MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO
CÂMPUS URUTAÍ

UM ESTUDO SOBRE O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA VIA ANÁLISE DA VARIAÇÃO DE SEUS PARÂMETROS a, b E c.

URUTAÍ-GO
MARÇO/2016

LETÍCIA ALVES DE ARAÚJO

UM ESTUDO SOBRE O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA VIA ANÁLISE DA VARIAÇÃO DE SEUS PARÂMETROS a, b E c.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Goiano – Campus Urutaí, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Dassael Fabrício dos Reis Santos.

Urutaí-GO
Março/2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/IF Goiano Câmpus Urutaí

A149e Araújo, Letícia Alves de .

Um Estudo Sobre o Gráfico da Função Quadrática Via Análise da Variação de Seus Parâmetros a, b E c. [manuscrito] / Letícia Alves de Araújo . -- Urutaí, GO: IF Goiano, 2016.

47 fls.

Orientadores: Me.: Dassael Fabrício dos Reis Santos

Monografia (Graduação) – Instituto Federal Goiano Campus Urutaí, 2016.

1. *Função quadrática* . 2. Gráfico . 3. Comportamento . 4 . Parábola . I. Título .

CDU 51

Trabalho de Curso apresentado como exigência para a obtenção do Título de Graduação em Licenciatura em Matemática no Instituto Federal Goiano Campus Urutaí.

Aprovado em 23 / 03 / 2016.

BANCA EXAMINADORA:

Dassael Fabrício dos Reis Santos

Prof. Me. Dassael Fabrício dos Reis Santos – Orientador

Wérica Pricylla de Oliveira Valeriano

Prof. Ma. Wérica Pricylla de Oliveira Valeriano – membro interno

Marcos Túlio Alves de Carvalho

Prof.ª Me. Marcos Túlio Alves de Carvalho – membro externo

Dedico este trabalho à minha família pelo apoio que me deram durante esse período e pelo empenho para o meu sucesso profissional e pessoal.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela minha vida e por ter me capacitado para chegar até aqui.

Agradeço a toda minha família por ter acreditado e confiado em mim. Em especial, toda a minha gratidão, a minha mãe Andréia Damacena, minha avó Maria Divina e meu amado avô Mário Oliveira pelo apoio nas horas mais difíceis, pelo amor incondicional e por não me fazer desistir.

Ao meu querido Jhonathan Scartezini por estar ao meu lado com palavras de incentivo, por oferecer preciosos conselhos me impulsionando a seguir.

Às minhas amigas, Maiara Souza e Thatiany Santos pela cumplicidade e pelas trocas de experiências.

Ao professor e orientador Dassael Fabrício pelo apoio, estímulo, colaboração e pela compreensão para comigo.

Ao professor Marcos Túlio Alves de Carvalho e à professora Wérica Pricylla de Oliveira Valeriano pela disponibilidade em participar da banca de defesa.

À todo o corpo docente que contribuiu imensamente para o meu desenvolvimento acadêmico.

RESUMO

Neste trabalho será estudado como os parâmetros a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ influenciam no comportamento ou deslocamento do gráfico da função f no plano cartesiano. Para isto, primeiro serão definidos as propriedades e características principais da função do segundo grau, bem como as de seu gráfico, a fim de construir uma teoria que auxilie nos estudos posteriores. Em seguida será analisada, para cada coeficiente em particular, o comportamento do gráfico de f com sucessivas variações de tais coeficientes. Além, serão utilizados softwares matemáticos de plotagens para construção de gráficos, com o intuito de compreender e ter uma melhor percepção geométrica sobre o que acontece com o gráfico da função do segundo grau quando à variação de seus coeficientes. Também serão aplicadas oficinas em uma escola do ensino médio sobre o assunto para analisar qual o nível de conhecimento dos alunos da região quanto ao conteúdo e serão utilizando os softwares Geogebra e Excel para demonstrações geométricas referentes ao assunto. Em seguida será descrito um relatório desta situação.

PALAVRAS-CHAVE: Função quadrática. gráfico. comportamento. parábola.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1: Gráfico da função quadrática quando $a < 0$.....17
Figura 2. 2: Gráfico da função quadrática quando $a > 0$.....17
Figura 2. 3: Intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados. 18
Figura 2. 4: Intersecção do gráfico de f com o eixo das abscissas no caso $\Delta > 0$. ..20
Figura 2. 5: Intersecção do gráfico de f com o eixo das abscissas no caso $\Delta = 0$. ..21
Figura 2. 6: Gráfico de f no caso $\Delta < 0$.....21
Figura 2. 7: Crescimento e decrescimento da função f. 22
Figura 2. 8: Simetria do gráfico de f. 25
Figura 2. 9: Simetria do gráfico de f em relação ao vértice. 26
Figura 2. 10: Crescimento e decrescimento do gráfico de f quando $a > 0$.....29
Figura 2. 11: Crescimento e decrescimento do gráfico de f quando $a < 0$.....30
Figura 3. 1 Deslocamento do vértice da parábola quando $a > 0$ e quando $a < 0$.....34
Figura 3. 2: Deslocamento do vértice e abertura da parábola no caso $b < 0$.....35
Figura 3. 3: Deslocamento do vértice e abertura da parábola no caso $b > 0$.....36
Figura 3. 4: Abertura e fechamento da parábola se $c < 0$ ou $c > 0$. 37
Figura 3. 5: Abertura e fechamento da parábola se $c = 0$.....37
Figura 3. 6: Deslocamento da parábola se b varia k unidades. 39
Figura 3. 7: Deslocamento da parábola se c varia k unidades.....41

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 9

1 UM RELATO HISTÓRICO SOBRE A FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU 11

1.1 Um Breve Contexto Histórico 11

2 A FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU E SEU GRÁFICO 16

2.1 Definição e Primeiras Propriedades da Função Quadrática 16

2.2 O Vértice da Parábola 21

2.3 Simetria e Crescimento da Parábola 24

3 A VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS E O GRÁFICO DE $f(x)$ 32

3.1 Variação do Coeficiente a 32

3.2 Variação do Coeficiente b 38

3.3 Variação do coeficiente c 40

4 RELATO DA OFICINA FUNÇÃO QUADRÁTICA 42

4.1 Descrição da Oficina 42

4.2 Sequência Didática 43

4.3 Procedimentos 44

4.4 Considerações Finais Sobre a Oficina 45

CONCLUSÃO 46

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 47

INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em analisar e entender a influência dos parâmetros a, b e c sobre o comportamento do gráfico da função do segundo grau,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

observando que a variação de tais parâmetros implicam condições sobre o nível de abertura e o comportamento da concavidade, o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal da parábola.

