



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,
CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO
CAMPUS URUTAÍ**



**CURVAS PARAMETRIZADAS DIFERENCIÁVEIS:
Parametrização de curvas planas e um teorema geral de
classificação**

URUTAÍ – GO
2016

GENIFFER PEREIRA DE SOUZA LUZ

**CURVAS PARAMETRIZADAS DIFERENCIÁVEIS:
Parametrização de curvas planas e um teorema geral de
classificação**

Trabalho de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Goiano – Campus Urutaí para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Ma. Wérica Pricilla de Oliveira Valeriano Santos.

URUTAÍ – GO
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/IF Goiano Câmpus Uruta

L979c Luz , Geniffer Pereira de Souza.

Curvas parametrizadas diferenciáveis: parametrização de curvas planas e um teorema geral de classificação [manuscrito] / Jenifer Vaz Fernandes. -- Urutaí, GO: IF Goiano, 2017.
64 fls.

Orientadora: Mestra Wérica Pricylla de Oliveira Valeriano Santos.

Monografia (Graduação) - Instituto Federal Goiano Campus Urutaí, 2017.

1. Geometria diferencial. 2. Curvas planas. 3. Classificação de curvas . I. Título.

CDU 51

Trabalho de Curso apresentado como exigência para a obtenção do Título de
Graduação em Licenciatura em Matemática no Instituto Federal Goiano
Campus Urutaí.

Aprovado em 18 / 11 / 2016.

BANCA EXAMINADORA:

Wérica Pricylla de Oliveira Valeriano

Prof. Ma. Wérica Pricylla de Oliveira Valeriano – Orientadora

Ricardo Gomes Assunção

Prof. Me. Ricardo Gomes Assunção – membro interno

Ricardo da Silva Santos

Prof.^a Me. Ricardo da Silva Santos – membro externo

Dedico este trabalho a todos os meus professores, desde o primário, mas principalmente aos meus professores de graduação, pois durante esta trajetória acadêmica se comprometeram em ensinar com carinho, amor e dedicação, em especial ao professor Dassael.

À Deus...

À minha orientadora...

À minha família...

Aos professores...

Ao Dassael...

À minha turma e amigos...

“Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto, para a geometria, que o estudo de Os elementos, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria.”

Proclo Diadoco

RESUMO

A geometria diferencial constitui uma das principais ferramentas para o estudo de curvas parametrizadas diferenciáveis. O presente trabalho tem por objetivo estudar propriedades destas curvas, seja no plano ou no espaço, utilizando os métodos e ferramentas clássicos do cálculo diferencial e integral. Neste sentido, as principais curvas planas abordadas aqui são: Ciclóide, Tractriz, Cissóide de Diócles, Catenária, Lemniscata de Bernoulli, Cardioide, Astróide, Feiticeira de Agnesi, ao passo que a principal curva abordada aqui é a Hélice. Para isto, será realizado um estudo teórico detalhado preliminar sobre a geometria diferencial das curvas planas e espaciais, por meio de resultados e propriedades que fundamentam esta teoria. Conceitos clássicos como parametrização de curvas, comprimento de arco, curvatura, torção e a teoria local de Frenet também serão abordados aqui. Concluindo, como objetivo principal deste trabalho, mostra-se por meio de um teorema geral, que certas curvas no plano e no espaço podem ser classificadas através de informações dadas sobre a sua curvatura e sua torção.

Palavras-chave: Geometria diferencial. curvas planas. classificação de curvas.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Representação geométrica da definição de curva	20
Figura 2.2: Circunferência com centro na origem e raio 1	21
Figura 2.3: Espiral de Arquimedes definida no intervalo $I = [0,5\pi]$ e $a = 1$	22
Figura 2.4: Parametrização da Elipse	22
Figura 2.5: Uma curva não diferenciável.....	23
Figura 3.1: Ciclóide	30
Figura 3.2: Tractriz	32
Figura 3.3: Cissóide de Diócles.....	34
Figura 3.4: Construção da Cissóide de Diócles.....	35
Figura 3.5: Cardióide.....	38
Figura 3.6: Construção da Cardióide no caso $P' < B$	38
Figura 3.7: Construção da Cardióide no caso $P' > B$	40
Figura 3.8: Catenária.....	41
Figura 3.9: Lemniscata de Bernoulli	43
Figura 3.10: Astróide	45
Figura 3.11: Feiticeira de Agnesi.....	47
Figura 4.1: Espiral Logarítmica.....	51
Figura 4.2: Triedro Móvel de Frenet.....	52
Figura 4.3: Hélice	53

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
1 UM CONTEXTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA DIFERENCIAL	11
1.1 Uma Rápida Abordagem Cronológica da História da Geometria Diferencial	13
2 CURVAS PARAMETRIZADAS DIFERENCIÁVEIS PLANAS	19
2.1 Definições e Primeiras Propriedades	19
3 PARAMETRIZAÇÃO DE ALGUMAS CURVAS PLANAS	29
3.1 Ciclóide	29
3.2 Tractriz	31
3.3 Cissóide de Diócles.....	33
3.4 Cardióide.....	37
3.5 Catenária.....	40
3.6 Lemniscata de Bernoulli	42
3.7 Astróide.....	44
3.8 Feiticeira de Agnesi	46
4 CURVAS ESPACIAIS E UM TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE CURVAS	49
4.1 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis em \mathbb{R}^3	49
4.2 Classificação de Curvas Diferenciáveis	56
4.2.1 Demonstração do Teorema 4.1	56
CONCLUSÃO	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63

INTRODUÇÃO

O estudo de curvas em geometria diferencial constitui, talvez, em um dos mais importantes conceitos no que se refere a esta área da matemática. O procedimento de análise e construção destas curvas é considerado ferramenta base para o desenvolvimento da Geometria Diferencial, sendo indispensáveis para o estudo de superfícies e da geometria intrínseca de Gauss. Basicamente, a geometria diferencial é o estudo da geometria utilizando as ferramentas do cálculo diferencial e integral. Esta geometria se divide em duas partes: curvas e superfícies. O foco deste trabalho é somente sobre o estudo e propriedades das curvas diferenciáveis no plano e no espaço.

A noção de curva é bastante simples, muito conhecida e não demanda um grande conhecimento de matemática para descrever seus fundamentos e suas propriedades. O trabalho que é proposto aqui restringe-se à definir e caracterizar certos subconjuntos não vazios do plano e do espaço, denominados curvas, que são caracterizados por meio de funções diferenciáveis, estudando, através das ferramentas do cálculo diferencial e integral, o comportamento destes objetos geométricos nas vizinhanças imediatas de qualquer um de seus pontos. Tal estudo é hoje conhecido na matemática como geometria diferencial local.

De um modo mais preciso, este trabalho é um conjunto de informações que tem por objetivo maior fazer uma exposição bibliográfica e uma caracterização da geometria diferencial das curvas planas através da descrição dos conceitos e propriedades que fundamentam este estudo, produzindo exemplos e resultados que solidificam o conhecimento matemático adquirido e realizando algumas aplicações deste estudo para construção de algumas curvas.

O presente trabalho se baseará em pesquisas bibliográficas, onde coletaremos informações que nos auxiliem a desenvolver o projeto com o maior nível de precisão e rigor possível. Além disso, foram utilizados softwares matemáticos de computador como, por exemplo, o Geogebra, para plotar as figuras que serão apresentadas ao decorrer do texto. A bibliografia utilizada para compor este trabalho está relacionada abaixo nas referências bibliográficas.

Com este intuito, o trabalho está segmentado em quatro capítulos, com o objetivo de estudar e aprimorar o conhecimento das curvas na geometria diferencial.

No primeiro capítulo será exposto um breve relato histórico da geometria diferencial apresentado, de forma cronológica, os principais fatos e pesquisadores que contribuíram para o avanço e desenvolvimento desta área. Neste sentido, pode-se notar a influência de grandes nomes da matemática no desenvolvimento desta geometria como, por exemplo, Gauss e Riemann. Este último é talvez o nome mais relevante no que tange ao estudo da geometria diferencial, devido a grande importância e precisão de seus trabalhos.

O segundo capítulo propõe-se a fazer um estudo teórico sobre curvas planas. Neste contexto, a preocupação foi abordar os principais conceitos de que trata este estudo. O ponto de partida do capítulo é compreender o que se entende por curva plana em geometria diferencial e, a partir disto, utilizando as ferramentas do cálculo, definir entidades geométricas importantes para o avanço deste estudo como, por exemplo, vetor tangente e vetor normal, comprimento de arco, curvatura e as fórmulas de Frenet, que são objetos importantes para a construção da teoria das curvas e, conseqüentemente, para as superfícies diferenciáveis.

No terceiro capítulo são feitas algumas aplicações dos conceitos abordados no capítulo 2. O objetivo principal é apresentar e parametrizar algumas curvas planas que surgem constantemente nos vários segmentos da matemática. Mais precisamente, serão apresentadas as seguintes curvas: Ciclóide, Tractriz, Cissóide de Diócles, Cardióide, Catenária, Lemniscata de Bernoulli, Astróide e a Feiticeira de Agnesi. Além disso, quando possível, será apresentada a expressão que determina a curvatura da curva em cada ponto.

Por fim, o capítulo quatro, está dividido em duas partes. Na primeira parte será realizado um estudo teórico sobre curvas espaciais com intuito de deixar mais geral os conceitos sobre curvas planas. Na segunda parte, será demonstrado um teorema de classificação de curvas por meio de características relacionadas à curvatura e torção. Mais precisamente, conhecida a curvatura, torção ou alguma relação entre elas, pode-se classificar esta curva em um dos seguintes tipos: retas (curvas de curvatura nula), circunferências (curvas planas de curvatura constante, com exceção das retas), curvas planas (curvas de torção nula), hélices (curvas cuja curvatura é um múltiplo da torção) e as curvas de Bertrand (curvas onde a curvatura e torção satisfazem certa relação linear).

1 UM CONTEXTO HISTÓRICO DA GEOMETRIA DIFERENCIAL

O termo “Geometria” tem origem do grego antigo e significa medir a terra. O surgimento da geometria se deu devido a necessidade de demarcação territorial, possivelmente para o plantio, sendo esta uma das principais atividades humanas desde a antiguidade. Em termos gerais, a geometria é a parte da matemática que estuda os elementos e propriedades do espaço (área, volume, comprimento, ângulo) e possui inúmeras aplicações em outras áreas das ciências. Uma área de grande importância e abrangência em pesquisa na geometria é o estudo da Geometria Diferencial. De um modo específico, a Geometria Diferencial é o estudo da geometria utilizando as técnicas e ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral.

A geometria diferencial é o estudo das propriedades das curvas e superfícies, e suas generalizações, por meio do cálculo. Na maior parte dos casos, a geometria diferencial investiga as curvas e superfícies nas vizinhanças imediatas de qualquer de seus pontos. Conhece-se esse aspecto da geometria diferencial como geometria diferencial local. [...] provavelmente é mais correto dizer-se que a geometria diferencial, pelo menos em sua forma moderna, começou nas décadas iniciais do século XVIII, com aplicações do cálculo diferencial integral à geometria analítica. (EVES, 2011, 601-602)

Não há um registro do marco inicial para o estudo da geometria entre os antigos historiadores, no entanto, relatos históricos começam por volta de 3000 a.C. na antiga Babilônia, com o estudo da geometria conhecida por Geometria Primordial. Em 332 a. C. Alexandre “O Grande” aumenta seus territórios e edifica a cidade de Alexandria, no Egito, um dos grandes centros intelectuais da época, onde o militar Ptolomeu I convida o grande matemático Euclides (325 a.C. a 265 a.C) para tomar conta do departamento de Matemática da nova academia de Alexandria.

Neste período, Euclides reúne quase todos os conhecimentos matemáticos até aquela época em uma esplêndida coleção de 13 volumes denominada “Os Elementos” (A segunda obra mais publicada no mundo). Nesta obra, Euclides também redige sobre seu método axiomático auxiliando o desenvolvimento de uma teoria. Certo que, dentre os dez axiomas de sua obra, cinco deveriam ser verdades absolutas à comunidade científica, e os outros cinco deveriam ser proposições,

também, aceitas sem oposições. Através destes dez axiomas é que Euclides desenvolve o seu trabalho deduzindo 465 proposições.

¹Os primeiros resultados vistos na geometria diferencial indicam-se que foram estudados por Euclides (325 a.C.-265 a.C.), Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) e Apolônio de Perga (262 a.C.-194 a.C.) nos estudos de curvas notáveis.

No entanto, as noções atuais da geometria diferencial começam por volta de 1828 com o matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em seu trabalho intitulado *“Disquisitiones generales circa superficies curva”*. Nesta mesma época, Gauss juntamente com os matemáticos Nikolai Lobachewisky (1792-1856) e Janos Bolyai (1802-1860) descobrem as geometrias não-euclidianas, ao resolver o conhecido problema das “Retas Paralelas” enunciado por Euclides da seguinte forma:

“Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos”.

Gauss fez inúmeras contribuições para o desenvolvimento da matemática, principalmente no que diz respeito ao cálculo diferencial e integral e das Geometrias não-euclidianas. No que tangencia a geometria diferencial, Gauss provou em seus estudos um dos mais importantes teoremas para o estudo das superfícies, à saber, o Teorema ¹Egregium de Gauss. Em essência, este teorema garante que a curvatura (gaussiana) de uma determinada superfície situada no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 depende somente de sua métrica, isto é, a curvatura de uma superfície é preservada se esta superfície for modificada em outra por meio de uma transformação isométrica. Com este teorema, Gauss mostrou que pode-se estudar as propriedades da geometria de uma superfície sem se preocupar com o espaço em que a superfície está mergulhada. Além disso, Gauss conseguiu obter uma expressão para a curvatura da superfície em termos dos coeficientes da métrica (isto é, coeficientes da Primeira Forma Quadrática) e de suas derivadas.

O estudo da geometria de uma superfície, não se preocupando com o espaço ambiente, é hoje conhecida como geometria intrínseca de Gauss.

¹Todos os dados históricos do texto foram embasados em COIMBRA (2008) e EVES (2011)

²Egregium: em português egrégio, é um adjetivo que significa digno de admiração, notável, magnífico.

Já em 1854, a Universidade de Gottingen, situada na Alemanha, exigia a apresentação de um trabalho próprio na admissão de seus docentes e, com isto, o matemático Georg Friedrich Riemann (1826-1866), um dos grandes gênios da matemática e outra figura importante nos estudos da geometria diferencial, apresenta seu trabalho intitulado “*As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria*”, com o objetivo de obter uma cadeira no quadro de docentes desta universidade.

Este trabalho é considerado o marco zero da criação atual da *geometria riemanniana* e nele a noção de “espaço” é tomada como sendo resultado da “colagem” de abertos do \mathbb{R}^n sendo que a cada ponto é associada uma forma quadrática que hoje chamamos de métrica. A partir da métrica, Riemann definiu as geodésicas como sendo as curvas que localmente minimizam distâncias entre pontos e, também, a noção de curvatura seccional. A noção de curvatura gaussiana surgiu no trabalho de Gauss. (COIMBRA, 2008, p. 4)

Ademais, Riemann fundamentou o conceito de curvatura seccional através do Teorema Egregium de Gauss. Também, em 1869, os matemáticos Elwin Christoffel e Rudolf Lipschitz apresentaram a fórmula para calcular a curvatura seccional, assim coube a Riemann estabelecer o conceito e Christoffel juntamente com Lipschitz encontrar a expressão da curvatura seccional.

1.1 Uma Rápida Abordagem Cronológica da História da Geometria Diferencial

De maneira geral, a história da geometria diferencial começa pelo matemático Euclides de Alexandria, conhecido pelo seu método axiomático, contribuindo, assim, nas primícias da base da geometria. Após Euclides, figuram os matemáticos Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga, suas contribuições são relacionadas aos seus vastos conceitos sobre as curvas vistas na geometria diferencial.

Seguindo a linha da história da geometria diferencial, aparecem os franceses Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), e à esses dois personagens atribui-se a criação da Geometria Analítica, que permite localizar cada ponto de coordenadas (x, y) de um ponto no espaço bidimensional e (x, y, z) de um

ponto no espaço tridimensional. A Geometria Analítica é uma forte estrutura de apoio aos conceitos da Geometria Diferencial, principalmente ao que diz respeito a parametrização de uma curva. Vale ressaltar que a partir deste ponto a geometria começa a fazer relação com a álgebra.

No século XVII, aparecem o alemão Gotfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1649-1727). A estes se devem a criação do Cálculo Diferencial e Integral, através de algoritmos, usando as propriedades diferenciais das curvas e superfícies, e ainda produziram aplicações do Cálculo Diferencial à Geometria Analítica de Descartes e Fermat.

Nas contribuições para o desenvolvimento da Geometria Diferencial, também, aparece o matemático holandês Christian Huygens (1629-1695). Huygens contribuiu de forma grandiosa para o estudo da Geometria Diferencial, ao descrever e caracterizar os conceitos de evolutas e involutas de uma determinada curva.

Mais tarde, em 1731, o matemático francês Aléxis Clairaut (1713-1765) faz um importante estudo para a geometria das curvas, ao analisar o comportamento da reta tangente em um ponto de uma curva, decorrente da derivada de primeira ordem neste ponto.

