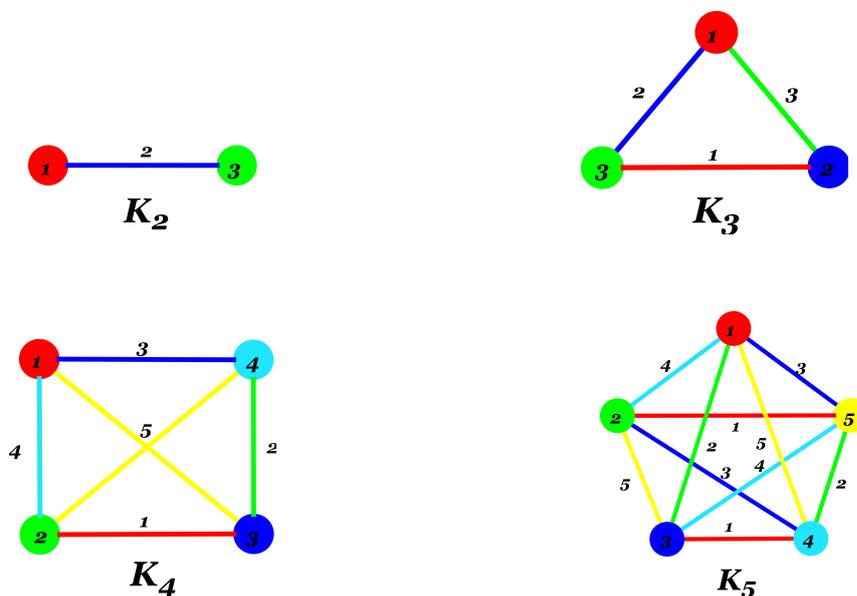


Figura 18 – Representação da Coloração de Arestas Grafos Completos.
 Fonte: autoria própria.

Na figura 18, cada aresta interligada nos vértices, mostra uma conectividade com seus pares, podendo fazer uma coloração cabível nos grafos completos, a coloração de vértices e arestas se equilibra devidamente com a coloração total demonstrado na figura 19, formando então uma coloração nos grafos sem conflitos ou adjacências entre si.



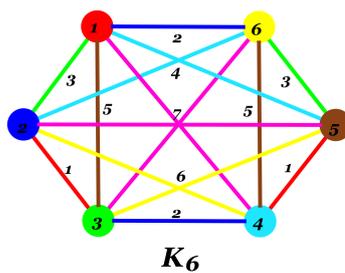


Figura 19 – Representação da Coloração Total Grafos Completos.
 Fonte: autoria própria.

4 COLORAÇÃO NOS GRAFOS $H_{l,p}$

4.1 Grafo $H_{l,p}$

O grafo $H_{l,p}$ foi definido como um grafo auxiliar no estudo do problema de particionamento das arestas (HOLYER, 1981). Segundo Ribeiro (2013), “o grafo $H_{l,p}$ é formado por vértices contendo l coordenadas com valores entre 0 e $p - 1$, tal que a soma das l coordenadas seja equivalente a 0 mod p , com $p \in \mathbb{Z}^+$ e existe uma aresta entre dois vértices, quando há um par de coordenadas correspondentes onde os valores diferem por uma unidade”.

Definição 17 (RIBEIRO, 2013). Para $l \geq 3$ e $p \geq 3$, o grafo $H_{l,p} = (V_{l,p}, E_{l,p})$ é:

- $V_{l,p} = \{x = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{Z}_p^l : \sum_{i=1}^l x_i \equiv 0 \pmod{p}\}$;
- $E_{l,p} = \{(x,y) : \text{existem } i, j \text{ que satisfazem } y_k \equiv_p x_k \text{ para todo } k \neq \{i, j\} \text{ e } (y_i \equiv_p x_i + 1, y_j \equiv_p x_j - 1 \text{ ou } y_i \equiv_p x_i - 1, y_j \equiv_p x_j + 1)\}$;

Nas figuras 20a e 20b, apresentamos os grafos $H_{3,3}$ e $H_{3,4}$ respectivamente. Em conjunto com as propriedades dos grafos $H_{l,p}$, embora não sejam planar a representação apresentada é um toro sem cruzamento de arestas, onde também contém repetição de vértices.