Muitas vezes, o estudo da função quadrática não é desenvolvido com grandezas de detalhes nos cursos de ensino médio e fundamental, isso devido à superficialidade com que o conteúdo é ministrado ou pela falta de tempo no decorrer do curso ou ainda porque o programa da disciplina não abrange certos conteúdos, portanto este trabalho surge da necessidade de fornecer e difundir um conhecimento básico com um maior nível de detalhamento de tal conteúdo para grupos de estudantes de tais cursos para tentar eliminar estas falhas e produzir um material completo que sirva de auxílio e fonte de pesquisa para professores e alunos do ensino básico que desejam realizar um estudo mais aprofundado e detalhado sobre funções quadráticas.

Além disso, objetiva-se estudar problemas advindos de tal conceito de forma a auxiliar os professores a desenvolverem uma metodologia significativa e aprofundada com os alunos em sala de aula e apontar ao estudante do ensino médio e fundamental a relevância de tal estudo no campo da matemática, provocando assim o aprimoramento e o aperfeiçoamento do conhecimento matemático.

Nesta perspectiva, este trabalho está dividido em quatro capítulos com o objetivo de aprimorar os conhecimentos sobre função quadrática e o comportamento do seu gráfico.

O primeiro capítulo destina-se a fazer um relato histórico sobre as origens e a evolução do estudo da função do segundo grau, passando por todos os níveis de desenvolvimento deste estudo, desde os povos babilônicos até os povos contemporâneos.

O segundo capítulo aborda as particularidades da função do segundo grau, bem como sua própria definição. Visa também evidenciar a dedução das fórmulas para se obter as raízes, os pontos notáveis e os vértices da parábola.

O terceiro capítulo tem por objetivo fazer uma análise rigorosa sobre comportamento do gráfico da função quadrática, através dos parâmetros a, b e c.

E por fim, o quarto capítulo visa relatar as aplicações de oficinas utilizando softwares matemáticos tais como o Excel e o GeoGebra, com os alunos do 9º ano do ensino fundamental do Colégio Estadual Dr. Vasco dos Reis Gonçalves e analisar os resultados obtidos.

1 UM RELATO HISTÓRICO SOBRE A FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Estudar as equações do segundo grau, assim como toda a matemática, vai além de analisar fórmulas e gráficos. Aplicações deste assunto podem ser encontradas nas mais diversas áreas e situações, tais como, por exemplo, nos lançamentos de objetos sujeitos à ação da gravidade, em problemas de otimização, isto é, em problemas em que se encontrar área máxima ou mínima de certas regiões planas, no estudo do movimento uniformemente variado da Física, dentre outras tantas aplicações.

> O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p. (LIMA, 2006, p. 119)

Os primeiros relatos sobre este estudo trouxeram grandes contribuições tanto para o campo de estudo matemático quanto para as áreas aplicadas. Diante disso, este capítulo tem o objetivo de relatar sobre as origens e a evolução do estudo da função do segundo grau.

1.1 Um Breve Contexto Histórico

Os povos babilônicos foram uma das civilizações antigas que mais praticaram o estudo da matemática. Todo conhecimento adquirido permitiu que estes povos resolvessem diversos problemas matemáticos, inclusive equações do segundo grau. Uma das primeiras contribuições foram encontradas em tábuas cuneiformes escritas por volta de 1800 a.C. Nessa tábua babilônica existiam 24 problemas que envolviam equações do segundo grau. O método soma e produto era uma forma de se encontrar as raízes da equação e é utilizado até hoje. Como não existiam fórmulas específicas e diretas para se encontrar essas raízes, os babilônios

ensinavam os procedimentos através de receitas. Porém, cada problema era solucionado a partir de uma prática particular.

Segundo Lima (2006, p. 120), a receita para se encontrar dois números era assim enunciada pelos babilônios:

> Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

As resoluções também poderiam ser interpretadas geometricamente e as soluções negativas eram descartadas, pois os babilônios definiam os problemas com valores positivos. Esses conhecimentos não chegaram a ser reunidos e aplicados na forma de fórmula matemática, como foi o caso da fórmula de Bháskara, por exemplo. Posteriormente, os gregos transformaram todo o conhecimento que os babilônicos deixaram como referência em resultados geométricos elaborados e estruturados para que assim desenvolvessem procedimentos mais metódicos e demonstrações matemáticas com grande teor de exatidão.

Nesse período, Euclides, Arquimedes e Apolônio, se destacaram pelos estudos aprimorados que deram subsídios ao conceito da parábola. Por volta de 300 a.C o problema da Quadratura da Parábola, que é o estudo da área delimitada por uma reta e uma parábola, foi desenvolvido por Arquimedes. Diante disso, o conhecimento foi se aprimorando através de Apolônio. Em sua obra “As Cônicas”, que é a mais relevante dentre as outras, ele introduziu, de forma aperfeiçoada, a análise sobre as secções cônica. Esse conceito inseriu as denominações de elipse, parábola e hipérbole. De acordo com Boyer (2001) *apud* Ribeiro (2013, p. 6)

> As secções cônicas eram conhecidas há mais de cem anos quando essa obra foi escrita. Antecedente, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas por secções planas de três tipos diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo do vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Dessa forma, Apolônio mostrou, pela primeira vez, que não seria necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que através de apenas um cone poderiam ser obtidas todas as três espécies de secções, variando-se a inclinação do plano da secção, relacionando assim as curvas umas com as outras.

A superfície das parábolas também foi bastante discutida nesse período, o fato de uma parábola girar em torno do seu eixo possuía e possui diversas

aplicações que despertou curiosidades. Esta superfície ficou conhecida como paraboloide de revolução.

Diante de todo o estudo que os gregos fizeram, os árabes assimilaram a matemática grega e fizeram progressos em várias áreas, bem como encontrar uma resolução para as equações do segundo grau.

Matemático e astrônomo persa, Al-Khowarizi foi o autor da primeira aritmética árabe. Em uma de suas obras publicadas escreveu sobre o sistema de numeração hindu e teve grande influência na Europa. Al-Khowarizi também elaborou um método geométrico para resolver equações do segundo grau. Para isso, ele desenvolveu três procedimentos no qual foi denominado Al-Jabr, Al-Muqabala e Al-Radd e utilizado para as resoluções das equações.

O procedimento Al-Jabr tinha o intuito de adicionar termos iguais a ambos os membros de uma equação, para que assim eliminasse os termos negativos. O Al-Muqabala era aplicado em seguida do procedimento Al-Jabr para que houvesse a redução dos termos positivos por meio da subtração de quantidades iguais de ambos os membros da equação. Por fim, Al-Radd tinha o objetivo de transformar o coeficiente da maior potência em um, ou seja, era necessário que houvesse a divisão de todos os termos pelo coeficiente de maior potência.