Posteriormente, representando os estudos sobre curvatura e torção de uma curva, figura o matemático Gaspard Monge (1746-1818). Monge é denominado o pai da Geometria Diferencial, devido a importância de seu trabalho.

Além do estudo de sombra, perspectiva e topografia, dava atenção a propriedades de superfícies incluindo retas normais e planos tangentes, e a teoria das máquinas. Entre os problemas propostos por Monge, por exemplo, estava o de determinar a curva de intersecção de duas superfícies cada uma das quais é gerada por uma reta que se move de modo a cortar três retas reversas no espaço. (BOYER, 2010, p. 327)

Monge inspirou inúmeros matemáticos à trabalhar com esta área da geometria. Dentre eles destacam-se Dupin (1784-1873) e Olinde Rodrigues (1794-1851) cujos nomes estão intimamente ligados ao estudo da Geometria das Superfícies de tal forma que foram homenageados com seus nomes nas “superfícies de Dupin” e no “Teorema de Olinde”.

O suíço Leonhard Euler (1707-1783), foi um ilustre matemático, discípulo do grande matemático Johannes Bernoulli (1667-1748), que fez grandes contribuições para o desenvolvimento da matemática. Euler é hoje considerado um dos maiores

matemáticos já existentes, condigno com a magnitude de sua obra. Dentre seus estudos mais relevantes em Geometria Diferencial está o estudo de secções planas de superfícies e métodos de planificação de cilindros e cones.

Pode-se dizer que enquanto o século dezessete foi o século das curvas – a cicloide, o *limaçon*, a catenária, a lemniscata, a espiral equiangular, as hipérbolas, parábolas e espirais de Fermat, as perolas de Sluse, e muitas outras – o século dezoito foi o que realmente iniciou o estudo de superfícies. Foi Euler quem chamou a atenção sobre as quadráticas formando uma família análoga à das cônicas, e sua *Introductio* num certo sentido deu a base da geometria analítica no espaço. (BOYER, 2010, p. 327)

Na Geometria Diferencial, Euler foi homenageado com seu nome em uma das mais conhecidas expressões da geometria clássica: a característica de Euler. Esta fórmula relaciona as principais características de um sólido geométrico, à saber, a aresta, a face e o vértice do objeto. A característica de Euler é dada por:

$$\chi = \text{Vértice} - \text{Aresta} + \text{face}.$$

Jean Meusnier (1754-1793) também fez importantes contribuições para o desenvolvimento da geometria diferencial. Seu principal trabalho trata sobre curvaturas normais. Neste trabalho, Meusnier prova um dos principais resultados sobre curvatura, mais precisamente, ele mostra que “todas as curvas de uma superfície que têm, em um ponto, a mesma reta tangente, têm nesse ponto a mesma curvatura normal”.

Por volta de 1826, o matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) publicou a obra “*Leçons sier l’ application do calcule infinitesimal á la géométric*”, que contribuiu nos estudos da geometria diferencial. Neste trabalho, Cauchy aprimora os estudos sobre curvatura e torção de uma curva, conseqüentes dos estudos de Monge. Com isto, Cauchy mostra que, à menos de sua posição no plano, uma curva fica completamente determinada por sua curvatura e torção (Mais tarde, este resultado ficou conhecido como Teorema Fundamental das Curvas Espaciais). Cauchy também fez estudos sobre o comportamento local de uma curva por meio das equações de Frente-Serret.

No entanto, o estudo da Geometria Diferencial só se concretizou e teve maior avanço com os matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Bernhard Riemann (1826-1860), ambos naturais da Alemanha. Em 1820, Gauss recebe o convite do reino de Hanover, a fim de ajudar a fazer uma listagem da topografia da

região e a sua observação a respeito da topografia o levou a publicar um de seus principais trabalhos, em 1827, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

É famosa a afirmação de Gauss de que “a matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática”. Já se descreveu Gauss como o “gigante matemático que do alto de sua magnitude abarca num relance as estrelas e o abismos”. Gauss era um perfeccionista quanto a seus escritos matemáticos. Asseverando que uma catedral não é um catedral até que se retire o último de seus andaimes. (EVES, 2011, p. 521)

Entretanto, é em 1828 que Gauss publica seu principal trabalho, resultado de seus estudos, o *Teorema Egregium*. Este teorema diz que a curvatura gaussiana de uma superfície não depende de sua imersão na superfície, como noção direta, mas sim que a curvatura desta superfície é uma constante que depende apenas da dimensão da superfície, da angulação e da distância. Já Riemann apresenta em 1854 a dissertação “*As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria*”.

Quando na dissertação examina a hipótese de Euclides, segundo a qual tanto as linhas como os corpos têm uma existência independente da posição, está de fato lançando, indiretamente, as primeiras idéias de uma concepção inteiramente nova do espaço. (SALDANHA, 1988, p. 90)

Neste trabalho, Riemann introduz o conceito de métrica riemanniana e de variedade, que generaliza o conceito de superfície, uma vez que tais conceitos são tratados em espaços de dimensão infinita. Este trabalho foi um divisor de águas no estudo da Geometria Diferencial, pois generaliza a geometria de Gauss e dá origem à uma nova geometria, conhecida como Geometria Riemanniana.

Neste cenário, também figura o italiano Eugênio Beltrami (1835-1900), conhecido por criar a primeira superfície que obedecia as propriedades da Geometria Hiperbólica. Este modelo de superfície é originário de suas contribuições à geometria diferencial de curvas e superfície, onde Beltrami se questiona sobre as geodésicas (a menor distância entre dois pontos em uma superfície), e conclui que as geodésicas podem possuir curvatura constante dependendo da superfície em que se está trabalhando. Este resultado culminou na sua principal descoberta, em 1868, a pseudo-esfera (o modelo da Geometria Hiperbólica).

Após Beltrami, surge o alemão Félix Klein (1849-1925) e Henry Poincaré (1854-1912), apresentando seus modelos de superfície para a geometria não-

euclidiana. Klein descobre que a geometria não-euclidiana não anula a geometria euclidiana, ao evidenciar que suas características e propriedades são casos particulares do modelo de superfície onde está contido o plano. Assim, Klein através da teoria de grupos deu credibilidade à todas geometrias, em seu programa Erlanger Programm.

Esse programa de Klein, que veio a chamar-se o Erlanger Programm, descrevia a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações. Portanto, toda classificação de grupos de transformações torna-se uma codificação das geometrias. [...] Tão contagiante era seu entusiasmo que algumas figuras do fim do século dezenove profetizaram que não só a geometria mas finalmente toda matemática viria a ser contida na teoria de grupos. (BOYER, 2010, p.379-380)

Pierre Bonnet (1819-1892), de origem francesa, também tem destaque na história da Geometria Diferencial, uma vez que seus esforços o levaram a mostrar os conceitos da curvatura geodésica nas superfícies, ao introduzir o Teorema de Gauss-Bonnet. Mais tarde, os matemáticos italianos Túlio Levi-Civita (1873-1941) e Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) estudam outro importante resultado da geometria diferencial no que se refere a geodésica: o transporte de vetores paralelos. Além disso, eles também introduziram o conceito de derivada parcial em superfícies.

Em 1839 o matemático Ernst Minding (1806-1885), natural da Polônia, anuncia “que duas superfícies de mesma curvatura gaussiana constante são localmente isométricas” este teorema é parte do Teorema Egregium. Já fórmulas conhecidas como “As fórmulas de Frenet-Serret” nos livros de Geometria Diferencial são produtos dos estudos emancipados dos franceses Jean Frenet (1806-1885) e Joseph Serret (1819-1885), ao observar o comportamento de uma curva no espaço bidimensional e tridimensional.

Outro protagonista desta história é o francês Jacques Salomon Hadamard (1865-1963). Hadamard fez grandes estudos na área da geometria, dentre suas principais obras está “*Leçons de Géométrie Élémentaire*”, publicado seu primeiro volume em 1898 e o segundo em 1901. “Hadamard provou dois importantes teoremas globais em Geometria Diferencial envolvendo difeomorfismos entre superfícies regulares completas”. Coimbra (2008)

Por fim, outra figura que contribuiu de forma primorosa para o desenvolvimento da Geometria Diferencial foi o matemático alemão David Hilbert (1862-1943). Hilbert, propõe 21 axiomas e os organiza nos seguintes grupos: axiomas de incidência, axiomas de ordem, axiomas de congruência, axiomas das retas paralelas e axiomas de continuidade. Nas suas contribuições a geometria diferencial, Hilbert prova o *Teorema da Rigidez da Esfera* enunciado da seguinte maneira: “*Seja S uma superfície regular, conexa, compacta e com curvatura m gaussiana constante. Então S é uma esfera*”.

Nos dias de hoje, a Geometria Diferencial ainda se desenvolve de forma grandiosa por inúmeros matemáticos distribuídos por todas as partes do mundo. Dentre os mais conhecidos está o matemático brasileiro Manoel de Almeida Pereira do Carmo, Ketil Tenenblat, Fernando Coda, Hilário Alencar e seus orientados.

No próximo capítulo será feito um estudo teórico sobre as curvas diferenciáveis parametrizadas no plano apresentando, por meio de definições, exemplos, resultados e propriedades, os conceitos que mais se destacam neste estudo, com o objetivo de dar um embasamento teórico e especial para a construção do restante deste trabalho.

2 CURVAS PARAMETRIZADAS DIFERENCIÁVEIS PLANAS

Neste capítulo serão estabelecidas definições e propriedades sobre curvas planas. Mais precisamente, será definido o conceito de curva no plano e algumas de suas características principais como, por exemplo, existência de vetor tangente, vetor normal, comprimento de arco, curvatura e, também, será enunciado um teorema de existência e unicidade de curvas conhecido como Teorema Fundamental das Curvas Planas. Além disso, serão apresentados alguns exemplos de curvas parametrizadas planas como forma de dar clareza aos conceitos introduzidos. O objetivo principal deste capítulo é fazer um estudo introdutório sobre curvas planas com intuito de fazer aplicações e obter o conhecimento necessário para construção dos próximos capítulos e, também, para atingir o objetivo do trabalho como um todo.

2.1 Definições e Primeiras Propriedades

Nesta seção serão apresentados conceitos básicos e propriedades sobre o estudo das curvas planas, tais como, vetor tangente, vetor normal, regularidade de curva, comprimento de arco, fórmulas de Frenet, curvatura, além de uma breve apresentação do Teorema Fundamental das Curvas Planas. Também, serão classificadas algumas curvas no plano com o objetivo de dar base para a construção dos próximos capítulos.

No contexto de Geometria Diferencial, em vez de considerarmos curvas definidas por equações, vamos retornar à ideia intuitiva que uma curva deve descrever a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. Se considerarmos que um ponto $\gamma(t)$ representa a posição de uma partícula em movimento contínuo, quando o tempo t varia em um intervalo $[a, b]$, o conjunto que iremos considerar é $C = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [a, b]\}$. A vantagem dessa abordagem é que ela poderá ser facilmente formalizada e conterá várias informações sobre como o ponto $\gamma(t)$ percorre o conjunto C , o sentido que o ponto “anda” sobre C : podemos definir sua velocidade, sua aceleração, etc.. (ALENCAR e SANTOS, 2002, p. 14)

O ponto de partida para este estudo será o conceito de curva plana dado à seguir.

Definição 2.1: Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ , onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} . Neste caso, vamos denotar

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

onde $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ , $t \in \mathbb{R}$ é o parâmetro da curva γ e o subconjunto $\{\gamma(t); t \in I\}$ formado pela imagem do intervalo I por meio da aplicação γ é chamado traço de γ (veja figura 2.1). Além disso, γ é dita regular se $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Neste contexto, $\gamma \in C^\infty$ significa que γ é suficientemente suave, mais precisamente, que γ possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens em todos os pontos de I .

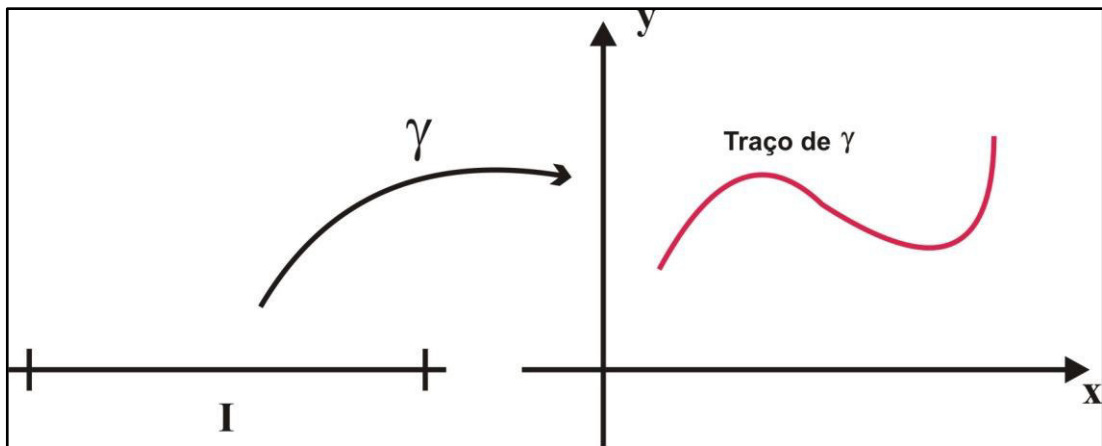


Figura 2.1: Representação geométrica da definição de curva.
Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no CorelDraw em 16/09/2016

Em geral, as curvas planas são objetos geométricos que surgem com naturalidade em matemática como, por exemplo, no estudo das cônicas em geometria analítica e no estudo das integrais em funções de variável complexa e são conceitos fundamentais para o estudo das superfícies e da geometria de Riemann.

Se a curva γ está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados de ponto inicial de γ e ponto final de γ , respectivamente. [...] Se γ está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$, dizemos que γ é uma curva fechada. (ALENCAR e SANTOS, 2002, p.15)

À seguir serão apresentados exemplos de curvas parametrizadas em \mathbb{R}^2 que aparecem constantemente na geometria diferencial.

Exemplo 2.1: A curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de equação

$$\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt), \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma reta em \mathbb{R}^2 que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem a direção do vetor (a, b) .

Exemplo 2.2: A curva $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de equação

$$\gamma(t) = (x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t)), \quad r > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma circunferência em \mathbb{R}^2 de centro no ponto (x_0, y_0) e raio $r > 0$. De fato, considere a circunferência C centrada na origem e de raio $r > 0$ com equação cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto de C e seja t o ângulo formado entre o segmento que liga P à origem e o eixo das abscissas (ou seja, o raio). Se $x(t)$ é a projeção de P sobre o eixo- x e $y(t)$ é a projeção de P sobre o eixo- y , considerando o triângulo $\Delta_{POx(t)}$, tem-se que $r\cos(t) = x(t)$ e $r\sin(t) = y(t)$.

Logo, a curva dada por $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, é uma parametrização da circunferência de raio $r > 0$ e centro na origem. Fazendo uma translação do centro desta circunferência para o ponto (x_0, y_0) encontra-se a parametrização de $\gamma(t)$.

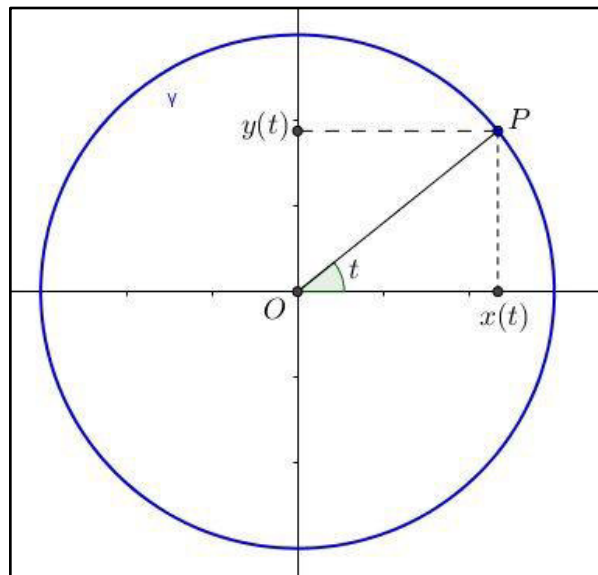


Figura 2.2: Circunferência com centro na origem e de raio 1
Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 16/09/2016

Exemplo 2.3: A curva $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de equação

$$\gamma(t) = (at \cos(t), at \sin(t)), \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é chamada espiral de Arquimedes e é definida em $I = [0, +\infty)$.