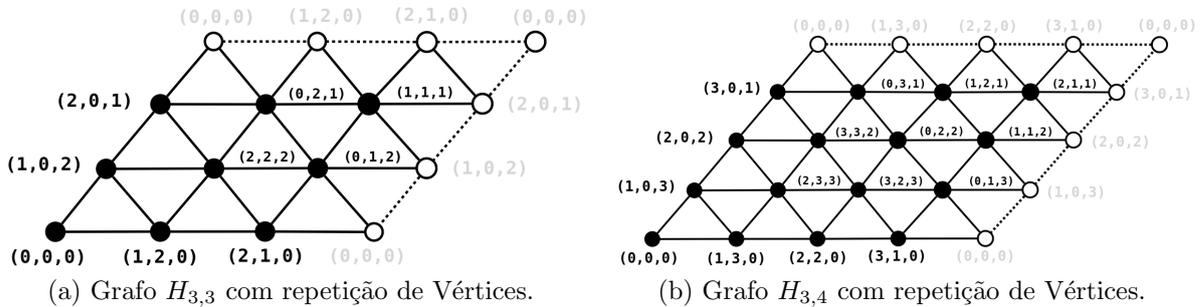


Figura 20 – Representação dos Grafos $H_{l,p}$

Fonte: baseado em Ribeiro (2013).

Podemos observar na figura 20a, que temos para $l = 3$, uma grade de tamanho $p \times p$, embora seja um grafo amplo, colorir de tal forma exige uma complexidade paralela ao processo que seja equivalente.

Lema 5 (HOLYER, 1981). O grafo $H_{l,p}$ tem equivalentemente as seguintes propriedades:

1. o número total de vértices é $n = p^{l-1}$;
2. o grau de cada vértice é $l(l-1)$;
3. o número total de arestas é $\binom{l}{2} p^{l-1}$;
4. se $\log_2 p > l$, então o grau é menor que $\log_2 n$.

Portanto, o lema 5, define as importantes propriedades das figuras 20a e 20b para construção e desenvolvimento dos grafos $H_{l,p}$ e dos estudos da coloração total.

4.2 Coloração de Vértices nos Grafos $H_{l,p}$

Nessa seção, mostraremos as colorações de vértices para os grafos $H_{l,p}$.

O limite inferior da coloração de vértices do grafo $H_{l,p}$ é l , que é o tamanho de sua maior clique. Os grafos $H_{l,p}$ possuem cliques de tamanho l , o limite superior da coloração é dado pelo teorema 3.

Para a coloração dos vértices utilizamos a ordenação do ciclo hamiltoniano encontrado por Ribeiro (2013) e aplicando o método guloso em cima dos vértices demonstrado por Campello (1994), portanto escolha um vértice incolor v se alguma cor c não é usada por nenhum vizinho de v então atribua cor c a v , senão atribua uma nova cor k a v e some 1 a k . Na figura 21 mostramos uma coloração dos vértices para os grafos $H_{3,3}$ e $H_{3,4}$.

Teorema 6 *Seja o grafo $H_{l,p}$, então a coloração de vértices é $l \leq \chi(H_{l,p}) \leq l(l - 1) + 1$.*