Com o efeito do aprimoramento da técnica de obter raízes de uma equação do segundo grau, os europeus desenvolveram uma álgebra simbólica e os números negativos começaram a aparecer com maior frequência, pois não foi destacada a hipótese de existir raízes negativas de uma equação. Até meados do século XVI, o fato de não se usar fórmulas para a resolução de equações se justificava porque não se representavam por letras os coeficientes da equação.

> Achar raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ é, também, um conhecimento milenar. Note-se que, até o fim do século 16, não se usava fórmula para os valores das raízes, simplesmente porque não se apresentavam por letras os coeficientes de uma equação. Isto começou a ser feito à partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Antes disso, o que se tinha era uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos (com coeficientes numéricos). (LIMA, 2006, p. 120)

A partir de François Viète, essa concepção sofreu algumas mudanças. De fato, as equações passaram a serem expressas através de alguns símbolos, palavras abreviadas ou palavras escritas por extenso, e também a palavra mais foi representada pela letra p e o menos pela letra m.

Com o surgimento do período do Renascimento Europeu, os pintores, escultores, escritores e comerciantes obtiveram grande destaque. Diante disso, com o intuito de substituir as letras p e m nas equações de Viète, os matemáticos dessa época se propuseram a encontrar, no comércio do Renascimento, dois sinais ainda não conhecidos. Com o objetivo alcançado, as letras p e m passaram a ser representadas por + e por -, respectivamente. Assim, esses sinais permaneceram definitivamente na Matemática. Finalmente, as equações do segundo grau foram expressas por uma fórmula pela primeira vez.

De acordo com Guelli (2001) *apud* Neto (2011, p. 30), baseado em estudos feitos por grandes matemáticos da antiguidade, Vieté expressou pela primeira vez as equações do segundo grau pela fórmula geral:

$$B \text{ in } A \text{ área} + C \text{ in } A + D \text{ é igual a } 0,$$

onde, em termos atuais, “in” representa a operação de multiplicação, A área representa a área de um quadrado de lado x, isto é, A área $= x^2$, A representa um lado do quadrado de lado x, isto é, $A = x$ e B, C e D são os parâmetros a,b e c. Algum tempo depois, o sinal de igualdade foi introduzido na Matemática por Thomas Harriot, então a palavra igual da equação definida por Viète passou a ser representada pelo símbolo correspondente =, ficando da seguinte maneira:

$$B \text{ in } A \text{ área} + C \text{ in } A + D = 0.$$

Mais tarde, a representação das incógnitas e dos coeficientes passou por outra mudança muito significativa e prática. René Descartes colocou em prática o uso das últimas letras do alfabeto (x, y, z) para a representação de incógnitas e as primeiras letras (a, b, c) para representar os coeficientes.

A fim de se determinar uma fórmula resolutiva para as equações do segundo grau, o matemático Sridhara, no período Moderno, desenvolveu e deduziu essa “técnica/fórmula”, atualmente conhecida como fórmula de Bhaskara. A nomenclatura dessa fórmula não se relaciona, de fato, com quem a descobriu.

> Bhaskara foi um famoso matemático hindu do século XII que desenvolveu trabalhos relacionados à matemática e astronomia. O destaque se deu pelo fato dele ter alcançado um nível elevado de entendimento dos sistemas de números e resoluções de equações. Bhaskara também teve grande mérito e destaque diante de toda a história da Matemática, porém a descoberta da “fórmula de Bhaskara” não foi de sua autoria. (RIBEIRO, 2013, p. 9)

Por volta de 1960, esse hábito de relacionar Bhaskara à fórmula de resolução da equação do segundo grau, se fixou no Brasil. Essa nomenclatura é

errônea, pois essa fórmula não deve ser atribuída somente a uma pessoa. Por trás desse nome existe uma conjuntura de grandes matemáticos que ajudaram a encontrar, desenvolver e deduzir essa fórmula.

Atualmente, a fórmula para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau é a seguinte:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Segundo Ribeiro (2013, p. 3), geometricamente, determinar as raízes de uma equação do segundo grau consistia em determinar os lados de um retângulo conhecendo seu semiperímetro s e sua área p.

A história da equação do segundo grau é pouco abordada nos livros didáticos de matemática e também pouco difundida em sala de aula. De acordo com Valdés (2002) *apud* Neto (2011, p. 40)

> O valor do conhecimento histórico não consiste em ter uma bateria de histórias e anedotas curiosas para entreter os alunos, a história pode e deve ser utilizada, para entender e fazer compreender uma ideia mais difícil e complexa de modo mais adequado.

Inúmeros outros matemáticos abordaram em seus estudos funções do segundo grau como, por exemplo, Galilei Galilei no estudo dos corpos em queda livre, René Descartes fazendo estudos sobre as cônicas enquanto desenvolvia a geometria analítica, Newton e Leibniz durante o desenvolvimento do cálculo, e até mesmo Leonard Euler em seus trabalhos. Porém para que o texto não fique muito longo, resolveu-se aqui abordar somente casos isolados que não tirem o foco do trabalho.

Nos dias atuais, os conceitos e propriedades sobre a função quadrática, tais como simetria, existência de raízes, comportamento do gráfico, dentre outros, já está totalmente desenvolvido, cabendo ao interessado em matemática compreende-los de forma à usá-los para solucionar situações e problemas que possam envolver tais técnicas.

Nos capítulos seguintes serão tratados os conceitos e propriedades básicas das funções do segundo grau, bem como fazer uma análise sobre seu gráfico.

2 A FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU E SEU GRÁFICO

Este capítulo tem por objetivo explicitar conceitos básicos sobre a função do segundo grau bem como suas particularidades, tais como obtenção de raízes e o comportamento da curva descrita pelo seu gráfico com intuito de dar embasamento teórico para um estudo mais formal das características do gráfico da função quadrática. Os gráficos que aqui serão apresentados servem como ferramentas para análise e visualização das demonstrações.

Neste capítulo serão abordadas as características principais da função quadrática bem como de seu gráfico, descrevendo de uma forma rigorosa os métodos de obtenção das raízes da função, caracterizando pontos de máximo e de mínimo da curva descrita pelo seu gráfico, e analisando o comportamento de tal gráfico quanto a simetria e os intervalos de crescimento e decrescimento da curva.

2.1 Definição e Primeiras Propriedades da Função Quadrática

Toda e qualquer função possui características. No estudo da função do segundo grau é importante ressaltar essas particularidades. Então, o objetivo principal aqui é analisar seu gráfico, determinar as interseções com os eixos ordenados e mostrar a existência de um ponto notável, que será denominado vértice.

Ao se tratar de função quadrática, inicialmente deve-se conhecer sua definição. De acordo com Lima (2006, p. 127) uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita quadrática, ou do segundo grau, quando existem números reais a, b, c com $a \neq 0$, tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, f é da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

> O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y. Se o coeficiente de x^2 for positivo ($a > 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima. Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima. (FLEMMING, 2006, p. 26).