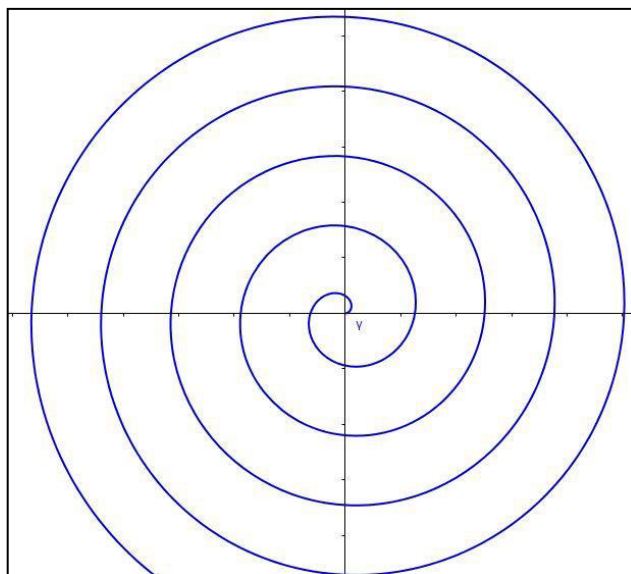


Figura 2.3: Espiral de Arquimedes definida no intervalo $I = [0, 5\pi]$ e $a = 1$
 Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 16/09/2016

Exemplo 2.4: A curva $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de equação

$$\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é uma curva diferenciável parametrizada cujo traço é uma elipse em \mathbb{R}^2 de centro na origem com a e b , números reais positivos, e $a > b$, de equação cartesiana dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para obter uma parametrização desta elipse procede-se da seguinte forma: sejam $P = (x(t), y(t))$ um ponto da elipse e C_1 e C_2 circunferências de centros na origem e raios a e b , respectivamente, como pode ser visto na figura 2.4 à seguir.

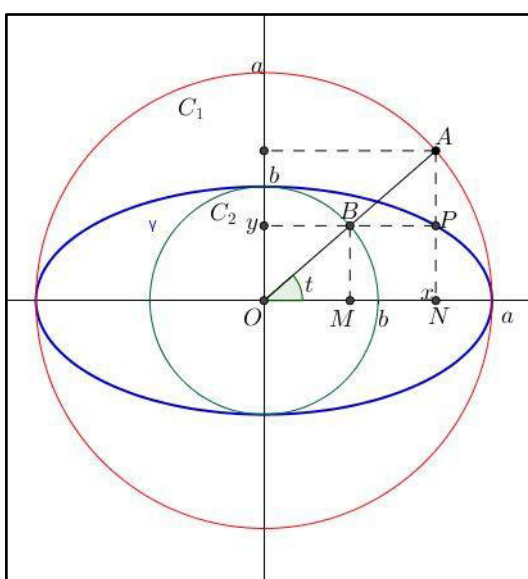


Figura 2.4: Parametrização da elipse
 Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 17/09/2016

Marca-se sobre a circunferência C_1 (de raio a) um ponto A de abscissa $x(t)$ e sobre a circunferência C_2 (de raio b) um ponto B de ordenada $y(t)$, onde o parâmetro t é o ângulo formado entre a semi-reta \overline{AO} e o eixo das abscissas e $0 \leq t \leq 2\pi$. No triângulo Δ_{ONA} , reto em N e de hipotenusa a , obtém-se que

$$\cos(t) = \frac{\text{cat. adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x(t)}{a},$$

e do triângulo Δ_{OMB} , reto em M e de hipotenusa b , encontra-se que

$$\text{sen}(t) = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y(t)}{b},$$

donde $x(t) = a \cos t$ e $y(t) = b \text{sen } t$ e, portanto, $\gamma(t) = (a \cos(t), b \text{sen}(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$, é uma parametrização para a elipse.

Exemplo 2.5: Já a curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (t, |t|), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

não é uma curva diferenciável em \mathbb{R}^2 , uma vez que a derivada não existe na origem, e, portanto, a curva não é diferenciável neste ponto. De fato, basta ver que $y(t) = t$, se $t > 0$ e $y(t) = -t$, se $t < 0$, donde

$$\gamma'(t) = 1, \text{ se } t > 0 \text{ e } \gamma'(t) = -1, \text{ se } t < 0.$$

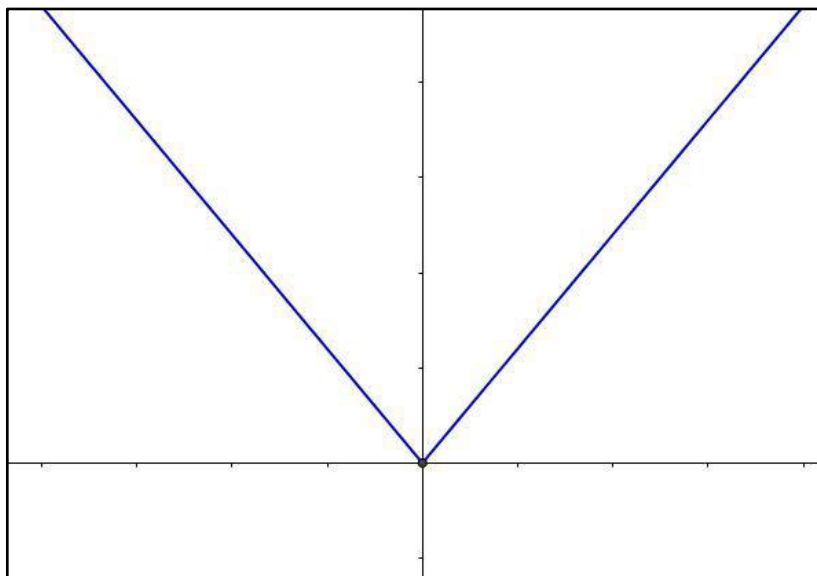


Figura 2.5: Uma curva não diferenciável
Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 17/09/2016

No entanto, se α é a restrição de γ à qualquer intervalo do plano que não contem o ponto $t = 0$, então α é uma curva diferenciável em \mathbb{R}^2 . Uma gama enorme de exemplos de curvas diferenciáveis poderiam ser citados aqui, porém para não

prolongar o texto ou fugir do foco principal, serão apresentados somente os exemplos mais relevantes para os objetivos deste trabalho. Tais exemplos serão apresentados à medida que forem introduzidos conceitos novos no texto.

Os primeiros, e talvez um dos mais importantes, conceitos à serem tratados neste sentido são: vetor tangente e vetor normal. Tais grandezas são indispensáveis para o estudo e descrição do comportamento de uma curva em uma vizinhança imediata de seus pontos. À seguir, serão definidos vetor tangente e vetor normal.

Definição 2.2: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável regular, dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. O vetor $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ é denominado vetor tangente a curva γ no ponto t . Além disso, fica bem definida em cada ponto de γ uma reta tangente dada por $T(s) = \gamma(t) + s\gamma'(t)$.

[...] se γ for uma curva regular, o vetor $\gamma'(t)$ aponta para a direção tangente à curva γ no ponto $\gamma(t)$ e podemos, portanto, definir a reta tangente à curva γ em $\gamma(t)$ por $r_\gamma(u) = \gamma(t) + u\gamma'(t)$, onde $u \in \mathbb{R}$. [...] a reta $r_{t_0}(u)$ é a melhor aproximação linear de γ em t_0 . (ALENCAR e SANTOS, 2002, p. 28)

Por exemplo, a espiral logarítmica é uma curva plana de equação paramétrica dada por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, e cujo vetor tangente é dado por $\gamma'(t) = (e^t \sin t - e^t \cos t, e^t \cos t + e^t \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

A grosso modo, o vetor tangente determina a velocidade com que uma curva plana deixa de ser uma reta no plano.

Definição 2.3: Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável regular. A aplicação

$$t \mapsto s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt$$

onde $t_0, t_1 \in I$, é denominada função comprimento de arco. Além disso, diz-se que γ está parametrizada pelo comprimento de arco, ou simplesmente que γ é p.c.a., se para todo $t_0, t_1 \in I$, com $t_0 \leq t_1$ tem-se $s(t) = t_1 - t_0$.

Por exemplo, a espiral logarítmica de equação paramétrica

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

tem o comprimento de arco igual a $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$. De fato, como anteriormente, veja que $\gamma'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$. Disto, tem-se

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(e^t \cos(t) - e^t \sin(t))^2 + (e^t \sin(t) + e^t \cos(t))^2} = \sqrt{2e^{2t}}$$

e, conseqüentemente,

$$s(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^t dt = \sqrt{2} e^{2\pi} - \sqrt{2},$$

e, portanto, o comprimento de arco de γ é $s(t) = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

É importante salientar que qualquer curva diferenciável no plano pode ser parametrizada de forma que se tenha uma curva p.c.a.. Caso a parametrização obtida não seja p.c.a., basta fazer uma reparametrização pelo comprimento de arco. Mais adiante, será obtida uma parametrização para espiral logarítmica de forma que esta seja p.c.a. utilizando o conceito de reparametrização pelo comprimento de arco.

O teorema a seguir determina uma condição necessária e suficiente para que uma dada curva plana seja parametrizada pelo comprimento de arco.

Teorema 2.1: Uma curva diferenciável regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $|\gamma'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Demonstração: Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e tome $t_0 \in I$. Suponha, sem perda de generalidades, que $\gamma(t_0) = 0$. Seja $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de γ relativa ao intervalo $[t_0, t]$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt.$$

Como $t_0 \leq t$ e $s(t) = t - t_0$ (pois γ é p.c.a.), segue que,

$$\int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt = t - t_0.$$

Derivando os dois lados da expressão acima em relação a t , pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtém-se que,

$$|\gamma'(t)| = \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt \right) = \frac{d}{dt} (t - t_0) = 1.$$

Reciprocamente, suponha que γ é uma curva regular, tal que, $|\gamma'(t)| = 1$. Disto, tem-se que,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0,$$

e, portanto, γ está parametrizada pelo comprimento de arco.

□

Como aplicação do teorema acima mostra-se que a circunferência unitária centrada na origem está parametrizada pelo comprimento de arco. De fato, para cada $t \in [0, 2\pi]$, considere a circunferência de equação $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, onde $\gamma'(t) = (\sin(t), \cos(t))$. Logo, $|\gamma'(t)| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 1$, e, pelo teorema 2.1, a circunferência unitária é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Por outro lado, para a espiral logarítmica obteve-se que $|\gamma'(t)| = \sqrt{2}e^{2t}$. Neste ponto a questão é: a espiral logarítmica pode ser reparametrizada de forma que esta curva seja parametrizada pelo comprimento de arco? A resposta é sim. Este procedimento é chamado reparametrização pelo comprimento de arco. O procedimento é simples e segue os seguintes passos:

(1) *Encontrar a função comprimento de arco de γ .*

Para a espiral logarítmica obtemos que $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$.

(2) *Encontrar a função $\beta(s) = s^{-1}$.*

Isolando t na definição de s , tem-se que $e^t = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, de onde segue que

$$t = \ln\left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) := \beta(s).$$

Assim, $\alpha(s) = \gamma(\beta(s))$ é uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco e

$$\alpha(s) = \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos\left(\ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin\left(\ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \right),$$

é uma parametrização da espiral logarítmica com $|\alpha'(s)| = 1$ e, com isto, α é p.c.a.

O procedimento de reparametrização pelo comprimento de arco não será tratado com mais detalhes aqui para não desviar dos objetivos do trabalho. Para um tratamento mais aprofundado sobre reparametrização pelo comprimento de arco sugere-se consultar TENENBLAT (1990).

A partir de agora e sem perda de generalidades, será assumido neste trabalho que todas as curvas são regulares e estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Também, denota-se por $t(s)$ o vetor tangente unitário à curva γ em s , isto é, $t(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$.

Segundo Tenenblat (1990, p.35), para o desenvolvimento da teoria local das curvas é preciso que exista uma reta tangente a uma curva γ para cada valor de t . Para isto, é suficiente que o vetor tangente a γ seja não nulo para todo t .

Definição 2.4: Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva plana e $n(s)$ o vetor unitário ortonormal a $t(s)$, tal que, a base ortonormal de \mathbb{R}^2 formada pelos vetores $t(s)$ e $n(s)$ tem a mesma orientação dos vetores direcionais e_1 e e_2 . O vetor $n(s)$ é dito vetor normal a γ em s e é dado por $n(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Os vetores $t(s)$ e $n(s)$ são funções diferenciáveis e o conjunto $\{t(s), n(s)\}$ forma um sistema ortonormal completo de \mathbb{R}^2 e é denominado referencial de Frenet da curva γ no ponto s . Veja que, como $t(s)$ é unitário, segue que $t(s)t(s) = 1$. Derivando ambos os lados desta equação com relação à s , segue que, $t'(s)t(s) = 0$, isto é, $t'(s)$ é ortogonal à $t(s)$ e, conseqüentemente, paralelo à $n(s)$. Disto, existe uma função $k(s)$, tal que, $t'(s) = k(s)n(s)$. Disto e da definição de $t'(s)$ e $n(s)$, segue

$$(x''(s), y''(s)) = t'(s) = k(s)n(s) = k(s)(-y'(s), x'(s)) = (-k(s)y'(s), k(s)x'(s)),$$

donde

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s)y'(s) \\ y''(s) = k(s)x'(s) \end{cases}$$

com isto obtemos:

$$n'(s) = (-y''(s), x''(s)) = (-k(s)x'(s), -k(s)y'(s)) = -k(s)n(s).$$

As equações $t'(s) = k(s)n(s)$ e $n'(s) = -k(s)t(s)$ são denominadas fórmulas de Frenet-Serret da curva γ e determinam o comportamento de γ em uma vizinhança de qualquer de seus pontos.

As Fórmulas de Frenet-Serret constituem um conjunto de ferramentas fundamentais para o estudo das curvas diferenciáveis, pois conhecendo tais fórmulas, pode-se descrever especificadamente o comportamento de uma curva nas vizinhanças imediatas de cada um de seus pontos. Além disso, fica bem definida a função curvatura $k(s)$ diferenciável para cada ponto de γ . (HARLE, 1973, p. 49)

Definição 2.5: Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável regular.

(i) se γ é parametrizada pelo comprimento de arco, o fator de proporcionalidade $k(s)$ nas fórmulas de Frenet é denominado curvatura de γ e é dado por

$$k(s) = |\gamma''(s)|.$$

(ii) se γ não é parametrizada pelo comprimento de arco, a curvatura de γ é dada por

$$k(t) = \frac{\det \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2})^3}.$$

A grosso modo, a curvatura k mede a velocidade com que as curvas deixam de ser retas no plano. Mais precisamente, a curvatura k mede a velocidade com que as retas tangentes à γ mudam de direção.

A curvatura dá uma medida da variação da direção da curva, mas seu conhecimento não determina a forma da curva: tanto a circunferência como a hélice, por exemplo, têm curvatura constante, sendo a da primeira igual ao inverso do raio; e enquanto que a circunferência é uma curva planar, na hélice o plano osculador varia de ponto para ponto. (ARAÚJO, 2008, p. 7)

O teorema que segue garante que uma curva diferenciável no plano pode ser determinada, à menos de sua posição no plano, conhecendo-se a curvatura. Tal teorema é considerado um dos pilares do estudo das curvas parametrizadas.

Teorema 2.2 (Fundamental das Curvas Planas): Sejam

(i) $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^∞ ;

(ii) $s_0 \in I$, $p = (x, y)$ um ponto de \mathbb{R}^2 e $v = (v_1, v_2)$ um vetor unitário em \mathbb{R}^2 .

Então, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que, s é o comprimento de arco de γ a curvatura em cada ponto $\gamma(s)$ é dada por $k(s)$. Além disso, a curva γ é única quando fixados $\gamma(s_0) = p$ e $\gamma'(s_0) = v$.

Em essência, este teorema garante que se $k(s)$ é uma função diferenciável no plano, então existe uma única curva γ que tem $k(s)$ como curvatura. A demonstração deste resultado é bastante simples exige somente conceitos já mencionados aqui, porém, para não fugir ao foco do trabalho, esta prova não será feita aqui. Caso o leitor esteja interessado em conhecer esta demonstração, sugere-se buscá-lo em ALENCAR e SANTOS (2002, p.49) ou nas referências abaixo.

3 PARAMETRIZAÇÃO DE ALGUMAS CURVAS PLANAS

Neste capítulo, serão apresentadas a parametrização de algumas curvas no plano que aparecem constantemente na literatura matemática. Mais precisamente, aqui serão descritos os procedimentos de parametrização das seguintes curvas planas: Ciclóide, Cissóide de Diócles, Tractriz, Cardióide, Catenária, Lemniscata de Bernoulli, Astróide e a Feiticeira de Agnesi. Além disso, serão apresentadas graficamente tais curvas e, quando conveniente, será calculada sua curvatura. É importante entender que apesar das formas paramétricas das curvas demonstradas aqui serem genuínas, estas não se limitam a um único método de parametrização.

3.1 Ciclóide

A grosso modo, denomina-se ciclóide à curva plana que descreve a trajetória percorrida por um ponto fixo p em uma circunferência unitária de centro no eixo- y , que gira sem atrito e com aceleração constante ao longo do eixo- x .