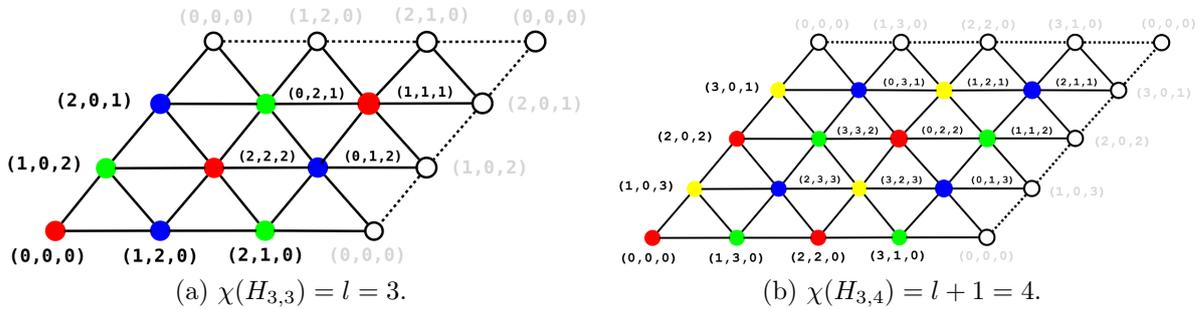


Figura 21 – Coloração de Vértices no Grafo $H_{l,p}$.

Fonte: autoria própria.

Portanto como mostra a figura 21b, para n par com total de 16 vértices o número de colorações possíveis aumenta, o método encontrado para tal solução corresponde a colorir o centro principal de cada subgrafo, com isto, colorimos o próximo vértice interligado juntamente ao vértice principal e o seu inverso com a mesma coloração. Sendo assim, equivale a $l + 1$ coloração, resultando em $\chi = 4$.

4.3 Coloração de Arestas nos Grafos $H_{l,p}$

Nessa seção, mostraremos os resultados da coloração de arestas do grafo $H_{l,p}$ e apresentamos métodos para colorir com no máximo $\Delta + 1$.

Teorema 7 *Seja o grafo $H_{l,p}$ e a cardinalidade de p par, então a coloração das arestas é $\Delta(H_{l,p})$.*

Prova. Para p par, é provado por ciclos alternantes que cada elemento do conjunto gerador de um grafo $H_{l,p}$ quando aplicado p vezes a um vértice, conseqüentemente volta a seu vértice de origem. Essa operação nos gera um ciclo de tamanho par alternando entre duas cores no ciclo, podemos associar essa alternância entre as cores a um elemento e seu inverso. Logo, cada cor é associada a um elemento do conjunto gerador, onde a cardinalidade é dada por $l(l - 1)$. \square

O método para encontrar o número cromático da coloração dos grafos $H_{l,p}$ nas figuras 22a e 22b, é pela decomposição de emparelhamentos. Já que, cada emparelhamento será um subconjunto monocromático de arestas. Obviamente para p par temos sempre um emparelhamento perfeito, o que nos resulta em um número cromático de $\Delta = l(l - 1)$.

Teorema 8 *Seja o grafo $H_{l,p}$ e a cardinalidade de p ímpar, então a coloração das arestas é $\Delta(H_{l,p}) + 1$.*

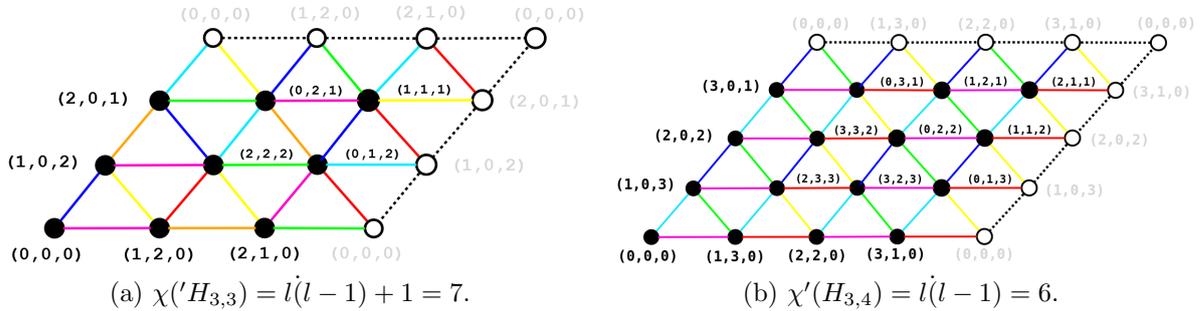


Figura 22 – Coloração de Arestas no Grafo $H_{l,p}$.

Fonte: autoria própria.