Mais especificadamente, tem-se que

(i) se $a < 0$, a concavidade da parábola estará voltada para baixo, como pode ser observado na figura 2.1.

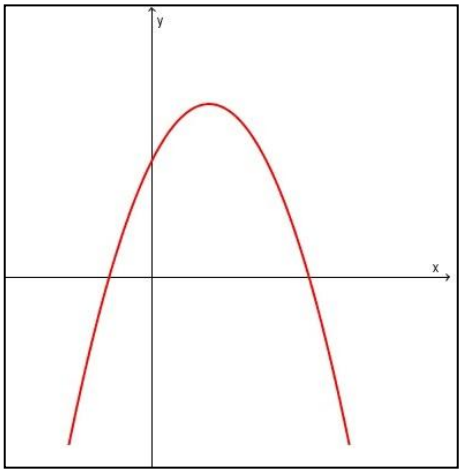

Figura 2. 1: Gráfico da função quadrática quando $\boldsymbol{a} < 0$
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016.

(ii) se $a > 0$, a concavidade da parábola estará voltada para cima, como pode ser observado na figura 2.2.

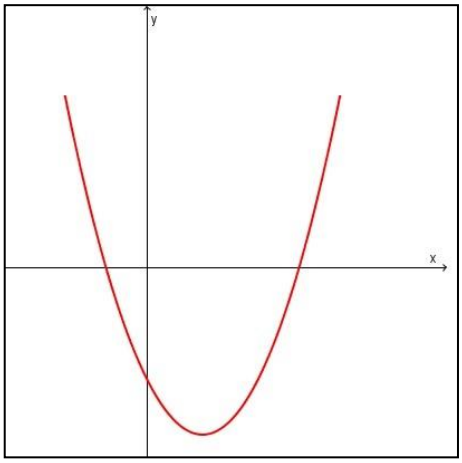

Figura 2. 2: Gráfico da função quadrática quando $\boldsymbol{a} > 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016.

Uma segunda análise sobre o comportamento do gráfico da função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se dá através do estudo da convexidade da função f, ou equivalentemente, através do estudo do sinal da derivada de segunda ordem de f. De fato, lembre-se que uma função f é dita convexa se seu gráfico estiver abaixo de qualquer uma de suas secantes (no caso da função quadrática, quando a parábola tem concavidade voltada para cima) e f é dita côncava se seu gráfico estiver acima de qualquer uma de suas secantes (no

caso da função quadrática, se a parábola tem concavidade para baixo). Em termos da derivada de segunda ordem tem-se:

(i) uma função f é convexa se $f''(x) > 0$, para todo x no domínio da f.

(ii) uma função f é côncava se $f''(x) < 0$, para todo x no domínio da f.

No caso da função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, devido a sua derivabilidade, tem-se

$$f'(x) = 2ax + b,$$

donde

$$f''(x) = 2a.$$

Assim, tem-se duas possibilidades:

(i) Se $a > 0$, então $f''(x) = 2a > 0$. Logo, f é convexa e, consequentemente, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

(ii) Se $a < 0$, então $f''(x) = 2a < 0$. Logo, f é côncava e, consequentemente, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

No que se refere a intersecção com os eixos coordenados, tem-se a ocorrência de três intersecções da parábola descrita pelo gráfico da função do segundo grau com tais eixos, à saber: uma intersecção com o eixo y, denominado eixo das ordenadas, e duas intersecções com o eixo x, denominado eixo das abscissas. Tais intersecções com o eixo x são denominadas raízes ou zeros da função e serão tratadas mais a frente.

No gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, a interseção com o eixo das ordenadas ocorre no ponto c, como mostra a figura 2.3, isto é, quando $x = 0$. Em termos, se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f(0) = a.(0)^2 + b.0 + c$, donde $f(0) = c$.

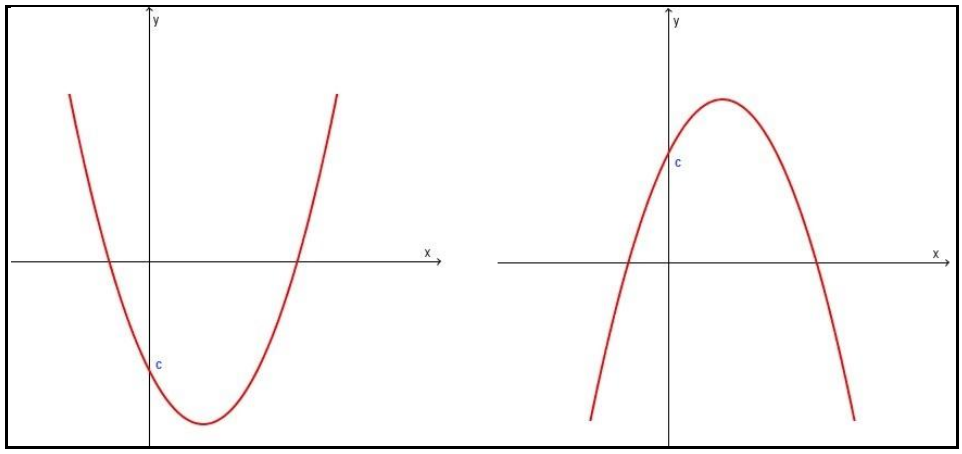

Figura 2. 3: Intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016.

Por outro lado, no que se refere a interseção do gráfico de f com o eixo das abscissas, observa-se a seguinte situação: se $f(x) = 0$, então $f(x)$ pode ter duas raízes distintas, duas raízes iguais ou nenhuma raiz, dependendo de certas condições que serão descritas mais adiante, e, com isso, o gráfico da função f pode intersectar o eixo-x em dois pontos, denotados por x_1 e x_2, em um único ponto, ou em nenhum ponto. Neste caso utiliza-se a seguinte expressão, denominada fórmula de Bháskara, a fim de encontrar as raízes da equação $f(x) = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A prova desta fórmula é obtida através de simples manipulação algébrica é será demonstrada no teorema à seguir.

Teorema 1 (Fórmula de Bháskara) **–** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Se $f(x) = 0$, então,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demonstração: De fato, se $f(x) = 0$, considere o trinômio

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Colocando o coeficiente a em evidência, tem-se

$$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0,$$

e dividindo ambos os lados da equação acima por a, obtém-se que

$$\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Agora, somando o termo $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}$ do lado esquerdo da igualdade acima e fazendo um agrupamento conveniente de termos, observa-se a seguinte expressão:

$$\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0$$

Consequentemente, como $\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ e $\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$, tem-se

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Donde, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, vem que,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

e desta última igualdade, obtém-se

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

portanto, tem-se que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

o que prova o teorema 1.