Essa curva, que é muito rica em propriedades matemáticas e físicas, desempenhou um papel importante no desenvolvimento inicial dos métodos do cálculo. Galileu foi um dos primeiros a chamar atenção para a ciclóide, recomendando que fosse usada para arcos de pontes. Não demorou muito e determinou a área sob um arco da curva e se descobriram métodos de traçar tangentes a ela. Essas descobertas levaram os matemáticos a considerar questões relativas a superfícies e volumes de revolução obtidos girando-se um arco de ciclóide em torno de diversos eixos. [...] A ciclóide tem tantas propriedades bonitas e interessantes e gerou tantas controvérsias que foi chamada a “Helena da geometria” ou “o pomo da discórdia”. (EVES, 2011, p.10)

De uma maneira mais formal, pode-se definir a ciclóide da seguinte forma: dado um ponto P fixado no comprimento de uma circunferência de centro $C = (0, y)$ e raio r do plano, a ciclóide é o lugar geométrico formado pelo movimento do ponto P , quando a circunferência desliza sem escorregar ao longo do eixo- x .

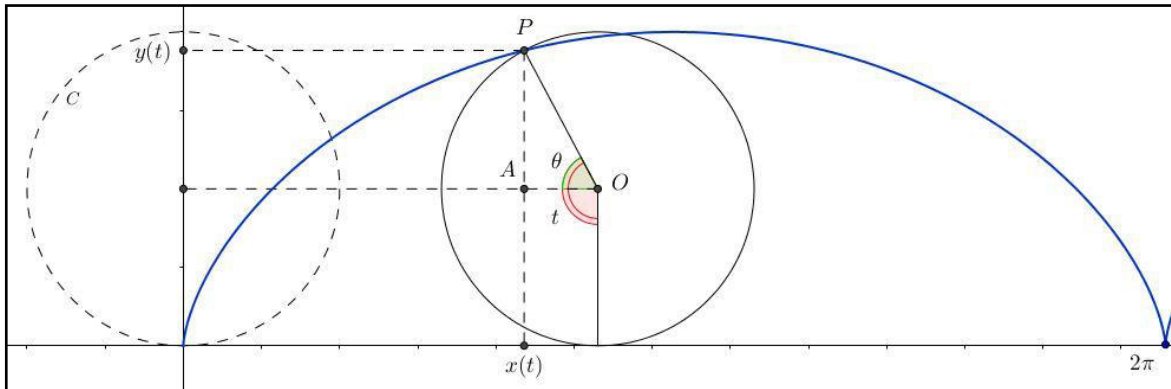


Figura 3.1: Ciclóide

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 29/09/2016

A equação paramétrica desta curva pode ser obtida da seguinte forma: observando a figura 3.1, nota-se que $t = \theta + \frac{\pi}{2}$. Disto e do triângulo Δ_{AOP} , tem-se que

$$r \cos(t) = r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = r \left(\cos(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(\theta) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = -r \text{sen}(\theta) = r - y(t)$$

e

$$r \text{sen}(t) = r \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = r \left(\text{sen}(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\theta) \right) = r \cos(\theta) = rt - x(t),$$

onde r é o raio da circunferência centrada em O e que gera a curva e rt é o comprimento do arco equivalente ao ângulo t . Consequentemente, $x(t) = rt - r \text{sen}(t)$ e $y(t) = r - r \cos(t)$ é uma parametrização do ponto $P \in \gamma$. Como, $P = (x(t), y(t))$ é um ponto genérico da cicloide, segue que

$$\gamma(t) = (rt - r \text{sen}(t), r - r \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é uma parametrização da cicloide gerada pela circunferência de raio r .

Observe também que cada arco da cicloide é obtido a partir de múltiplos de 2π e que cada um desses arcos tem comprimento de $8r$ unidades. Com efeito, veja que o vetor tangente a γ em $t \in I$ é $\gamma'(t) = (r - r \cos(t), r \text{sen}(t))$. Assim, tem-se,

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(r - r \cos(t))^2 + (r \text{sen}(t))^2} = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(t)} = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(t)},$$

e, com isto, o comprimento de arco da cicloide é calculado da seguinte forma:

$$s(t) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = 2r\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos(t)} \cdot \sqrt{1 + \cos(t)}}{\sqrt{1 + \cos(t)}} dt$$

donde,

$$s(t) = 2r\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\text{sen}^2(t)}}{\sqrt{1 + \cos(t)}} dt = 2r\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(t)}{\sqrt{1 + \cos(t)}} dt = -4r\sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{d}{dt} (\sqrt{1 + \cos(t)}) dt$$

e, assim,

$$s(t) = -4r\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos(t)} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = 8r,$$

isto é, o comprimento da cicloide é $8r$ unidades de comprimento.

Em 1658, Christopher Wren o comprimento de um arco de cicloide, sendo o resultado quatro vezes o diâmetro do círculo gerador. No mesmo ano, Pascal retornou brevemente ao estudo da matemática e determinou certas áreas, volumes e centros de gravidade associados à curva (Pascal chamava a curva de roulette, ao passo que Roberval a chamava de trochoid). (EVES, 1994, p.65)

Como uma das propriedades matemáticas e físicas mais interessantes da cicloide tem-se, por exemplo, os resultados alcançados por Johan Bernoulli em 1696, buscando solução do problema da ³Braquistócrona e Christian Huygens em 1673 para o problema da ⁴Tautócrona. Nestes estudos eles mostram que a cicloide é solução desses problemas. Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em Figueiredo e Neves (2012).

3.2 Tratriz (ou Tratriz)

A palavra Tratriz tem origem no latim e significa arrastar. Este nome está intimamente ligado a sua história. Em 1670, o arquiteto Claude Perrault propõe ao matemático Leibniz o seguinte problema: ao colocar seu relógio de bolso sobre uma mesa e estender sua corrente, a trajetória formada pelo relógio ao ser arrastado quando a extremidade oposta da corrente está movimentando em linha reta é uma curva, que denomina-se tratriz.

A tratriz também tem uma aplicação mecânica no chamado pivot de Schiele. O problema é determinar a forma de uma ponta de eixo vertical que deve girar sobre rolamentos de modo que a reação vertical V dos rolamentos seja constante em todos os pontos de superfície de contacto. Além disso, deseja-se que o desgaste da ponta do eixo a cada altura seja uniforme. (FIGUEIREIDO e NEVES, 2012, p. 38)

²Braquistócrona: O problema da Braquistócrona consiste em encontrar a curva que liga dois pontos A e B, pela qual se desliza um corpo, sem atrito, em menor tempo possível.

³Tautócrona: O problema da Tautócrona consiste em achar a curva descrita por uma partícula que parte de um ponto A da curva para um ponto B e que desliza, sem escorregar, sob ação da gravidade, e atinge o ponto mais baixo da curva no mesmo tempo que quando parte de B para A.

A figura 3.2 representa graficamente a tractriz.

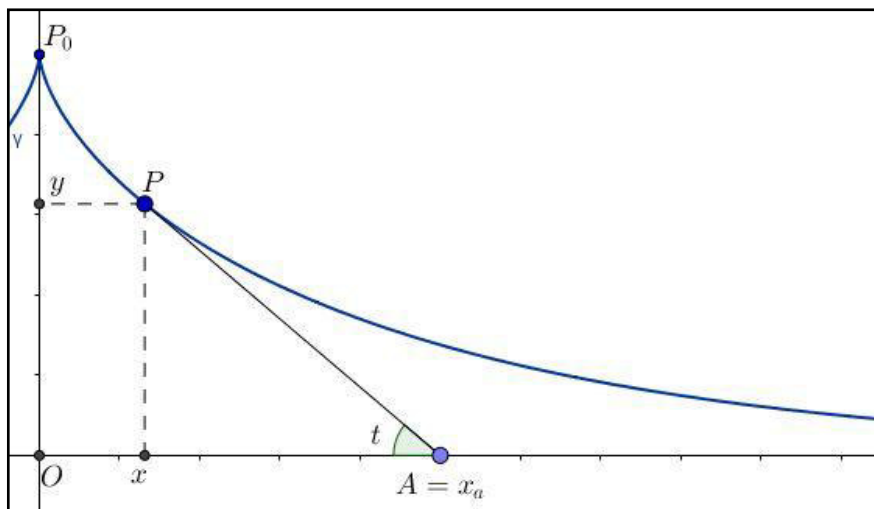


Figura 3.2: Tractriz

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 29/09/2016.

Esta curva tem importantes aplicações na geometria das superfícies diferenciáveis e tem equações paramétricas dadas por

$$\gamma(t) = \left(a \left(\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right) + a \cos(t), a \sin(t) \right),$$

onde t é o ângulo formado entre o vetor $\gamma'(t)$ e o eixo- y .

Para encontrar a parametrização expressa acima, considere f a função que define a tractriz e seja $y = f(x)$ um ponto sobre a curva. Veja que a reta que passa pelos pontos $A = (x_a, 0)$ e $P(x, y)$ é dada por $y = f'(x)(x - x_a)$.

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo Δ_{xAP} , tem-se $a^2 = (x - x_a)^2 + y^2$, de onde, segue que

$$x - x_a = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Assim, $y = f'(x)\sqrt{a^2 - y^2}$ e $f(x)$ é uma solução do seguinte problema:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

com condição inicial $y(0) = a$. Disto, segue que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

E, integrando ambos os lados da equação acima, obtém-se,

$$x = \int dx = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Faça a seguinte mudança de variável: $y = a\text{sen}(t)$ e $dy = a\text{cos}(t)dt$. Disto,

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\text{sen}^2(t)}}{\text{sen}(t)} \text{cos}(t) dt = \int a \frac{\sqrt{\text{cos}^2(t)}}{\text{sen}(t)} \text{cos}(t) dt = a \int \frac{\text{cos}^2(t)}{\text{sen}(t)} dt,$$

e, conseqüentemente,

$$x = a \int \frac{1 - \text{sen}^2(t)}{\text{sen}(t)} dt = a \int \frac{1}{\text{sen}(t)} dt - a \int \text{sen}(t) dt.$$

Das relações trigonométricas, tem-se,

$$\text{sen}(t) = 2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \text{cos}\left(\frac{t}{2}\right),$$

e, por conseguinte,

$$\frac{1}{\text{sen}(t)} = \frac{1}{2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \text{cos}\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\text{cos}\left(\frac{t}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \text{cos}^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\text{sec}^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\text{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{d}{dt} \left(\ln \left(\text{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right).$$

Portanto,

$$x = a \int \frac{d}{dt} \left(\ln \left(\text{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right) dt - a\text{cos}(t) = a \ln \left(\text{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + a\text{cos}(t),$$

e, desta maneira,

$$\gamma(t) = \left(a \ln \left(\text{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + a\text{cos}(t), a\text{sen}(t) \right),$$

é uma parametrização da tractriz. Também, utilizando a condição inicial $y(0) = a$, pode-se verificar que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Esta curva tem inúmeras propriedades interessantes, dentre elas destaca-se que a tractriz gera, por meio de uma rotação sobre o eixo, uma superfície denominada pseudo-esfera. A pseudo-esfera é um exemplo de superfície com curvatura negativa e aparece frequentemente no estudo da geometria hiperbólica. Para mais detalhes sobre a pseudo-esfera sugere-se consultar Do Carmo (2010).

3.3 Cissóide de Diócles

Sejam P uma parábola no plano de vértice na origem (no semiplano inferior $x \leq 0$, por exemplo), T a reta tangente em cada ponto de P e N a reta normal que passa pelo vértice de P . A cissóide de Diócles é uma curva que pode ser descrita

como o conjunto dos pontos no plano cuja reta tangente T de P intersecta ortogonalmente a reta normal N que passa pelo vértice de P (veja figura 3.3).

O nome desta curva é em homenagem ao matemático Diócles (240 a.C. à 180 a.C.) que a descreveu por volta do ano 200 a.C. no intuito de resolver o problema de duplicação do cubo.

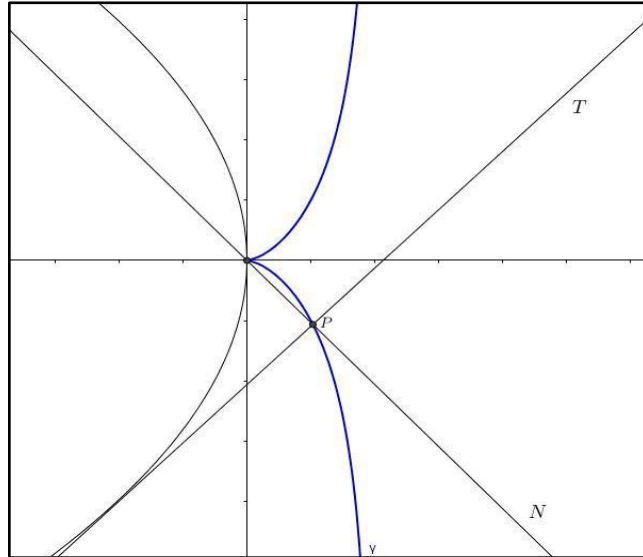


Figura 3.3: Cissóide de Diócles

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 06/10/2016

Com outra interpretação, Reis e Almeida (2008, p.275) afirmam que:

A cissóide de Diócles pode também ser definida como o lugar geométrico do vértice de uma parábola móvel que rola sem escorregar sobre uma parábola fixa "igual" de tal maneira que as duas parábolas são sempre simétricas em relação à reta tangente às duas parábolas que passa pelo ponto de contato, isto é, como o rolete do vértice de uma parábola rolando sobre uma parábola igual fixa.

Já Do Carmo (2010, p. 8) faz uma construção desta curva do seguinte modo: considere O a origem do plano, OA o diâmetro da circunferência C_1 de centro a e raio a , r a reta que passa pelos pontos A e B paralela ao eixo- y e \overline{OB} o segmento de reta que intersecta a circunferência C_1 em um ponto C . Seja P um ponto de \overline{OB} de forma que $\ell(\overline{OP}) = \ell(\overline{CB})$ e $\theta = \widehat{BOA}$, conforme a figura 3.4. (Quando não houver confusão, $\ell(\overline{AB})$ significará comprimento de \overline{AB} ou a distância entre A e B).

Fazendo o ponto B variar sobre a reta r , o ponto P descreve uma curva plana chamada Cissóide de Diócles.

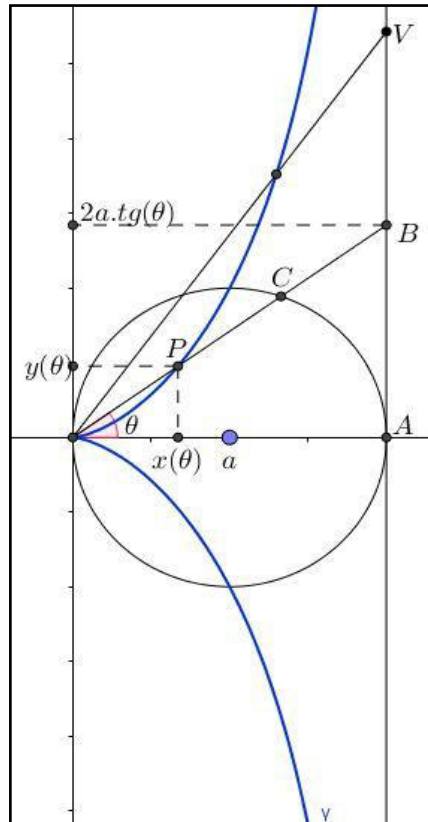


Figura 3.4: Construção da Cissóide de Diócles
 Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 29/09/2016

Para obter uma parametrização desta curva procede-se da seguinte forma: sejam $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma parametrização para a cissóide de Diócles e $P \in \gamma$. Como C_1 é uma circunferência centrada em $(a, 0)$ e de raio a , C_1 tem equação cartesiana dada por $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Para facilitar o entendimento, o procedimento para obter as coordenadas da parametrização para γ será dividido em três partes:

Parte 1: Achar as coordenadas do ponto B .

Para isto, considere o triângulo Δ_{OAB} , reto em A e $\theta = \widehat{AOB}$. Calculando seno e cosseno de θ , obtém-se que

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\ell(\overline{AB})}{\ell(\overline{OB})} \text{ e } \text{cos}(\theta) = \frac{\ell(\overline{OA})}{\ell(\overline{OB})},$$

donde

$$\ell(\overline{OB}) = \frac{\ell(\overline{AB})}{\text{sen}(\theta)} = \frac{2a}{\text{cos}(\theta)}.$$

Resolvendo esta equação tem-se $\ell(\overline{AB}) = 2a \cdot \text{tg}(\theta)$. Logo, o ponto B tem coordenadas $B = (2a, 2a \text{tg}(\theta))$.

Parte 2: Encontrar a equação da reta r que passa por O e B .

Seja (x, y) um ponto genérico de r . Da geometria analítica, sabe-se que o coeficiente angular de r é $u = tg(\theta)$ e a equação cartesiana de r é dada por

$$y - y_0 = u(x - x_0),$$

e tomando $p_0 = (x_0, y_0) = (2a, 2atg(\theta))$, tem-se,

$$y - 2atg(\theta) = tg(\theta)(x - 2a),$$

donde

$$y - 2atg(\theta) = xtg(\theta) - 2atg(\theta),$$

e, daí, r tem equação cartesiana dada por $y = xtg(\theta)$.

Parte 3: Encontrar as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ da parametrização γ .