Entretanto para p ímpar não temos um emparelhamento perfeito, assim, ao remover um emparelhamento temos uma desigualdade entre $\delta(H_{l,p})$ e $\Delta(H_{l,p})$. Para isso precisamos garantir que essa diferença para cada emparelhamento removido fique em um limite estipulado de 1.

Algoritmo 2: Coloração de Arestas

Entrada: $H_{l,p}$

Saída: k

1 **início**

2 $k \leftarrow 0$

3 $Q \leftarrow \emptyset$

4 **repita**

5 $M \leftarrow \text{Emparelhamento}(G, Q)$

6 $E \leftarrow E - M$

7 $k \leftarrow k + 1$

8 **até** $E = \emptyset$;

9 **fim**

Logo, o Algoritmo 2 é um método que encontra uma coloração mínima dos grafo $H_{l,p}$, pois contém uma lista Q responsável por armazenar os vértices que não foram emparelhados. O algoritmo de emparelhamento sempre escolhe todos os vértices da lista Q para garantir que todas as arestas dos vértices sejam escolhidas. Garantindo que a diferença entre $\delta(H_{l,p})$ e $\Delta(H_{l,p})$ seja 1.

4.4 Coloração Total nos Grafos $H_{l,p}$

Nessa seção, mostraremos uma conjectura para coloração total do grafo $H_{l,p}$. Os grafos apresentados nas figuras 23a e 23b demonstram uma coloração total para os grafos $H_{3,3}$ e $H_{3,4}$, o que confirma a validade da conjectura em questão. Cada coloração foi obtida por meio de métodos diferentes.

Conjectura 2 *Seja o grafo $H_{l,p}$, então $\Delta + 1 \leq \chi''(H_{l,p}) \leq \Delta + 2$.*

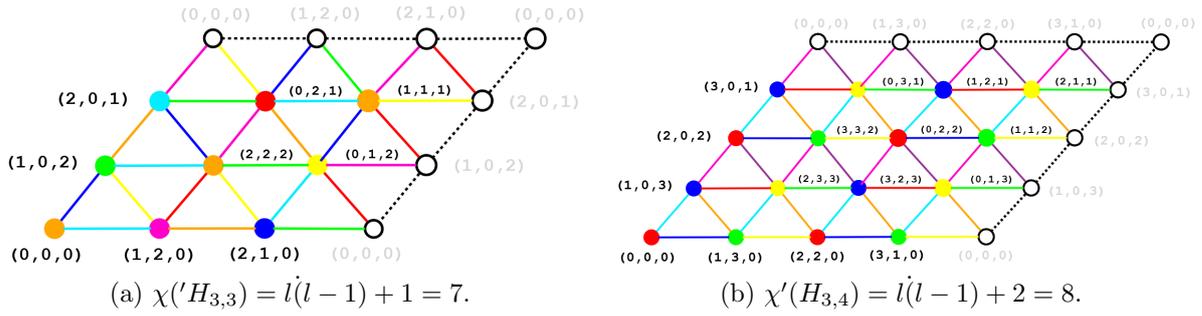


Figura 23 – Coloração Total no Grafo $H_{l,p}$.

Fonte: autoria própria.

A coloração representada do grafo da figura 23a foi obtida por meio de um emparelhamento máximo, seguindo a ideia da coloração de arestas. Para cada vértice não saturado no emparelhamento, atribui-se a cor correspondente ao emparelhamento. Ao finalizar esse processo, os vértices que não foram emparelhados são os vértices diametrais. Infelizmente, não temos a prova que o método seja válido para $p \geq 4$, pois cada emparelhamento gera um vértice livre para cada cor, resultando em $\Delta + 1$ vértices. Além disso, nem sempre é possível encontrar um emparelhamento de tamanho $\lfloor \frac{l(l-1)}{2} \rfloor$, o que pode resultar em vértices que não pertencem a esse emparelhamento, mas que são adjacentes a ele. Isso cria um problema na decisão de qual vértice deve ser colorido com a cor do emparelhamento atual.