> O número $\Delta = b^2 - 4ac$ chama-se discriminante da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. [...] Quando $\Delta > 0$, a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais e quando $\Delta = 0$, a mesma equação possui uma única raiz chamada raiz dupla. (LIMA, 2010, p. 25)

A partir dos valores obtidos no discriminante, podem-se fazer as seguintes análises sobre a equação do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$:

(i) se $\Delta > 0$, a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais, à saber:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

e, consequentemente, o gráfico de f intersecta o eixo-x em dois pontos distintos, como mostra a figura 2.4.

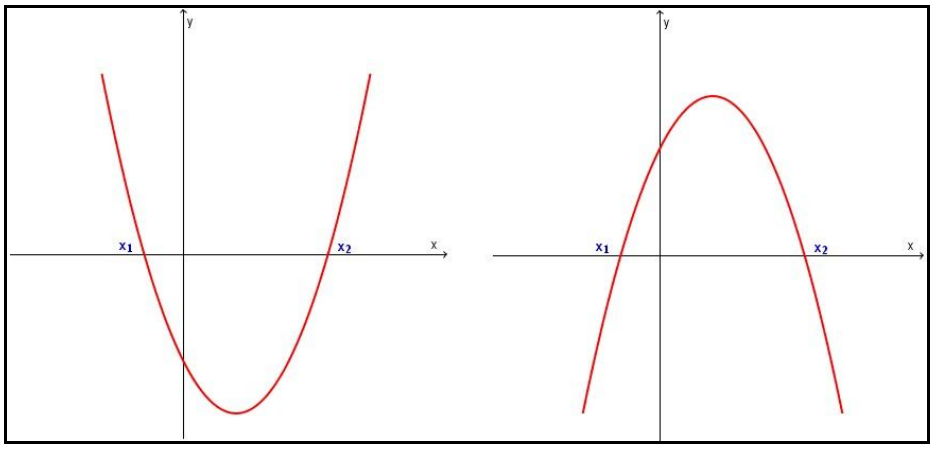

Figura 2. 4: Intersecção do gráfico de $\boldsymbol{f}$ com o eixo das abscissas no caso $\Delta > 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016.

(ii) se $\Delta = 0$, a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais iguais, à saber:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a},$$

e, assim, o gráfico de f intersecta o eixo-x em um único ponto (veja a figura 2.5).

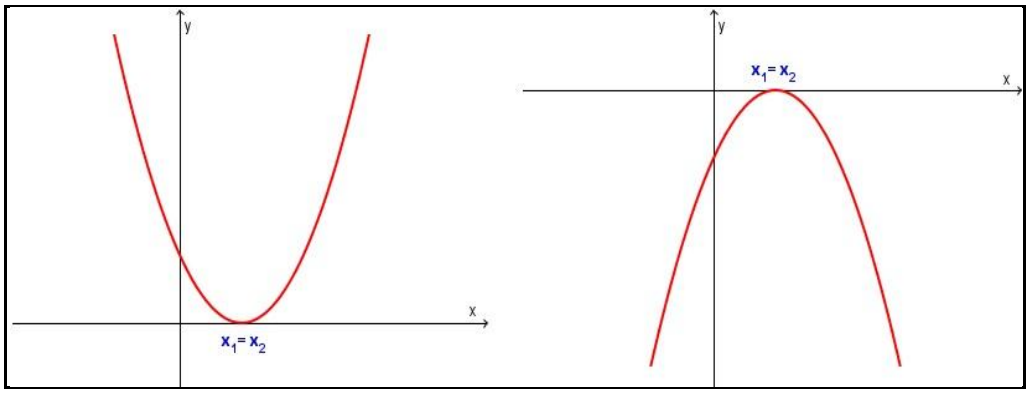

Figura 2. 5: Intersecção do gráfico de $\boldsymbol{f}$ com o eixo das abscissas no caso $\Delta = \mathbf{0}$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016.

(iii) se $\Delta < 0$, a equação $f(x) = 0$ não possui nenhuma raiz real e, com isso, o gráfico de f não intersecta o eixo-x.

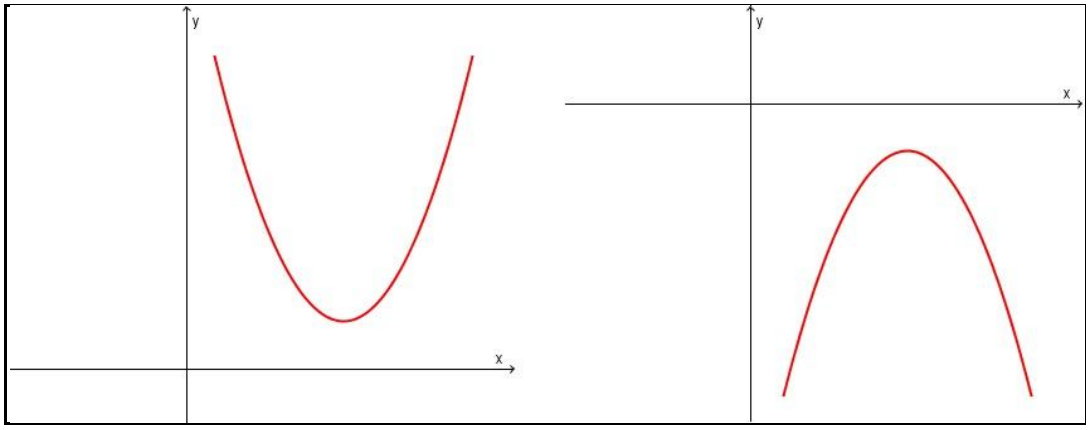

Figura 2. 6: Gráfico de $\boldsymbol{f}$ no caso $\Delta < 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016.

Em resumo, a equação do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ apresentará duas raízes, uma raiz ou nenhuma raiz, dependendo do sinal do discriminante Δ e, consequentemente, o gráfico da função quadrática intersectará o eixo das abscissas em dois, um ou em nenhum ponto.

2.2 O Vértice da Parábola

Outra importante característica do gráfico da função quadrática está no que se denomina vértice da parábola. Este ponto tem pelo local geométrico onde o

comportamento da parábola passa de crescente para o decrescente (no caso em que o parâmetro a é negativo), ou de decrescente para crescente (no caso em que o parâmetro a é positivo).