Veja primeiro que o ponto C é o ponto de intersecção de r e C_1 , ou seja, é o ponto onde em $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, y assume o valor $y = xtg(\theta)$. Disto, vale que,

$$x^2 - 2ax + a^2 + x^2tg^2(\theta) = a^2.$$

E fazendo $t = tg(\theta)$ na equação acima, obtém-se a seguinte igualdade

$$(1 + t^2)x^2 = 2ax,$$

donde $x = 0$ ou $x = \frac{2a}{1+t^2}$ são soluções desta equação. Considerando somente o caso não trivial tem-se que $y = \frac{2at}{1+t^2}$, e

$$\left(\frac{2a}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2} \right)$$

são as coordenadas do ponto C . Observando, também, que $\ell(\overline{OP}) = \ell(\overline{BC})$ e

$$C - B = \left(\frac{2a}{1+t^2} - 2a, \frac{2at}{1+t^2} - 2at \right) = \left(-\frac{2at^2}{1+t^2}, -\frac{2at^3}{1+t^2} \right),$$

segue que

$$\ell(\overline{OP}) = \sqrt{\left(-\frac{2at^2}{1+t^2} \right)^2 + \left(-\frac{2at^3}{1+t^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2t^4 + 4a^2t^6}{(1+t^2)^2}} = 2at \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}.$$

Agora, considere o triângulo $\Delta_{Ox(\theta)P}$, reto em $x(\theta)$. Calculando seno de θ neste triângulo, obtém-se que

$$y(\theta) = \ell(\overline{OP})\text{sen}(\theta) \text{ e } x(\theta) = \ell(\overline{OP})\text{cos}(\theta)$$

e, substituindo a expressão $\ell(\overline{OP})$ nestas equações, tem-se a seguinte igualdade,

$$y(\theta) = 2at^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t^2} \text{sen}(\theta).$$

Como $1 + t^2 = 1 + tg^2(\theta) = \sec^2(\theta)$, tem-se que,

$$y(\theta) = \frac{2at^2 \sec(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{1 + t^2} = \frac{2at^2 \frac{1}{\cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta)}{1 + t^2} = \frac{2at^2 \operatorname{tg}(\theta)}{1 + t^2} = \frac{2at^3}{1 + t^2}.$$

Também, pela parte 2, a reta r tem equação $y(\theta) = x(\theta)t$ e, assim,

$$x(\theta) = \frac{1}{t} y(\theta) = \frac{1}{t} \frac{2at^3}{1 + t^2} = \frac{2at^2}{1 + t^2}$$

e, com isto, a expressão,

$$\gamma(t) = \left(\frac{2at^2}{1 + t^2}, \frac{2at^3}{1 + t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização para a cissóide de Diócles.

3.4 Cardióide

A cardióide é um caso especial de epiciclóide quando os raios das duas circunferências que determinam a curva são iguais. A nível de curiosidade, uma epiciclóide se define da seguinte maneira: dado duas circunferências C_1 e C_2 , considere C_1 de raio r fixa e P um ponto pertencente ao comprimento de C_2 de raio R tal que C_2 seja exterior de C_1 , assim a curva formada pelo ponto P quando C_2 rola, e não desliza, sobre a superfície de C_1 é a epiciclóide.

Uma epiciclóide é a curva descritiva por um ponto da circunferência de um círculo que rola externamente sobre um círculo fixo. [...] A catacáustica de uma circunferência para uma fonte de luz sobre a própria é uma epiciclóide de uma cúspide cuja base circular é concêntrica com a circunferência dada e cujo raio é um terço do raio da circunferência dada. Uma epiciclóide de uma cúspide recebe o nome de cardióide. (EVES, 2011, p. 411)

O nome Cardióide foi atribuído pela primeira vez por Francesco de Castillon (1704-1791), deriva do grego *kardia* = coração e *eidos* = formas e seu nome se deve por sua forma se assemelhar a um coração (veja figura 3.5). Entre os matemáticos que investigaram as propriedades desta curva estão Alberto Durero (1471-1528), Girard Desargues (1591-1661), Isaac Newton (1642-1727), Jacob Bernoulli (1654-1705) e Leonhard Euler (1707-1783).

A figura 3.5 mostra graficamente a cardióide.

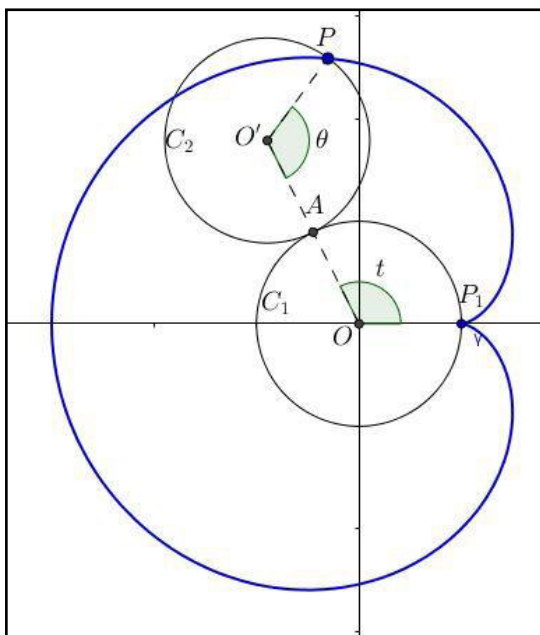


Figura 3.5: Cardióide

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado por Geogebra em 29/09/2016.

Para determinar uma parametrização da cardióide deve-se primeiro obter uma parametrização da epiciclóide. Para isto, considere um circunferência C_1 fixa de raio R e centro O e um circunferência C_2 de raio r e centro O' . Considere, também, o segmento $\overline{OO'}$ contendo um ponto A , de modo que A seja o ponto de tangência entre as circunferências C_1 e C_2 , conforme mostra a figura 3.5.

Para obter a parametrização, sejam P' o ponto de C_2 que descreve a curva e B a projeção do centro O' de C_2 sobre o eixo- x . E considera-se dois casos:

Caso 1: Quando $P' < B$ (veja figura 3.6).

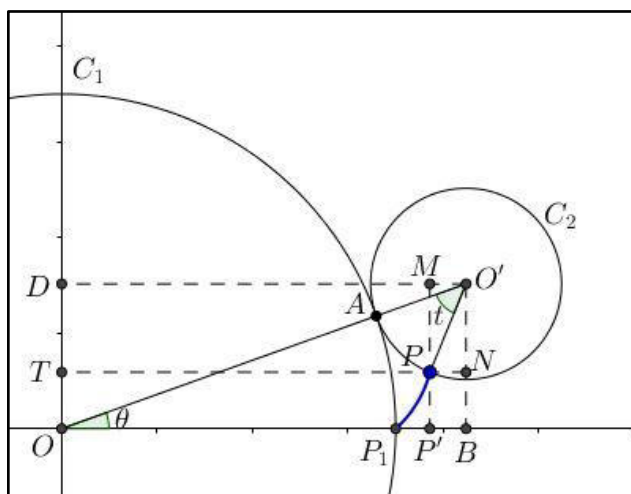


Figura 3.6: Construção da Cardióide no caso $P' < B$

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 29/09/2016

Neste caso, tem-se que

$$x = \ell(\overline{OP'}) = \ell(\overline{OB}) - \ell(\overline{P'B}) = \ell(\overline{OB}) - \ell(\overline{O'M})$$

e

$$y = \ell(\overline{OD}) - \ell(\overline{TD}) = \ell(\overline{OD}) - \ell(\overline{O'N}).$$

Veja que, quando C_2 rola sobre C_1 , o centro de C_2 descreve um círculo de raio $(r + R)$. Se θ é o ângulo formado pelo eixo- x e a semirreta $\overline{OO'}$, então do triângulo $\Delta_{OO'B}$, tem-se

$$\ell(\overline{OB}) = (r + R) \cos(\theta) \text{ e } \ell(\overline{OD}) = \ell(\overline{O'B}) = (r + R) \sin(\theta).$$

Além disso, note o ângulo $N\hat{O}'P$ é dado por

$$N\hat{O}'P = O\hat{O}'B - O\hat{O}'P = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - t = \frac{\pi}{2} - (\theta + t).$$

Disto e do triângulo $\Delta_{PNO'}$, tem-se que

$$\ell(\overline{O'M}) = \ell(\overline{NP}) = r \sin(N\hat{O}'P) = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + t)\right) = r \cos(\theta + t)$$

e

$$\ell(\overline{O'N}) = r \cos(N\hat{O}'P) = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + t)\right) = r \sin(\theta + t).$$

Substituindo $\ell(\overline{O'M})$ e $\ell(\overline{O'N})$ nas coordenadas $x(\theta)$ e $y(\theta)$ tem-se

$$x(\theta) = (r + R) \cos(\theta) - r \cos(\theta + t) \text{ e } y(\theta) = (r + R) \sin(\theta) - r \sin(\theta + t).$$

Note que esta equação paramétrica depende dos parâmetros, t e θ . Para determinar γ , basta submetê-la à um único parâmetro, θ . Como C_2 rola sobre C_1 , então para P_1 , o ponto de partida da epiciclóide, tem-se que $\text{arco } P_1A = \text{arco } PA$ e, portanto, $R\theta = rt$. Assim, $t = \frac{R\theta}{r}$ e com isto,

$$x(\theta) = (r + R) \cos(\theta) - r \cos\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) = (r + R) \cos(\theta) - r \cos\left(\left(\frac{r + R}{r}\right)\theta\right)$$

e

$$y(\theta) = (r + R) \sin(\theta) - r \sin\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) = (r + R) \sin(\theta) - r \sin\left(\left(\frac{r + R}{r}\right)\theta\right).$$

A cardióide é a curva obtida da epiciclóide quando o raio das duas circunferências, C_1 e C_2 , são iguais, isto é, quando $R = r$. Disto e das equações obtidas acima, segue que

$$\gamma(\theta) = (2R \cos(\theta) - R \cos(2\theta), 2R \sin(\theta) - R \sin(2\theta)),$$

é uma parametrização para a cardióide com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Caso 2: Quando o ponto $P' > B$ (veja figura 3.7).

Neste caso tem-se a curva é descrita como na figura à seguir:

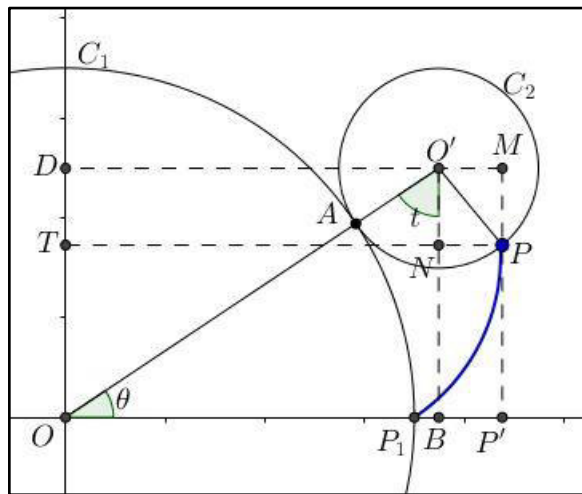


Figura 3.7: Construção da Cardióide no caso $P' > B$

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 29/09/2016

Para obter uma parametrização para a cardióide neste caso basta proceder de forma análoga ao que foi feito para o caso 1. Para não prolongar o texto ou deixá-lo cansativo, decidiu-se omitir este caso aqui. Para conhecer os detalhes deste caso, basta pesquisar em FRENSEL (2008).

3.5 Catenária

A catenária é a curva plana que descreve o comportamento de uma corda suspensa em equilíbrio estático sobre duas extremidades que sofre a influência de uma força de ação, à saber, a tensão sobre o ponto mínimo $P_0 = (x_0, y_0)$ ou, mais especificadamente, sujeito à apenas seu próprio peso.

Um cabo flexível e inextensível, suspenso em dois pontos e sujeito a seu próprio peso, toma a forma do gráfico de um cosseno hiperbólico. Essa curva é a catenária, com tal característica esta curva apresenta soluções para problemas em equações diferenciais ordinárias. (FIGUEIREDO e NEVES, 2008, p. 41)

O problema de descrever a curva que representa uma corda suspensa entre dois pontos fixos surgiu com o matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano

Galileu Galilei (1564-1642), onde este conjecturou que a curva suspensa por dois pontos sob a influência da gravidade era uma parábola. No entanto, em 1646 o físico, matemático e astrônomo Christiaan Huygens (1629-1695), com apenas 17 anos provou que a conjectura era falsa, mas sem deduzir uma equação para esta curva. Não obstante, em 1691, os matemáticos Bernoulli, Leibniz e Huygens publicam, separadamente, a resolução do problema da catenária.

Em 1690, Jacob Bernoulli desafiou publicamente os matemáticos da época a resolverem o problema da catenária, o que fez com que surgissem três soluções (dos matemáticos Johan Bernoulli, Huygens e Leibniz) as quais consistiam em uma descrição geométrica da curva (equivalente a sua equação) e em listas das principais propriedades da catenária, mas nenhuma das soluções explicavam o método pelo qual os resultados haviam sido encontrados. Comparando os três métodos, conclui-se que o estudo da catenária contribuiu para os métodos matemáticos rivais, o euclidiano clássico e o novo cálculo diferencial. Huygens mostrou que o problema poderia ser resolvido através do estilo clássico. Leibniz e Bernoulli, resolveram através do cálculo diferencial, sendo suas soluções muito mais diretas que Huygens. (FARIA, 2011, p. 15-16)

A figura 3.8 representa geometricamente a catenária.

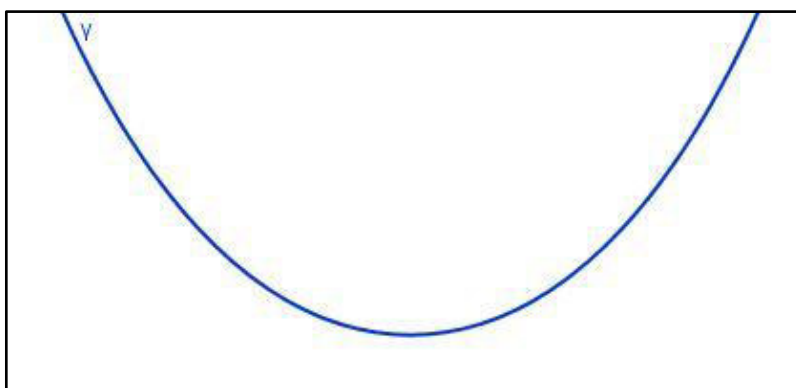


Figura 3.8: Catenária

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 29/09/2016

Para dado $a \in \mathbb{R}$, esta curva tem equação cartesiana dada por

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

e pode ser caracterizada pela seguinte representação paramétrica:

$$\gamma(t) = \left(t, a \cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right), \quad a, t \in \mathbb{R}.$$

Por uma questão de comodidade e para não estender ou deixar o texto cansativo, será omitida aqui o procedimento de parametrização desta curva, uma vez que este procedimento utiliza argumentos da mecânica clássica. Para o leitor

que tenha curiosidade em conhecer este procedimento, sugere-se aqui a consulta em ALBUQUERQUE (2015, p. 14).

Uma característica interessante sobre esta curva é o valor de sua curvatura, pois está determina a velocidade com que uma curva deixa de ser reta. Note que, com a parametrização acima, a catenária não está parametrizada pelo comprimento de arco. Então, deve-se utilizar a segunda expressão na definição 2.5. Veja que

$$\gamma'(t) = \left(1, \sinh\left(\frac{t}{a}\right)\right) \text{ e } \gamma''(t) = \left(0, \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right),$$

e disto

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right).$$

Logo, segue que

$$k(t) = \frac{\det \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\right)^3} = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)}\right)^3} = \frac{\frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\sqrt{\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}\right)^3} = \frac{1}{a \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)},$$

ou seja, a catenária tem curvatura dada por

$$k(t) = \frac{1}{a \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}.$$

Também, esta curva tem grande importância no estudo das superfícies, pois é a curva que gera a única superfície mínima de revolução, que denomina-se catenóide de revolução.

3.6 Lemniscata de Bernoulli

Fixado dois pontos A e B no plano com a distância de $2b$ um do outro, e dado um ponto P que satisfaz a propriedade $\ell(\overline{PA}) \cdot \ell(\overline{PB}) = b^2$, a Lemniscata de Bernoulli é o lugar geométrico gerado pelo conjunto de todos os pontos P que satisfazem esta propriedade.

O nome desta curva tem origem no latim que significa fita com laço, mas desde a antiguidade é conhecida pela comunidade matemática como o símbolo do infinito, e ainda mais informalmente expressado como a aparência do “oito deitado”. O primeiro nome, *Lemniscus*, se deve ao formato da curva. Já o segundo nome é em homenagem ao matemático Jacques Bernoulli, visto que ele publicou em 1694 um artigo na revista *Acta Eruditorum* onde descrevia a Lemniscata.