Já a coloração da figura 23b, é obtida por meio da coloração das arestas em ciclos, onde as cores são reutilizadas para colorir os vértices. Posteriormente, as arestas restantes são coloridas usando um emparelhamento máximo. Esse método funciona para qualquer grafo $H_{l,p}$, onde p é par e $l = 3$. A condição de paridade em p é necessária porque, ao percorrer um elemento p vezes, retorna-se ao vértice de origem, criando assim um caminho de tamanho p que possibilita uma coloração alternante com 2 cores. A ideia é que os caminhos adjacentes sejam coloridos com cores diferentes, o que requer a utilização de 4 cores distintas. Dessa forma, é possível colorir os demais vértices com essas mesmas cores, e as arestas restantes podem ser emparelhadas perfeitamente, sendo necessário o uso de $\Delta - 2$ cores para sua coloração. Ao final, o número de cores necessário para a coloração total é $\Delta - 2 + 4$, ou seja, $\Delta + 2$.

Com base nessas considerações, podemos concluir que a classe $H_{l,p}$ corrobora com a conjectura da coloração total. No entanto, existem evidências de que a coloração total possa estar relacionada à paridade de p .

5 CONCLUSÃO

Este trabalho descreve o problema da coloração de grafos e seus limitantes inferiores e superiores, sendo em vértices, arestas e total, principalmente nos grafos $H_{l,p}$, elaborando métodos e colorações eficientes para alcançar o resultado de realizar a coloração total no grafo $H_{l,p}$, principalmente pelo seus devidos limites.

Sendo assim, concluímos que para a coloração de vértices utilizamos a ordenação do ciclo hamiltoniano e aplicação do método guloso tendo $l \leq \chi(H_{l,p}) \leq l(l-1) + 1$, para coloração de arestas utilizamos o método de decomposição de emparelhamento tendo $\Delta \leq \chi(H_{l,p}) \leq \Delta+1$ e a total por meio de métodos diferentes sendo $\Delta+1 \leq \chi''(H_{l,p}) \leq \Delta+2$, entretanto, por meio do método de coloração de vértices conseguimos realizar a coloração total dos grafos $H_{l,p}$.

Este trabalho foi submetido para aprovação no LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional que será realizado na cidade de São José dos Campos - São Paulo, sendo organizada pela Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP) e pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).

5.1 Trabalhos Futuros

A coloração de vértices no grafo $H_{l,p}$ por hipótese pode ser melhorado, reduzindo o limite superior da coloração de vértices podendo ser $l+1$, deixando de ser $l(l-1) + 1$ que consequentemente é o limite máximo da coloração dos vértices.

Existe evidências de que a coloração total possa estar relacionada á paridade de p , portanto os métodos da coloração total no grafo $H_{l,p}$ não foi conclusivo podendo ser melhorado também.

Referências

- AIRES, V. Sobre o problema da t -coloração em grafos, algumas variações e algoritmos. Universidade Federal do Amazonas, 2016. Citado na página 11.
- ALVES, R. P. et al. Coloração de grafos e aplicações. 2015. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 13.
- ARROYO, A. S. Determining the total colouring number is np-hard. *Discrete Mathematics*, North-Holland, v. 78, 1989. Citado na página 15.
- BECHER, G. *Coloração total de grafos bipartidos*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019. Citado na página 16.
- BEHZAD, M. *Graphs and their chromatic numbers*. [S.l.]: Michigan State University, 1965. Citado na página 15.
- CAMPELLO, R. *Algoritmos e heurísticas: desenvolvimento e avaliação de performance*. [S.l.]: EDUFF, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- CAYLEY. 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Grafo_de_Cayley&oldid=62003202>. Citado na página 10.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. *Chromatic graph theory*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2008. Citado na página 12.
- COLORAÇÃO. 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Colora%C3%A7%C3%A3o_de_grafos&oldid=64061099>. Citado na página 12.
- COSTA, D. A. F. da. *O Problema da Coloração de Arestas e Coloração Total para Grafos Split 2-Admissíveis*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 15.
- COSTA, P. P. Teoria dos grafos e suas aplicações. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011. Citado na página 5.
- DANTAS, A. *Pontes e Navegador de Posicionamento Global por Satélite*. 2010. Disponível em: <<http://www.autoentusiasclassic.com.br/2010/08/folguedos-pontes-e-gps.html?m=0v>>. Citado na página 2.
- DANTAS, N. M. Sobre o problema da lista coloração em grafos. Universidade Federal do Amazonas, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 2, 4, 5, 6 e 8.
- DONADELLI, J. *Teoria dos Grafos*. 2010. Citado na página 3.
- GONZAGA, L. G. d. S. *Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade e Split-Intervalos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021. Citado na página 14.
- HIPERCUBO. 2019. Disponível em: <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Grafo_hipercubo&oldid=120689676>. Citado na página 10.