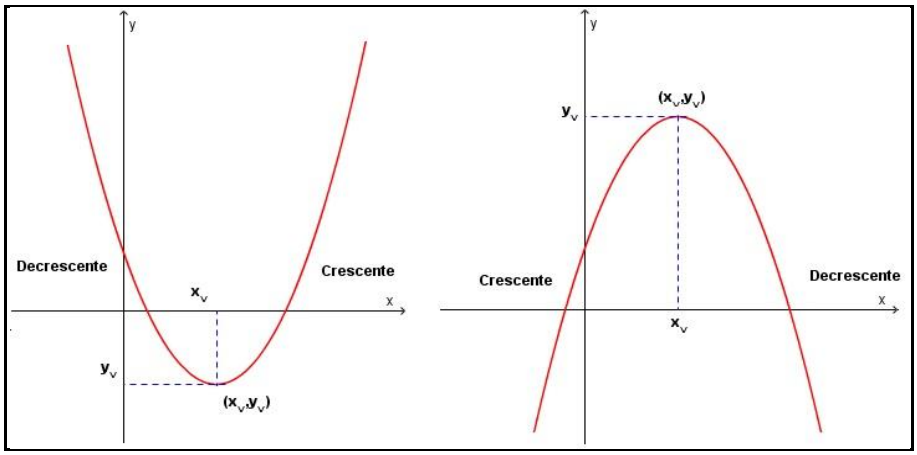

Figura 2. 7: Crescimento e decrescimento da função $\boldsymbol{f}$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016.

Em outros termos, dependendo do sinal do parâmetro a, o vértice da parábola descrita pelo gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o ponto cujas coordenadas são formadas pelo ponto de máximo (respectivamente, de mínimo) e o valor de máximo (respectivamente, de mínimo) da função f, como pode ser observado na figura 2.7.

> Se $a > 0$, a parábola que representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem a concavidade para cima. Dessa forma, a função possui um ponto de mínimo dado pelo vértice $V(x_v, y_v)$, e o valor mínimo corresponde à ordenada y_v. Se $a < 0$, a parábola que representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem a concavidade para baixo. Dessa forma, a função possui um ponto de máximo dado pelo vértice $V(x_v, y_v)$, e o valor máximo corresponde à ordenada $V(x_v, y_v)$. (RIBEIRO, 2010, p. 140-141)

Assim, a abscissa do vértice da parábola, denotada por x_v, é determinada pela derivada da função $f(x_v) = a{x_v}^2 + bx_v + c$, com $f'(x_v) = 0$. Em termos, derivando $f(x_v)$ com respeito à x_v, tem-se que

$$f'(x_v) = 2ax_v + b.$$

Se $f'(x_v) = 0$, vem que $2ax_v + b = 0$, donde, isolando x_v, obtém-se

$$x_v = \frac{-b}{2a}.$$

Agora, por meio do valor da abscissa x_v, é possível encontrar o valor da ordenada, denotada por y_v, do vértice da parábola descrita pelo gráfico da função quadrática f, isto é, se $y_v = f(x_v) = a{x_v}^2 + bx_v + c$, então,

$$y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c.$$

Assim,

$$y_v = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c,$$

e, consequentemente, tem-se

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c.$$

Obtendo o mínimo múltiplo comum entre os denominadores da expressão acima, tem-se que

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a},$$

donde segue que

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, obtém-se

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

E isto mostra que o vértice da parábola é o ponto $V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Se $a > 0$, então V é um ponto de mínimo do gráfico de f, e se $a < 0$, V é um ponto de máximo do gráfico da função f.

> A determinação do vértice da parábola ajuda a elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função bem como seu valor de máximo e mínimo. Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola é simétrica em relação a um eixo vertical. Determinando a posição desse eixo encontraremos a abscissa do vértice, e com a abscissa do vértice obteremos a ordenada, que é uma função da abscissa. (DANTE, 2010, p. 174).

Uma outra maneira de encontrar as coordenadas do vértice da parábola é obtida operando as raízes da função quadrática f. De fato, se $\Delta \geq 0$, então f possui duas raízes reais, denotadas por x_1 e x_2. Logo a abscissa do vértice x_v do gráfico da função f pode ser definida como o ponto médio entre raízes x_1 e x_2. Com efeito, se x_1 e x_2 são duas reais de f, então

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, calculando a média aritmética entre x_1 e x_2, segue que

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a} = x_v.$$

Para obtenção da ordenada do vértice y_v, basta proceder como anteriormente calculando $y_v = ax_v^2 + bx_v + c$.

Na próxima seção serão abordadas algumas importantes características do gráfico da função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, tais como, simetria do gráfico com respeito a reta $x = x_v$ e sobre os intervalos de crescimento e decrescimento do gráfico da função f.

2.3 Simetria e Crescimento da Parábola

Esta seção tem por objetivo estudar a simetria do gráfico de uma função do segundo grau com relação a reta que passa pelo vértice que é paralela ao eixo das ordenadas. A grosso modo, o gráfico de uma função f é simétrico em relação à uma reta r que passa por um ponto (x_0, y_0) do gráfico de f paralela ao eixo-y se os pontos do gráfico que estão em um mesmo nível e de lados opostos de r, estão à mesma distância desta reta.

Assim, se considerar r como a reta paralela ao eixo-y que passa pelo vértice da parábola, então o gráfico de uma função quadrática f é simétrica em relação à esta reta. Quando esta reta intersecta o eixo das abscissas, o ponto de intersecção é equidistante das raízes da função f, isto é, se x_1 e x_2 são as raízes da função quadrática e x é o ponto de intersecção de r com o eixo-x, então

$$dist(x_1, x) = dist(x, x_2).$$

A figura 2.8 esboça dois pontos x_1 e x_2 equidistantes da abscissa do vértice cujas imagens estão em uma reta paralela ao eixo-y e pertencem ao gráfico de uma função quadrática f.

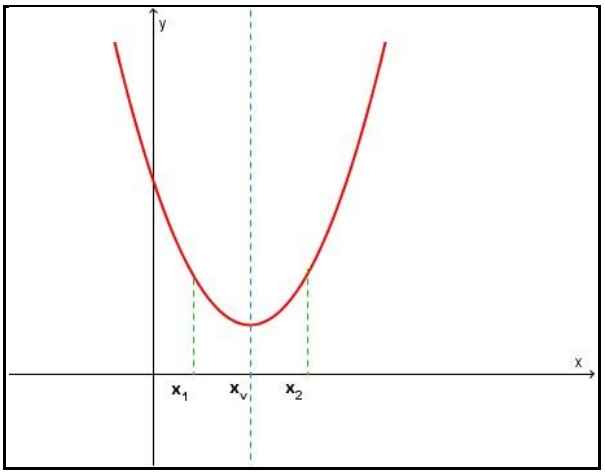

Figura 2. 8: Simetria do gráfico de $\boldsymbol{f}$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016.