Quem, contudo, primeiro forneceu uma descrição analítica da Lemniscata de Bernoulli foi Giovanni Fagnano (italiano, 1715 - 1797) em 1750. Grandes matemáticos como Carl Friedrich Gauss (alemão, 1777-1855) e Leonhard Euler (suíço, 1707 - 1783) também se ocuparam do estudo da lemniscata. Foram precisamente as investigações de Gauss acerca do comprimento de arco da lemniscata, que o conduziram ao desenvolvimento da teoria das funções elíptica. (REIS e ALMEIDA, 2008, p. 277)

A Lemniscata de Bernoulli pertence à família das ⁵Ovais de Cassini, fato este descoberto somente no final do século XVIII. O matemático italiano Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) em 1680 descreve a forma genérica das curvas planas com a propriedade de ser o lugar geométrico, quando fixado dois pontos no plano, cujo produto da distância dos pontos pertencente à curva é uma constante.

Para determinar uma parametrização da Lemniscata de Bernoulli é necessário encontrar a equação cartesiana utilizando-se de sua propriedade como Ovais de Cassini, fazendo uma análise da figura 3.9 à seguir:

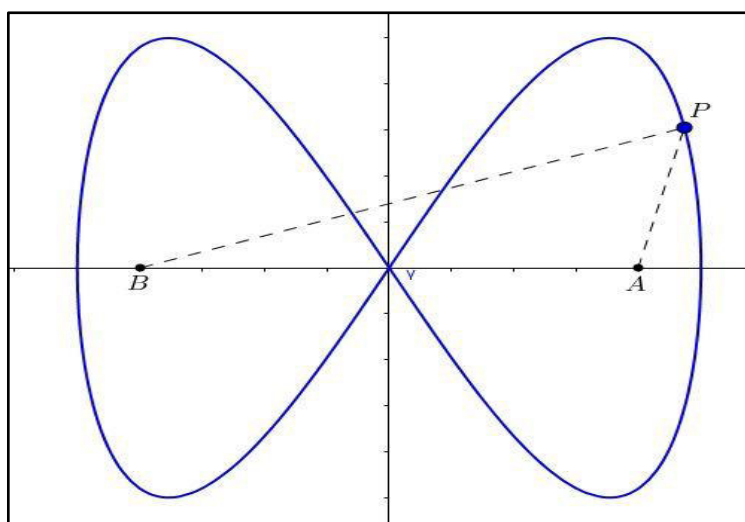


Figura 3.9: Lemniscata de Bernoulli

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 07/10/2016

⁵Oval de Cassini é o lugar geométrico dos pontos do plano, tal que, o produto das distâncias a dois pontos fixos P e Q é constante. Seu nome é dado em homenagem ao matemático Giovanni Cassini.

Denote $P = (x, y)$, $A = (b, 0)$ e $B = (-b, 0)$, e usando a propriedade fundamental da curva que define a Lemniscata de Bernoulli, tem-se que $\ell(\overline{PA}) \cdot \ell(\overline{PB}) = b^2$.

Disto, segue que

$$\sqrt{(x-b)^2 + y^2} \sqrt{(x+b)^2 + y^2} = b^2$$

e, conseqüentemente,

$$((x-b)^2 + y^2)((x+b)^2 + y^2) = b^4,$$

donde, desenvolvendo este produto notável e agrupando termos comuns, obtém-se

$$(x^2 + y^2)^2 = 2b^2(x^2 - y^2)$$

é a equação cartesiana para a lemniscata representada pelo gráfico da figura 3.9.

Para encontrar sua parametrização faça a seguinte mudança de variável

$$y = x \operatorname{sen}(t) \text{ e } b = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

e disto, tem-se,

$$(x^2 + x^2 \operatorname{sen}^2(t))^2 = \frac{2a^2}{2} (x^2 - x^2 \operatorname{sen}^2(t)) = a^2 x^2 (1 - \operatorname{sen}^2(t)),$$

donde, usando que $\operatorname{sen}^2(t) + \operatorname{cos}^2(t) = 1$, e extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da equação acima, obtém-se que $x(1 + \operatorname{sen}^2(t)) = a \operatorname{cos}(t)$ e, assim,

$$x = \frac{a \operatorname{cos}(t)}{1 + \operatorname{sen}^2(t)}.$$

Como $y = x \operatorname{sen}(t)$, chega-se a seguinte expressão,

$$y = \left(\frac{a \operatorname{cos}(t)}{1 + \operatorname{sen}^2(t)} \right) \operatorname{sen}(t).$$

e, portanto,

$$\gamma(t) = \left(\frac{a \operatorname{cos}(t)}{1 + \operatorname{sen}^2(t)}, \frac{a \operatorname{cos}(t)}{1 + \operatorname{sen}^2(t)} \operatorname{sen}(t) \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é uma parametrização para a Lemniscata de Bernoulli.

3.7 Astróide

Considere C_1 e C_2 duas circunferências de modo que o raio de C_1 seja quatro vezes maior que o raio de C_2 . Fixado C_1 no plano, a curva denominada astróide é a

trajetória formada por um ponto P pertencente a C_2 , quando esta circunferência rola, sem escorregar, sobre a superfície interna da circunferência C_1 .

O astróide, também conhecido por tetracúspide, cubociclóide e paraciclo, foi estudada pela primeira vez pelo matemático e astrônomo Ole Cristensen (1644-1710) que buscava entender as curvas “dentadas” que possuíssem propriedades vantajosas. Além de Cristensen, os matemáticos Johann Bernoulli e Gottfried Leibniz também se deixaram fascinar por esta curva.

A figura 3.10 representa graficamente o astróide.

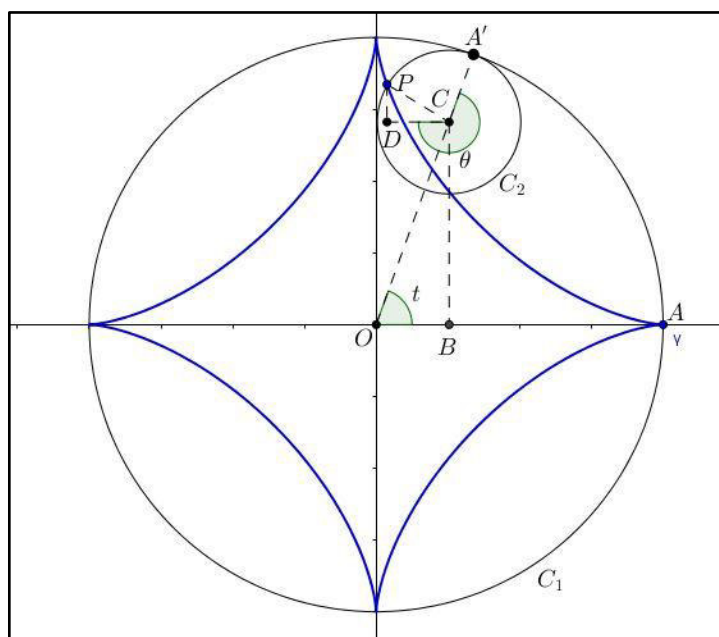


Figura 3.10: Astróide

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 07/10/2016

O objetivo aqui é encontrar uma parametrização para o Astróide. Para isto, seja A' um ponto da circunferência C_1 e considere o ângulo $t = \angle BOA'$ como o parâmetro desta curva. Suponha que a circunferência C_2 rola sobre o interior da circunferência C_1 de modo que o ponto de partida seja para o desenho da curva seja $A = P$. Então $\text{arco}(AA') = \text{arco}(PA')$, e disto,

$$Rt = \frac{R}{4} \theta,$$

de onde $\theta = 4t$. Também, como \overline{DC} é paralelo a \overline{OA} e que $\overline{OA'}$ é uma transversal às paralelas \overline{DC} e \overline{OA} , segue que $t = \angle O\hat{C}D$. Disto, e observando o triângulo Δ_{CDP} , tem-se

$$\angle D\hat{C}P = \theta - \angle D\hat{C}O - 180^\circ = 4t - t - 180^\circ = 3t - 180^\circ.$$

Além disso, observe que as coordenadas do ponto $P = (x(t), y(t))$ são por

$$x(t) = \ell(\overline{OB}) - \ell(\overline{DC}) \text{ e } y = \ell(\overline{BC}) + \ell(\overline{DP}).$$

Como C_1 tem raio R e C_2 tem raio $\frac{R}{4}$, segue que $\ell(\overline{OC}) = \frac{3R}{4}$ e, calculando seno e cosseno do ângulo t no triângulo Δ_{OBC} , tem-se que

$$\cos(t) = \frac{\ell(\overline{OB})}{\ell(\overline{OC})} = \frac{\ell(\overline{OB})}{\frac{3R}{4}} \text{ e } \sin(t) = \frac{\ell(\overline{BC})}{\ell(\overline{OC})} = \frac{\ell(\overline{BC})}{\frac{3R}{4}},$$

de onde segue que,

$$\ell(\overline{OB}) = \frac{3R}{4} \cos(t) \text{ e } \ell(\overline{BC}) = \frac{3R}{4} \sin(t).$$

Por outro lado, calculando seno e cosseno do ângulo $D\hat{C}P$ no triângulo Δ_{DCP} ,

$$\cos(D\hat{C}P) = \frac{\ell(\overline{DC})}{\ell(\overline{PC})} = \frac{\ell(\overline{DC})}{\frac{R}{4}} \text{ e } \sin(D\hat{C}P) = \frac{\ell(\overline{DP})}{\ell(\overline{PC})} = \frac{\ell(\overline{DP})}{\frac{R}{4}},$$

e disto, e utilizando que $D\hat{C}P = 3t - 180^\circ$, segue que

$$\ell(\overline{DC}) = \frac{R}{4} \cos(3t - 180^\circ) \text{ e } \ell(\overline{DP}) = \frac{R}{4} \sin(3t - 180^\circ).$$

Substituindo estas expressões nas coordenadas x, y , obtém-se que

$$x(t) = \frac{3R}{4} \cos(t) - \frac{R}{4} \cos(3t - 180^\circ) \text{ e } y(t) = \frac{3R}{4} \sin(t) + \frac{R}{4} \sin(3t - 180^\circ).$$

Do estudo das relações trigonométricas sabe-se que

$$\cos(3t - 180^\circ) = -3 \cos(t) - 4 \cos^3(t) \text{ e } \sin(3t - 180^\circ) = 4 \sin^3(t) - 3 \sin(t),$$

e disto, segue-se

$$x(t) = \frac{3R}{4} \cos(t) - \frac{R}{4} (3 \cos(t) - 4 \cos^3(t)) = R \cos^3(t)$$

e

$$y(t) = \frac{3R}{4} \sin(t) + \frac{R}{4} (4 \sin^3(t) - 3 \sin(t)) = R \sin^3(t)$$

Portanto $\gamma(t) = (R \cos^3(t), R \sin^3(t))$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, é uma parametrização para a curva denominada Astróide.

3.8 Feiticeira de Agnesi (ou Curva de Agnesi)

Sejam C_1 uma circunferência de raio r e x, u as retas paralelas e tangentes a C_1 nos pontos A e O , onde O é a origem do sistema de coordenadas e A é o ponto de coordenadas $(0, 2r)$. Seja E um ponto da circunferência C_1 e traça-se a secante

\overline{OE} de forma que \overline{OE} encontre a tangente u em um ponto C . Passando pelo ponto E , considere a reta v paralela à u e tome C' um ponto da tangente x de forma que o segmento $\overline{CC'}$ é paralelo ao eixo- y . A curva de Agnesi é o lugar geométrico formado por todos os pontos P do plano, de forma que P é o ponto de interseção do segmento $\overline{CC'}$ com a reta v , quando se faz variar E ao longo da circunferência C_1 .

De uma maneira menos formal, pode-se definir a curva de Agnesi como o lugar geométrico formado pelos pontos P , tal que, P e E estão à uma mesma distância da tangente u , e P e C estão à uma mesma distância do eixo- y . A figura 3.11, representa graficamente esta curva.

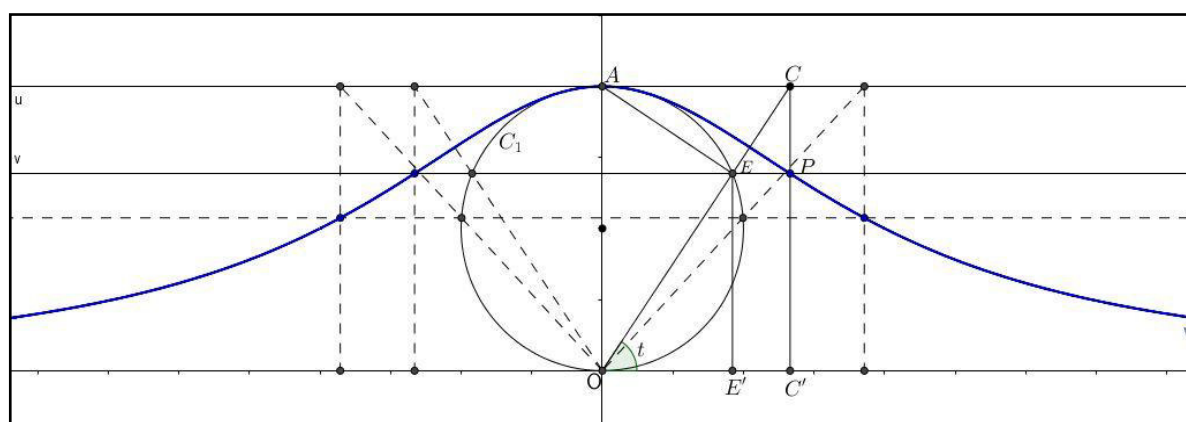


Figura 3.11: Feiticeira de Agnesi

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 09/10/2016

O nome desta curva é em homenagem a matemática Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) que a descreveu em 1748 em seu livro “*Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*”, no entanto, a palavra feiticeira se deve a um erro de tradução feito por John Colson, assim a curva deveria se chamar a Curva de Agnesi.

Pierre de Fermat (1601-1665) estudou a quadratura (determinação da área) de vários tipos de curvas. Entre elas havia uma que ele escreveu como $e(a^2 + b^2) = b^3$. Em terminologia moderna essa relação seria escrita como $y(x^2 + a^2) = a^3$ e a curva correspondente às vezes é conhecida como a “feiticeira de Agnesi”. (EVES, 1994, p.50)

Maria Agnesi foi uma matemática italiana da cidade de Bolonha cujo pai era professor da universidade local. Agnesi era fluente em vários idiomas dentre os quais pode-se destacar: hebraico, alemão, espanhol e francês; e durante as reuniões promovidas por seu pai com os melhores professores da universidade de Bolonha, ela propunha-se a conversar sobre qualquer assunto que escolhessem, na

língua natural deles. Em 1752, foi convidada a ocupar a cadeira de seu pai na universidade Bolonha.

Considere o ângulo $t = \widehat{COC'}$ como o parâmetro da curva. Para obter uma parametrização para a feiteira de Agnesi deve-se primeiro determinar as coordenadas do ponto $P = (x(t), y(t)) = (\ell(\overline{OC'}), \ell(\overline{PC'})) = (\ell(\overline{OC'}), \ell(\overline{EE'}))$ em função do parâmetro t . Assim, dos triângulos retângulos $\Delta_{OCC'}$ e $\Delta_{OEE'}$, tem-se que,

$$\cos(t) = \frac{\ell(\overline{OC'})}{\ell(\overline{OC})} = \frac{x(t)}{\ell(\overline{OC})} \text{ e } \sin(t) = \frac{\ell(\overline{EE'})}{\ell(\overline{OE})} = \frac{y(t)}{\ell(\overline{OE})},$$

donde $x(t) = \ell(\overline{OC})\cos(t)$ e $y(t) = \ell(\overline{OE})\sin(t)$.

Agora, considere os triângulos Δ_{OEA} , circunscrito em C_1 , retângulo em E , e $\Delta_{OCC'}$, retângulo em C' . É fácil verificar que esses triângulos são semelhantes e, com isto, observa-se que $t = \widehat{OAE}$. Então,

$$\sin(t) = \frac{\ell(\overline{OE})}{2r} \text{ e } \cos(t) = \frac{\ell(\overline{CC'})}{\ell(\overline{OC})},$$

donde $\ell(\overline{OE}) = 2r \sin(t)$ e $\ell(\overline{OC}) = \frac{2r}{\cos(t)}$. E substituindo essas expressões nas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$, segue que

$$x(t) = \frac{2r}{\cos(t)} \cos(t) = 2r \cot g(t) \text{ e } y(t) = 2r \sin(t) \cos(t) = 2r \sin^2(t)$$

e, portanto, a equação

$$\gamma(t) = (2r \cot g(t), 2r \sin^2(t)), \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

é uma parametrização para a feiteira de Agnesi.

É óbvio que no estudo da geometria diferencial existem uma grande quantidade de curvas planas que poderiam ser citadas aqui. Porém, para não prolongar o texto, optou-se por apresentar aqui somente as curvas que aparecem com mais frequência nos estudos de matemática. Para o leitor que esteja mais interessado em aprofundar seus estudos sobre curvas planas e suas propriedades sugerimos que consultem TENENBLAT (1990), do CARMO (2010) e suas referências. No próximo capítulo será apresentado um estudo introdutório sobre curvas no espaço e será demonstrado um teorema de classificação de curvas por meio de informações sobre sua curvatura e/ou torção.