- HOLYER, I. The np-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on computing*, SIAM, v. 10, n. 4, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- JENSEN, T. R. Dense critical and vertex-critical graphs. *Discrete Mathematics*, North-Holland, v. 258, n. 1-3, 2002. Citado na página 8.
- KONSTANTINOVA, E. Some problems on cayley graphs. *Linear Algebra and its applications*, Elsevier, v. 429, n. 11-12, 2008. Citado na página 9.
- LIMA, A. M. Algoritmos exatos para os problema da coloração de grafos. 2017. Citado na página 11.
- LOUREIRO, A. A. F. Grafos. *Disponvel em: http://homepages.dcc.ufmg.br/loureiro/md/md_Grafos.pdf*, v. 20, 2015. Citado na página 7.
- LOZANO, D. Modelagem matemática e aplicações do problema de coloração em grafos. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2007. Citado na página 11.
- OSTROSKI, A.; MENONCINI, L. Aplicações práticas da teoria dos grafos. *Pato Branco: XIII ERMAC*, 2009. Citado na página 1.
- PEREIRA, G. M. R.; CÂMARA, M. A. Algumas aplicações da teoria dos grafos. *Universidade Federal de Uberlândia. FAMAT em Revista*, 2008. Citado na página 2.
- PONTES, E. A. S. Uma proposta metodológica processo ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. *Ensino em Foco*, v. 2, 2019. Citado na página 3.
- POSNER, D. F. D. *Sobre $L(2, 1)$ -Colorações de Classes de Grafos*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.
- PROTTI, F. *Classes de Grafos Clique Inversos*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil, 1998. Citado na página 6.
- RABUSKE, M. A. *Introdução a Teoria dos Grafos*. [S.l.]: Editora da UFSC, 1992. Citado na página 12.
- RIBEIRO, A. da C. *Sobre Grafos De Cayley, Permutações e Circuitos Reversíveis*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 5, 9, 10, 19 e 20.
- ROCHA, A. et al. *Coloração Arco-Íris em Classes de Grafos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2020. Citado na página 3.
- SANTOS, H. G.; REGO, M. F. Algoritmos para o problema de coloração de grafos. *Computational optimization and applications*, v. 19, 2001. Citado na página 1.
- SIQUEIRA, A. S. *Coloração Total Equilibrada em Subfamílias de Grafos Regulares*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2011. Citado na página 12.
- SOUSA, L. O teorema das quatro cores. *Millenium*, Instituto Politécnico de Viseu, 2001. Citado na página 11.

SOUZA, A. R. R. *Clique de um Grafo*. Universidade Federal de Pelotas, 2012. Disponível em: <http://ubiq.inf.ufpel.edu.br/arrsouza/lib/exe/fetch.php?media=clique_de_um_grafo.pdf>. Citado na página 6.

VASCONCELOS, D. S. Coloração em grafos e aplicações. Mestrado Profissional em Matemática, 2018. Citado na página 7.

VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Discret Analiz*, v. 3, 1964. Citado na página 14.

VIZING, V. G. Some unsolved problems in graph theory. *Russian Mathematical Surveys*, IOP Publishing, v. 23, n. 6, p. 125, 1968. Citado na página 15.

WILSON, R. J. *Graphs and Their Uses*. [S.l.]: Washington: The Mathematical Association of America, 1990. v. 34. Citado na página 2.