Sabe-se que o ponto médio das raízes da função do segundo grau é a abscissa do vértice da parábola, como foi mostrado anteriormente. Com isto, x_1 e x_2 são equidistantes do ponto x_v. A análise abaixo mostra que a imagem desses pontos por f estão em um mesmo nível, isto é, as imagens de x_1 e x_2 por f são idênticas. De fato, como já mencionado, tem-se

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

e como $x_v = \frac{-b}{2a}$, segue que,

$$\frac{-b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $2a(x_1 - x_2)$, obtém-se

$$-b(x_1 - x_2) = a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2),$$

e, consequentemente,

$$-b(x_1 - x_2) = a(x_1^2 - x_2^2).$$

Por distributividade, chega-se à seguinte expressão

$$-bx_1 + bx_2 = a{x_1}^2 - a{x_2}^2,$$

donde, isolando de cada lado da igualdade os termos de mesmo índice, vem que

$$bx_2 + a{x_2}^2 = a{x_1}^2 + bx_1.$$

Somando c de ambos os lados da igualdade,

$$a{x_2}^2 + bx_2 + c = a{x_1}^2 + bx_1 + c,$$

e finalmente,

$$f(x_2) = f(x_1),$$

isto é, x_1 e x_2 tem a mesma imagem e, com isto, são simétricos em relação à reta vertical $x = x_v$.

> Esse resultado mostra que quaisquer dois pontos x_1 e x_2 equidistantes do vértice suas imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$ serão iguais. Logo há uma simetria em relação ao eixo vertical que intersecta o vértice da parábola. (SOUSA, 2013, p. 20)

No caso particular em que $b = 0$, tem-se que $x_v = 0$ e $y_v = -c$. E neste caso, como c é um ponto do eixo-y, a reta se simetria do gráfico de f é exatamente este eixo.

Essa não é a única maneira de mostrar que existe simetria para o gráfico de uma função quadrática f. Existem várias formas de verificar tal condição sobre o gráfico, mas por uma questão de brevidade, será mostrado aqui um método mais geral que satisfaz os objetivos desta seção. Para isso, considere k um número real estritamente positivo.

Afirma-se que $f(x_v + k) = f(x_v - k)$.

Isto é, quaisquer números x e y que distam k unidades da abscissa do vértice tem mesma imagem, isto é, estão em um mesmo nível e, consequentemente são simétricos em relação à reta vertical que passa pelo vértice da parábola. A figura 2.9 dá uma ideia geométrica deste fato.

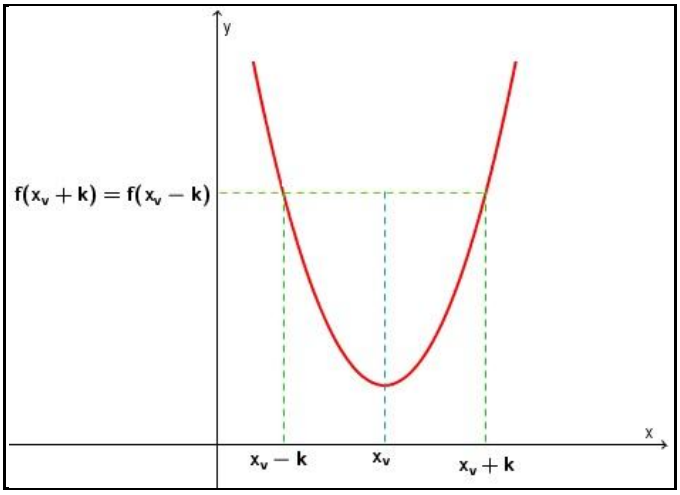

Figura 2. 9: Simetria do gráfico de f em relação ao vértice.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016

Agora, será provada a afirmação acima, isto é, será caracterizada a simetria existente no gráfico de f com respeito a reta que passa pela abscissa do vértice.

Com efeito, de $x_v = \frac{-b}{2a}$, tem-se

$$2ax_v = -b.$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por $2k$, vem que

$$4akx_v = -2kb,$$

donde,

$$2akx_v + 2akx_v = -kb - kb,$$

isto é,

$$2akx_v + kb = -2akx_v - kb.$$

Também, somando aos dois lados desta igualdade $(ax_v{}^2 + ak^2)$+$(bx_v + c)$, obtém-se a seguinte expressão

$$ax_v{}^2 + 2akx_v + ak^2 + kb + bx_v + c = ax_v{}^2 - 2akx_v + ak^2 - kb + bx_v + c,$$

ou seja,

$$a(x_v + k)^2 + b(k + x_v) + c = a(x_v - k)^2 + b(-k + x_v) + c,$$

e, consequentemente,

$$f(x_v + k) = f(x_v - k),$$

como havia-se afirmado. Portanto quaisquer que sejam os pontos x e y que distam k unidades do ponto x_v tem imagens simétricas em relação à reta vertical que passa por este vértice.

Um outro conceito importante para estudo do gráfico da função quadrática é a caracterização dos intervalos de crescimento e decrescimento da curva descrita pelo gráfico da parábola. À seguir será feita uma análise de tais intervalos. Desta forma fica mais fácil caracterizar as raízes e os pontos do vértice da parábola. Com este intuito serão definidos abaixo os conceitos de crescimento e decrescimento.

Definição 2.1 - Uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita crescente, quaisquer que sejam os pontos $x, y \in [a, b]$, tais que $x < y$, tem-se que $f(x) < f(y)$.

Analogamente pode-se definir:

Definição 2.2 - Uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita decrescente, quaisquer que sejam os pontos $x, y \in [a, b]$, tais que $x < y$, tem-se que $f(x) > f(y)$.

Segundo Sousa (2013, p. 21),

> [...] a função quadrática tem como gráfico uma parábola, e para sua caracterização, é fundamental determinar os intervalos em que ela seja crescente ou decrescente. Para isso, devem ser analisados os casos em que o coeficiente a seja positivo ou que ele seja negativo.

Por isso, serão estudados abaixo o crescimento e decrescimento do gráfico da função do segundo grau nos seguintes casos:

Caso 1 - $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.

Neste caso, considere x e y pontos quaisquer, tais que $x < y \leq x_v$. Logo,

$$x < \frac{-b}{2a} \text{ e } y \leq \frac{-b}{2a},$$

e isto implica que

$$x + y < \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b-b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $a(x-y)$, segue

$$a(x+y)(x-y) > -b(x-y),$$

donde,

$$a(x^2 - y^2) > -bx + by,$$

e assim, isolando os termos de mesma variável e somando c aos dois lados desta desigualdade, tem-se

$$ax^2 + bx + c > ay^2 + by + c.$$

Portanto, $f(x) > f(y)$. Isto mostra que f é uma função decrescente no intervalo $(-\infty, x_v]$.

De forma análoga ao procedimento anterior, se x_1 e y_1 são dois pontos quaisquer, tais que $x_v \leq x_1 < y_1$, então $x_1 \geq \frac{-b}{2a}$ *e* $y_1 > \frac{-b}{2a}$. Assim,

$$x_1 + y_1 > \frac{-b}{a},$$

e, multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $a(x_1 - y_1)$, vem que

$$a(x_1 + y_1)(x_1 - y_1) < -b(x_1 - y_1),$$

donde, por distributividade e somando-se c dos lados desta desigualdade, tem-se

$$a{x_1}^2 + bx_1 + c < a{y_1}^2 + by_1 + c,$$

isto é, $f(x_1) < f(y_1)$ e, portanto, f é uma função crescente no intervalo $[x_v, \infty)$.