4 CURVAS ESPACIAIS E UM TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE CURVAS

Um dos problemas mais antigos e interessantes da Geometria Diferencial das curvas é caracterizar uma curva regular. A curvatura e a torção fornecem importantes informações para caracterização de algumas destas curvas. Sabendo disto, este capítulo tem por objetivo fazer uma exposição bibliográfica da geometria diferencial das curvas espaciais através da descrição das propriedades destas curvas e demonstrar um teorema de classificação de curvas no plano e no espaço quando conhecidas certas informações relacionadas com sua curvatura e torção.

Mais precisamente, serão classificadas aqui as seguintes curvas:

- Todas as curvas planas com curvatura constante, neste caso, as retas e as circunferências;
- Todas as curvas espaciais com curvatura constante, neste caso, as hélices.
- Todas as curvas com torção nula, neste caso, as curvas planas;
- Todas as curvas cuja curvatura e torção satisfazem uma relação linear, neste caso, as curvas de Bertrand.

Além disso, será feito uma breve descrição da Geometria Diferencial das curvas espaciais que servirão de base para a construção destes conceitos. Em 1990, Tenenblat faz um estudo completo sobre curvas diferenciáveis classificando todas essas curvas por meio de informações sobre sua curvatura e torção. Já em 2010, do Carmo desenvolve resultados semelhantes para curvas em \mathbb{R}^3 .

De maneira geral, o que propõe-se aqui é uma nova maneira de visualizar um teorema de classificação de curvas.

4.1 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis em \mathbb{R}^3

Nesta seção serão definidos os conceitos e propriedades sobre curvas espaciais que servem de base para o avanço deste estudo. Mais precisamente, será definido o conceito de curva, curvatura e torção e, além disso, serão apresentadas,

como exemplos, algumas curvas de que trata o resultado principal deste trabalho. Alguns dos resultados aqui tratados são formas gerais dos conceitos já estabelecidos sobre curvas planas, cujas demonstrações são inteiramente análogas e, por isso, decidiu-se omitir aqui tais demonstrações.

Primeiramente, será apresentada a definição de curva no espaço.

Definição 4.1: Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , onde I é um intervalo de \mathbb{R} . Neste caso, denota-se

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)), \quad s \in I.$$

Novamente, $\gamma \in C^\infty$ significa que γ possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Além disso, γ é regular se $\gamma'(s) \neq 0$, para todo $s \in I$.

Neste contexto, I denota um subintervalo de \mathbb{R} , da forma $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Será assumido ao longo do texto que todas as curvas são regulares e estão parametrizadas pelo comprimento de arco, no sentido das definições 2.1 e 2.3 do capítulo 2. Para mais detalhes sobre regularidade de curvas e parametrização pelo comprimento de arco sugere-se consultar ALENCAR e SANTOS (2003) ou TENENBLAT (1990).

Segundo Do Carmo (1963, p. 8), o significado geométrico da condição de regularidade é assegurar a existência de uma reta tangente para todos os pontos da curva; isso significa que a curva “valor absoluto” não é uma curva local regular.

Vale lembrar, pelo teorema 2.1, que γ está parametrizada pelo comprimento de arco se $s(t) = t - t_0$, com $t, t_0 \in I$, onde $s(t)$ é a função comprimento de arco de γ definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt, \quad \forall t, t_0 \in I.$$

De forma equivalente, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $|\gamma'(t)| = 1$, para todo $t \in I$. Este resultado generaliza o teorema 2.1 do capítulo 2, no sentido que se uma das funções coordenadas $x(t)$, $y(t)$ ou $z(t)$ é nula, então γ é uma curva plana.

A seguir serão apresentados alguns exemplos de curvas no espaço já conhecidos na literatura básica de geometria diferencial.

Exemplo 4.1: A curva de equação paramétrica

$$\gamma(t) = (x + at, y + bt, z + ct), \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma curva diferenciável cujo traço é uma reta em \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto $p = (x, y, z)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo 4.2: A curva de equação paramétrica

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é uma curva diferenciável cujo traço é uma espiral logarítmica que se desenrola na superfície de um cone de centro na origem.

A figura 4.1 representa esta curva

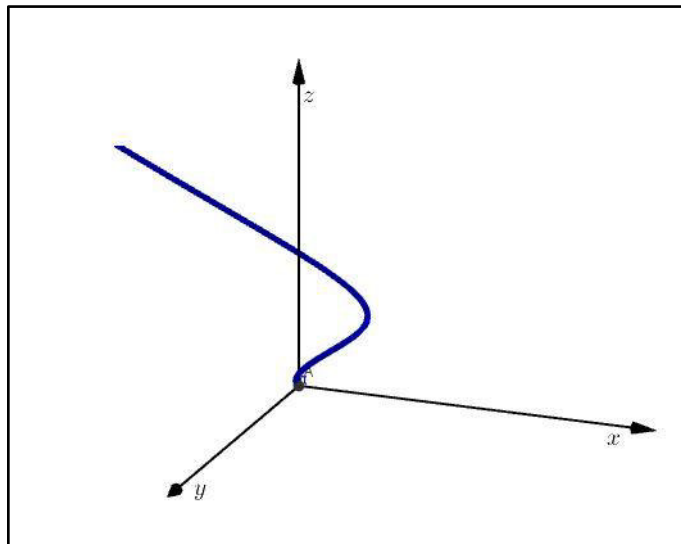


Figura 4.1: Espiral Logarítmica

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 20/10/2016

A definição a seguir generaliza o conceito de curvatura de uma curva plana dado no início do capítulo 2 deste trabalho.

Definição 4.2 - Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Define-se a curvatura de γ em $s \in I$ por

$$k(s) = |\gamma''(s)|.$$

A grosso modo, a curvatura k mede a variação da direção da reta tangente à γ no ponto $\gamma(s)$ ou, mais precisamente, o quanto a curva deixa de ser uma reta.

Segundo Rodriguez (1977, p. 137),

A curvatura de uma curva é não negativa em todos os pontos, isto é, $k(s) \geq 0$. O valor absoluto da curvatura (no plano) de uma curva plana é igual o valor da curvatura dessa curva considerada como uma curva no espaço.

Para cada $s \in I$, existem vetores ortonormais $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ dados por

$$t(s) = \gamma'(s), \quad n(s) = \frac{\gamma''(s)}{k(s)}, \quad b(s) = t(s) \times n(s).$$

Os vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 e são denominados, respectivamente, vetor tangente, normal e binormal à γ em $s \in I$ e a tripla $(t(s), n(s), b(s))$ é denominado triedro móvel de Frenet de γ em $s \in I$. Além disso, dois a dois, os vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ geram um plano.

Também, as equações dadas por

$$t'(s) = k(s)n(s), \quad n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s), \quad b'(s) = \tau(s)n(s),$$

onde $\tau(s)$ é o fator de paralelismo entre $b'(s)$ e $n(s)$, são denominadas fórmulas de Frenet e determinam o comportamento de γ na vizinhança de um de seus pontos.

As derivadas $t'(s) = kn$ e $b'(s) = \tau n$, expressas nesse triedro, fornecem entidades geométricas, curvatura e torção, que são em geral independentes, e informam sobre o comportamento da curva na vizinhança do ponto. A procura por outros entes geométricos locais nos leva à calcular $n'(s)$. (DO CARMO, 1963, p. 16)

A figura 4.2, mostra geometricamente o referencial de Frenet.

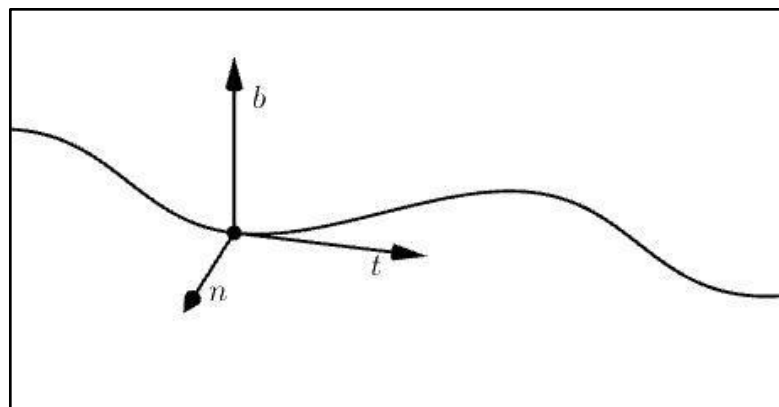


Figura 4.2: Triedro Móvel de Frenet

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 20/10/2016

A definição à seguir introduz uma ferramenta fundamental para distinguir uma curva plana de uma curva espacial.

Definição 4.3 - Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Define-se a torção de γ como o número real $\tau(s) = b'(s) \cdot n(s)$.

A grosso modo, a torção τ mede a velocidade com que uma curva γ deixa de ser plana.

Segundo Pereira Jr e Lemos (2010, p.3), diferentemente da curvatura, a torção pode ser negativa. [...] A torção mede a rapidez com que muda a direção do vetor unitário $b(s)$, isto é, a rapidez com que a curva se afasta do plano osculador (o plano gerado pelos vetores n e t).

Em 2008, Araújo apresenta um resultado que dá o significado geométrico do conceito “torção nula”.

Este resultado será tratado neste trabalho. Um dos exemplos mais clássicos de curvas são as hélices. Estas curvas caracterizam-se pela seguinte propriedade: os vetores tangentes fazem um ângulo constante com uma direção fixa.

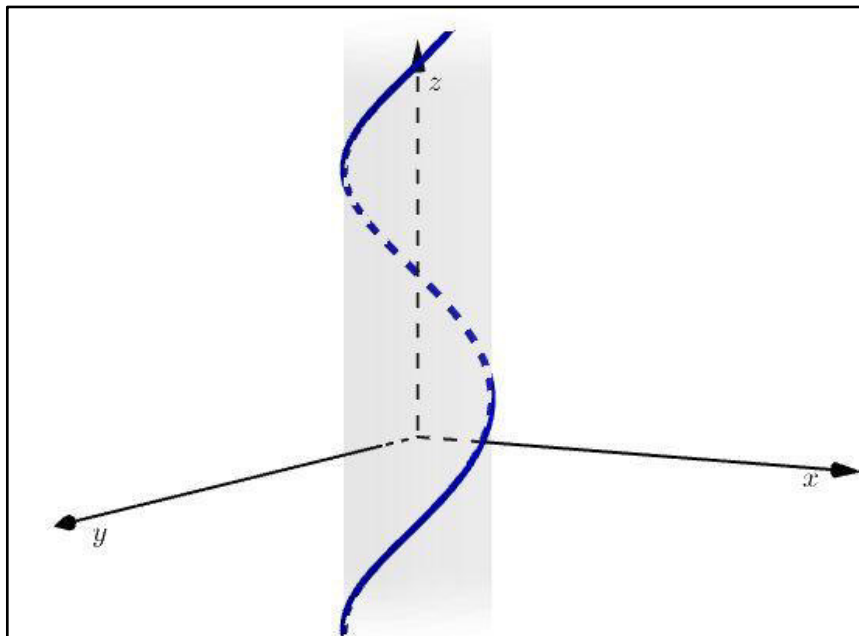


Figura 4.3: Hélice

Fonte: LUZ, Geniffer Pereira de Souza, gerado no Geogebra em 20/10/2016

A definição formal de hélice é dada à seguir.

Definição 4.4: Uma curva regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma hélice, se existe um vetor unitário v que forma um ângulo constante com $\gamma'(s)$, para todo $t \in I$, isto é,

$$\frac{\gamma'(s) \cdot v}{|\gamma'(s)|} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

No caso em que γ está parametrizada pelo comprimento de arco, então $|\gamma'(s)| = 1$ e, conseqüentemente, γ é uma hélice se $\gamma'(s) \cdot v$ é uma constante.

Uma curva γ é uma hélice circular se o vetor binormal forma um ângulo constante com o eixo do cilindro sobre o qual está a hélice. Equivalentemente, γ é uma hélice circular se, e só se, as retas que passam por $\gamma(s)$, na direção de $n(s)$, são paralelas a um plano fixo. (TENENBLAT, 1990, p. 78)

A curva de equações paramétricas dadas por

$$\gamma(s) = \left(4\cos\left(\frac{s}{5}\right), 4\sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5}s \right), s \in \mathbb{R},$$

por exemplo, é uma hélice circular que se desenrola sobre a superfície de um cilindro em \mathbb{R}^3 . De fato, tome $v = (0,0,1)$ um vetor direcional e note que

$$\gamma'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5} \right),$$

donde,

$$\frac{\gamma'(s) \cdot v}{|\gamma'(s)|} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{16}{25}\sin^2\left(\frac{s}{5}\right) + \frac{16}{25}\cos^2\left(\frac{s}{5}\right) + \frac{9}{25}}} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}}} = \frac{3}{5},$$

que é uma constante, mostrando que, de fato, esta curva é uma hélice circular.

A definição à seguir representa uma classe de curvas diferenciável cuja curvatura e a torção satisfazem uma relação linear.

Definição 4.5: Uma curva regular parametrizada $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, $k(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$, é chamada de curva de Bertrand, se existe uma curva regular parametrizada $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ em que os vetores normais de γ e β se interceptam em t , para todo $t \in I$. Assim, β é chamada o par de Bertrand de γ e podemos escrever:

$$\beta(s) = \gamma(s) + r \cdot n(s).$$

As curvas de Bertrand constituem uma família de curvas com propriedades muito ricas e, por isto, são fundamentais no estudo da geometria diferencial. Dentre estas propriedades pode-se citar, por exemplo, as seguintes:

(i) se γ é uma hélice circular, então esta curva tem infinitos pares de Bertrand, isto é, existem infinitas curvas cujas normais coincidem com as normais de γ .

(ii) se γ é uma curva de Bertrand, então ou γ é uma curva plana ou a torção $\tau(s)$ nunca se anula.

Várias outras propriedades sobre curvas de Bertrand poderiam ser tratadas neste trabalho, porém o objetivo é somente classificá-las por meio certas informações. Por isso, elas não serão apresentadas aqui com grande profundidade. Para mais detalhes veja FLORES e PANSONATO (2014) e suas referências.

Estas curvas forma descobertas por J. Bertrand em 1850 e constituem um importante tópico da geometria clássica das curvas. Tanto as hélices generalizadas como as curvas de Bertrand podem ser vistas como generalizações da hélice circular. (FLORES e PANSONATO, 2014, p. 360)

O teorema que será enunciado à seguir generaliza o teorema fundamental das curvas planas e garante que se $k(s)$ e $\tau(s)$ são conhecidos então, a menos de sua posição no espaço, existe uma única curva γ , regular e parametrizada pelo comprimento de arco, que tem $k(s)$ e $\tau(s)$ como torção e curvatura.

Teorema 4.1 (Fundamental da Curvas no Espaço): Sejam

(i) $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis de classe C^∞ ;

(ii) $s_0 \in I$, $p = (x, y, z)$ um ponto de \mathbb{R}^3 e $v = (v_1, v_2, v_3)$ um vetor unitário em \mathbb{R}^3 .

Então, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, s é o comprimento de arco de γ , $k(s)$ e $\tau(s)$ são a curvatura e a torção em cada ponto $\gamma(s)$. Além disso, γ é única quando fixados $\gamma(s_0) = p$ e $\gamma'(s_0) = v$.

Para evitar cálculos extensos, decidiu-se não apresentar a demonstração deste resultado neste trabalho. Para o leitor que esteja curioso em conhecer a prova deste teorema basta consultar TENENBLAT (1990)

O teorema fundamental nos leva a concluir que o conhecimento das funções $k(s)$, $\tau(s)$ e o comprimento de arco s bastam para caracterizar a curva, a menos de um movimento rígido. Por isto, as funções $k(s)$, $\tau(s)$ ou uma relação entre elas são denominadas de equações intrínsecas da curva. (RODRIGUES, 1959, p. 91)

O resultado principal deste trabalho classifica as curvas parametrizadas diferenciáveis por meio de informações referentes à curvatura e torção. E este resultado será tratado na próxima seção.

4.2 Classificação de Curvas Diferenciáveis

Sabe-se que a curvatura k e a torção τ de uma curva determinam o comportamento local da curva em uma vizinhança imediata de seus pontos. Mostra-se aqui, por exemplo, que informações sobre a curvatura k de uma curva determina o quanto a curva deixa de ser uma reta e que informações sobre a torção τ de uma curva determina o quanto esta curva deixa de ser plana.

Nesta seção, será enunciado o resultado principal deste trabalho. Em suma, o teorema que é apresentado aqui, classifica algumas curvas parametrizadas no plano e no espaço através de informações dadas sobre a curvatura e/ou a torção de cada uma delas. O que propõe-se aqui é um novo jeito de olhar para um teorema sobre classificação de curvas diferenciáveis.

Teorema 4.1: Seja $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então:

- (i) γ é uma reta se, e somente se, $k = 0$.
- (ii) γ é uma curva plana se, e somente se, $\tau(s) = 0$.
- (iii) γ é uma circunferência de raio $r > 0$ se, e somente se, $k = 1/r$.
- (iv) γ é uma hélice se, e somente se, $k = c\tau$, para alguma constante real c .
- (v) γ é uma curva de Bertrand se, e somente se, existem números reais, A e B , diferentes de zero, tal que, $Ak(s) + B\tau(s) = 1$.

A prova deste teorema utiliza fortemente as fórmulas de Frenet e fundamentos do cálculo diferencial e integral de uma variável real.

4.2.1 Demonstração do Teorema 4.1

Nesta seção será apresentada a prova dos resultados já enunciados. A demonstração será feita item à item com a maior riqueza de detalhes possível.

Demonstração do item (i): Suponha que γ é uma reta. Então γ pode ser parametrizada pela equação

$$\gamma(s) = (x_0 + as, y_0 + bs, z_0 + cs).$$

Logo, $\gamma'(s) = (a, b, c)$. Assim, $\gamma''(s) = (0, 0, 0)$ e, conseqüentemente,

$$k(s) = |\gamma''(s)| = 0.$$

Reciprocamente, seja γ uma curva com $k(s) = 0$. Logo, $|\gamma''(s)| = 0$ implica

$$\sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2 + (z''(t))^2} = 0,$$

donde $x''(t) = y''(t) = z''(t) = 0$. Conseqüentemente $\gamma''(s) = (0, 0, 0)$. Com isto, tem-se que, existe m constante, tal que,

$$\gamma'(s) = \gamma'(0) + \int_0^s \gamma''(z) dz = \gamma'(0) + \int_0^s 0 ds = \gamma'(0) + m := u.$$

Disto, segue também que existe n constante, tal que,

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \int_0^s \gamma'(z) dz = \gamma(0) + \int_0^s u ds = us + (\gamma(0) + n) := us + v,$$

onde $v = \gamma(0) + n$. Portanto, $\gamma(s) = us + v$ e, conseqüentemente, γ é uma reta.

Demonstração do item (ii): Suponha que γ é uma curva plana. Então, o vetor binormal à γ em s satisfaz $b(s) = 0$. Logo, $b'(s) = 0$ e, conseqüentemente,

$$\tau(s) = b'(s)n(s) = 0 \cdot n(s) = 0.$$

Reciprocamente, seja γ uma curva com torção $\tau(s) = 0$. Logo, $b'(s) = 0$ e, conseqüentemente, o vetor binormal $b(s)$ é constante. Defina a seguinte aplicação:

$$f(s) = (\gamma(s) - \gamma(s_0))b(s),$$

onde s_0 é constante em relação à s . Derivando esta expressão em s , obtem-se que

$$f'(s) = \gamma'(s)b(s) + b'(s)(\gamma(s) - \gamma(s_0)) = t(s)b(s).$$

Como $t(s)$ e $b(s)$ são vetores ortonormais, segue que, $f'(s) = 0$. Disto, tem-se que f é constante. Também, veja que:

$$f(s_0) = (\gamma(s_0) - \gamma(s_0))b(s) = 0.$$

Daí $f(s) = 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo,

$$(\gamma(s) - \gamma(s_0))b(s) = 0,$$

e, portanto, γ está contida no plano gerado por $t(s)$ e $b(s)$.

Demonstração do item (iii): Suponha que γ é uma circunferência de raio r e centro na origem. Então, γ pode ser parametrizada por

$$\gamma(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

e, com isto, γ tem derivadas dadas por,

$$\gamma'(s) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} \right) \text{ e } \gamma''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right).$$

Logo, a curvatura de γ é dada por

$$k(s) = |\gamma''(s)| = \sqrt{\left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{r}.$$

Reciprocamente, suponha que γ é uma curva com curvatura $k(s) = \frac{1}{r}$ e defina uma aplicação $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $f(s) = \gamma(s) + rn(s)$.

Das fórmulas de Frenet, tem-se que

$$n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s).$$

Como γ é uma curva plana, segue que $\tau(s) = 0$. Assim,

$$n'(s) = -\frac{1}{r} t(s),$$

e, conseqüentemente,

$$f'(s) = t(s) - r \frac{1}{r} t(s) = 0.$$

Logo, f é constante, isto é, existe, c constante, tal que, $f(s) = c$. Veja que,

$$|\gamma(s) - c| = |\gamma(s) - f(s)| = | -rn(s) | = r |n(s)| = r,$$

isto é, $|\gamma(s) - c| = r$ e, portanto, γ é uma circunferência de raio r e centro no ponto c .

Demonstração do item (iv): Suponha que γ é uma hélice e p.c.a. Logo, por definição, existe um vetor unitário v , tal que, $\gamma'(s)v = c$, onde c é uma constante real. Derivando esta expressão em s , tem-se que,

$$\gamma''(s)v + \gamma'(s)0 = 0,$$

isto é, $\gamma''(s)v = 0$.

Da definição de $n(s)$, segue que $k(s)n(s) = \gamma''(s)$, donde da equação acima segue que $k(s)(n(s).v) = 0$. Como γ é uma hélice, segue que $k(s) \neq 0$ e, conseqüentemente, $n(s)v = 0$, isto é, $n(s)$ é ortogonal a v . Logo, v pertence ao plano gerado por $t(s)$ e $b(s)$ e, assim, v pode ser escrito da forma

$$v = \cos(\theta(s))t(s) + \operatorname{sen}(\theta(s))b(s).$$

Derivando esta expressão com respeito à s , tem-se,

$0 = -\theta'(s)\text{sen}(\theta(s))t(s) + \cos(\theta(s))t'(s) + \theta'(s)\cos(\theta(s))b(s) + \text{sen}(\theta(s))b'(s)$,
 donde, utilizando as Fórmulas de Frenet $t'(s) = k(s)n(s)$ e $b'(s) = \tau(s)n(s)$, chega-se à seguinte igualdade

$$0 = -\theta'(s)\text{sen}(\theta(s))t(s) + \cos(\theta(s))k(s)n(s) + \theta'(s)\cos(\theta(s))b(s) + \text{sen}(\theta(s))\tau(s)n(s)$$

e disto,

$$0 = -\theta'(s)\text{sen}(\theta(s))t(s) + \theta'(s)\cos(\theta(s))b(s) + (k(s)\cos(\theta(s)) + \tau(s)\text{sen}(\theta(s)))n(s).$$

Como $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ formam uma base de \mathbb{R}^3 , segue que estes vetores são linearmente independentes e, com isto,

$$\begin{cases} \theta'(s)\text{sen}(\theta(s)) = 0 \\ \theta'(s)\cos(\theta(s)) = 0 \\ k(s)\cos(\theta(s)) + \tau(s)\text{sen}(\theta(s)) = 0 \end{cases}.$$

Das duas primeiras equações tem-se que $\theta'(s) = 0$ e, conseqüentemente, $\theta(s) = C$, para alguma constante real C . Isto e a última equação implicam que

$$\frac{k(s)}{\tau(s)} = -\frac{\text{sen}(C)}{\cos(C)}.$$

Tomando $c = -\frac{\text{sen}(C)}{\cos(C)}$, tem-se $k(s) = c\tau(s)$, concluindo esta parte da prova.

Reciprocamente, suponha que $k(s) = c\tau(s)$ onde c é uma constante real escolhida de forma que

$$c = -\frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)},$$

com θ independe de s . Defina

$$v = \cos(\theta)t(s) + \text{sen}(\theta)b(s).$$

Veja que v é constante, pois, utilizando as fórmulas de Frenet, segue que

$$v' = \cos(\theta)t'(s) + \text{sen}(\theta)b'(s) = \cos(\theta)k(s)n(s) + \text{sen}(\theta)\tau(s)n(s)$$

e utilizando a relação entre k e τ , tem-se $v' = -\text{sen}(\theta)\tau(s)n(s) + \text{sen}(\theta)\tau(s)n(s) = 0$.

Assim,

$$\gamma'(s)v = \cos(\theta)(t(s)\gamma'(s)) + \text{sen}(\theta)(b(s)\gamma'(s)).$$

Como $\gamma'(s) = t(s)$ e $b(s)$ e $t(s)$ são ortonormais, segue que

$$\gamma^{(s)}v = \cos(\theta)|t(s)|^2 + \text{sen}(\theta)(b(s)t(s)) = \cos(\theta) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

e, portanto, γ é uma hélice.

Demonstração do item (v): Seja γ uma curva de Bertrand e considere β seu par de Bertrand. Sejam $t(s)$ e $T(s)$ os vetores tangentes unitários à γ e β , respectivamente. Pela regra do produto, segue-se que

$$\frac{d}{ds}(t(s)T(s)) = t'(s)T(s) + t(s)T'(s).$$

Como $t'(s)$ e $T'(s)$ são paralelos à reta normal comum à γ e β , segue que $t'(s)T(s) = 0$ e $t(s)T'(s) = 0$ e, então,

$$\frac{d}{ds}(t(s)T(s)) = 0.$$

Seja θ o ângulo formado entre os vetores tangentes nos pontos correspondentes. Logo,

$$t(s)T(s) = |t(s)| |T(s)| \cos(\theta) = \cos(\theta).$$

Sejam s e S o parâmetro comprimento de arco de γ e β , respectivamente. Como γ é uma curva de Bertrand, escreve-se $\beta(s) = \gamma(s) + rn(s)$. Também, utilizando as fórmulas de Frenet, obtém-se que,

$$\begin{aligned} \cos\theta = T(s)t(s) &= \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dS} t(s) = \frac{ds}{dS} (\gamma'(s) + rn'(s))t(s) \\ &= \frac{ds}{dS} (t(s) + r(-k(s)t(s) + \tau(s)b(s)))t(s), \end{aligned}$$

donde, utilizando que $b(s)$ e $t(s)$ são vetores ortogonais e unitários, tem-se que

$$\frac{ds}{dS} (1 - rk(s)) = \cos(\theta). \quad (1)$$

Por outro lado, veja que

$$|T(s) \times t(s)| = \left| \frac{ds}{dS} (t(s) + r(-k(s)t(s) + \tau(s)b(s)))t(s) \right| = \left| \frac{ds}{dS} r\tau(s) \right|,$$

onde nesta igualdade utilizou-se que $t(s) \times t(s) = 0$ e $b(s) \times t(s) = 1$. Também, vale

$$|T(s) \times t(s)| = |T(s)| |t(s)| \sin(\theta) = \sin(\theta).$$

Logo, das duas igualdades acima, tem-se que

$$r\tau(s) \frac{ds}{dS} = \pm \sin(\theta). \quad (2)$$

Dividindo (1) por (2), segue que,

$$\frac{\frac{ds}{dS} (1 - rk(s))}{\frac{ds}{dS} r\tau(s)} = \pm \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = c,$$

onde c é uma constante. Desta forma temos que $r\tau(s)c = 1 - rk(s)$, donde

$$rk(s) + r\tau(s) = 1,$$

e, fazendo $A = r$ e $B = rc$, tem-se que,

$$Ak(s) + B\tau(s) = 1.$$

Reciprocamente, sejam γ e β duas curvas, tais que, $\beta(s) = \gamma(s) + rn(s)$ e suponha que

$$Ak(s) + B\tau(s) = 1.$$

Afirma-se que γ e β são curvas de Bertrand. De fato, como anteriormente, utilizando as fórmulas de Frenet, tem-se,

$$\frac{d\beta}{ds} = t(s) + rn'(s) = t(s) + r(-k(s)t(s) + t(s)b(s)) = (1 - rk(s))t(s) + r\tau(s)b(s).$$

Tomando $A = r$ e $B = rc$ em $Ak(s) + B\tau(s) = 1$, para alguma constante c , segue que

$$1 - rk(s) = 1 - Ak(s) = B\tau(s) = rc\tau(s),$$

e, com isto, segue que

$$\frac{d\beta}{ds} = rc\tau(s)t(s) + r\tau(s)b(s) = r\tau(s)(ct(s) + b(s)).$$

Assim, escolha uma orientação para β e defina o vetor T por

$$T(s) = \frac{ct(s) + b(s)}{\sqrt{c^2 + 1}}.$$

Note que T é um vetor tangente à β . Derivando esta expressão, tem-se que,

$$\frac{dT}{ds}(s) = \frac{ct'(s) + b'(s)}{\sqrt{c^2 + 1}} = \frac{ck(s)n(s) - \tau(s)n(s)}{\sqrt{c^2 + 1}} = \frac{(ck(s) - \tau(s))}{\sqrt{c^2 + 1}}n(s).$$

Desta forma, este vetor, que pertence à normal principal de β (pois é a derivada do vetor tangente à β), e esta normal coincide com a normal principal de γ . Logo, γ e β são curvas de Bertrand. E fica provado o teorema.

□

É claro que existem inúmeras outras curvas que podem ser classificadas via informações sobre sua curvatura e torção, porém, decidiu-se, neste trabalho, dar foco às curvas que aparecem com mais frequência nos estudos de geometria diferencial. É fato também que a geometria diferencial das curvas é muito maior do que o conteúdo que foi tratado aqui e, também, abrange conteúdos muito mais complexos, porém, o objetivo principal aqui é apenas montar um trabalho bibliográfico que possa servir de base para estudos futuros de estudantes que estejam interessados em aprofundar seus conhecimentos nesta área, de forma a produzir trabalhos avançados, e contribuir para o desenvolvimento da matemática.

CONCLUSÃO

O estudo de curvas parametrizadas diferenciáveis constitui um importante fundamento para construção e compreensão da geometria diferencial. Através da história podemos perceber detalhadamente como a construção de tal ciência ocorreu ao longo do tempo, desde Euclides passando por Gauss, até o matemático Hibert. Todos, apesar de épocas distintas, unidos a favor de uma causa. Destarte, por intermédio destes estudos, tornou-se possível resolver problemas conhecendo a forma paramétrica ou as propriedades de uma curva, como verificado no terceiro capítulo.

Ademais, o estudo da geometria diferencial permite compreender as propriedades das curvas parametrizadas ao estudar conceitos fundamentais como vetores normais, vetores tangentes, curvatura e torção e, assim, é possível determinar e classificar uma quantidade importante de curvas no plano e no espaço por meio das fórmulas de Frenet (tais fórmulas determinam o comportamento local de uma dada curva nas vizinhanças de seus pontos) e de informações relacionadas com a curvatura e torção de cada curva. No quarto capítulo foi apresentado um estudo sobre a geometria diferencial das curvas parametrizadas com o objetivo de classificar certas curvas por meio de informações à priori sobre sua curvatura e torção. O diferencial do resultado obtido é que este classifica em um só teorema uma série de curvas importantes no estudo da geometria. As curvas que foram apresentadas aqui não são as únicas que podem ser classificadas por meio de dados sobre a curvatura e a torção. Mais exemplos destas curvas podem ser encontradas na bibliografia listada.

Também, este trabalho permite uma visão mais compacta do estudo das curvas parametrizadas diferenciáveis e, desta forma, o estudante interessado em matemática pode tomá-lo de base para estudos em geometria diferencial.

Além disso, este trabalho pode servir de fonte de pesquisa para alunos de licenciatura ou bacharelado em matemática que possam estar interessados em escrever trabalhos nesta área da matemática. Portanto, este se torna um motivador para estudos mais avançados em matemática pura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, Y; RIBEIRO, S. **Tratriz e Catenária: Modelos e Métodos Matemáticos**. UNICAMP. Campinas, SP. 2015.

ALENCAR, H; SANTOS, W. **Geometria das Curvas Planas**. Ed. UFG: Goiânia, GO. 2002.

ARAÚJO, P. V. **Geometria diferencial**. 2. ed. IMPA: Rio de Janeiro, RJ. 2008.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. Uta C. Merzbach: São Paulo, SP. 2010.

DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial Local**. IMPA: Rio de Janeiro, RJ. 1963.

DO CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 4. ed. IMPA : Rio de Janeiro, RJ. 2010.

COIMBRA, J. R. V. **Uma introdução à geometria diferencial**. Dissertação (Mestrado em Matemática) Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP. 2008.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática: Para o uso em Sala de Aula – Geometria**. Editora Atual, São Paulo, SP. 1994.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Editora UNICAMP Campinas, SP, 2011.

.

FARIA, S. R. **A Catenária**. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte, MG. 2011.

FRENSEL, K. **Geometria Analítica II**. Fund. CECIERJ, Rio de Janeiro, RJ. 2008.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas**. 3. ed. IMPA, Rio de Janeiro, RJ. 2012.

FLÔRES, M. V.; PANSONATO, C. C. **Hélices generalizadas e curvas de Bertrand**. Revista Ciência e Natura, 359-366p. UFSM, Santa Maria, RS, 2014.

HARLE, C. E. **Geometria Diferencial**. IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1973.

PEREIRA JR, A. D. e LEMOS, N. A. **Geometria Diferencial das Curvas e Dinâmica das Partículas**. UFF, Niterói-RJ, 2010.

REIS, F. E.; ALMEIDA, D. M. **Um Estudo Introdutório Sobre Cissóides**. FAMAT em Revista nº11, 263-294p, Uberlândia, MG, 2008.

RODRIGUES, A. **Geometria Diferencial 1º Volume**. UFRGS, Porto Alegre-RS, 1959.

RODRÍGUEZ, L. **Introdução à Geometria Diferencial**. IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1977.

SALDANHA, C. A. M. **Sobre as hipóteses que servem de fundamento à geometria**. Transformação, São Paulo, v. 11, p. 89-99, 1988.

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 1º Ed. Editora UNB. Brasília, DF. 1990.