Em resumo, conclui-se que a função f é crescente no intervalo $[x_v, \infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, x_v]$. A figura 2.10 mostra graficamente o comportamento do gráfico da função quadrática quando $a > 0$.

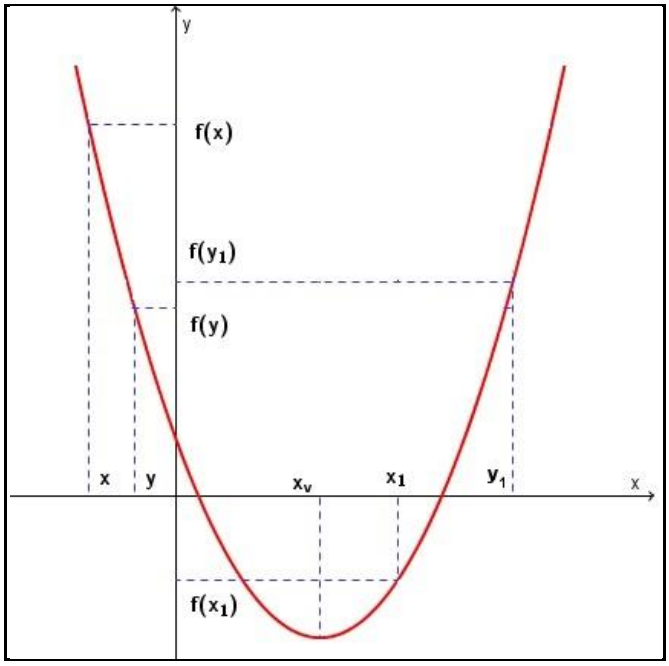

Figura 2. 10: Crescimento e decrescimento do gráfico de f quando $a > 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016

Caso 2 - $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$.

Neste caso, considere x e y pontos do eixo-x, tais que, $x < y \leq x_v$. Logo, análogo ao que foi feito no caso anterior tem-se que

$$x + y < \frac{-b}{a}.$$

Como $a < 0$, multiplicando os lados da desigualdade por $a(x - y)$, tem-se

$$a(x + y)(x - y) < -b(x - y)$$

de onde, desenvolvendo os produtos notáveis, agrupando os termos de mesma variável e somando c de ambos os lados desta desigualdade, segue que

$$ax^2 + bx + c < ay^2 + by + c,$$

e, consequentemente, $f(x) < f(y)$. Portanto, a função f é crescente no intervalo $(-\infty, x_v]$.

Analogamente, se x_1 e y_1 são dois pontos do eixo-x, tais que, $x_v \leq x_1 < y_1$, então,

$$x_1 + y_1 > \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Multiplicando por $a(x_1 - y_1)$, ambos os lados desta desigualdade, chega-se à seguinte expressão

$$a(x_1^2 - y_1^2) > -b(x_1 - y_1),$$

donde, somando-se c de cada lado da desigualdade, vem que

$$ax_1{}^2 + bx_1 + c > ay_1{}^2 + by_1 + c,$$

e, com isto, $f(x_1) > f(y_1)$. Portanto, f é decrescente no intervalo $[x_v, \infty)$. A figura 2.11 mostra geometricamente o crescimento e decrescimento da parábola nos intervalos descritos quando $a < 0$.

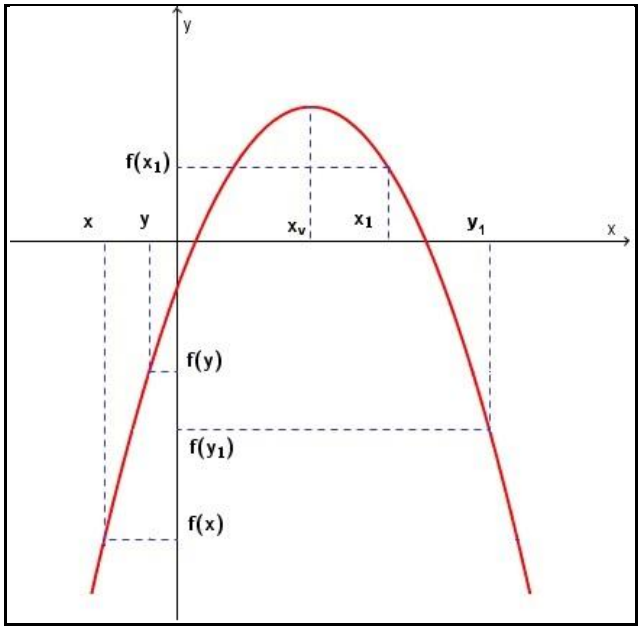

Figura 2. 11: Crescimento e decrescimento do gráfico de $\boldsymbol{f}$ quando $\boldsymbol{a} < 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 07/01/2016

Vale a pena observar que para $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem-se $f'(x) = 2ax + b$, portanto o coeficiente angular da reta que é tangente à parábola no vértice é $f'(x_v) = 2ax_v + b = 0$, logo x_v é o ponto crítico da função, assumindo valor de máximo quando a parábola tem concavidade para baixo e valor mínimo quando a parábola tem concavidade voltada para cima.

De acordo Iezzi (1997, p. 55), para uma caracterização rigorosa da curva descrita pelo gráfico da função quadrática, é necessário ser feito um estudo da variação dos coeficientes angulares em vários pontos da curva.

Portanto, neste capítulo pode-se observar que o gráfico de uma função quadrática é caracterizado por uma parábola. Viu-se também a caracterização de pontos específicos dessa parábola que denominam-se raízes da função e pontos do vértice. Além disso, fez-se aqui um estudo rigoroso quanto à simetria e

monotonicidade (crescimento e decrescimento) da curva descrita pelo gráfico. Tudo isto, para que se começa começar a atingir os objetivos do trabalho.

No próximo capítulo será realizado um estudo rigoroso e formal quanto ao comportamento do gráfico da função quadrática quando se faz variar os coeficientes a, b e c que a definem. Primeiramente serão estudadas tais variações em cada coeficiente em particular para uma melhor visualização da geometria envolvida, e em seguida como um todo fazendo variar todos os coeficientes ao mesmo tempo.

3 A VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS E O GRÁFICO DE $f(x)$

O presente capítulo tem o intuito de fazer um estudo sobre a variação dos parâmetros que definem a função quadrática, e dessa forma observar qual é o comportamento de seu gráfico ao fazer variar tais coeficientes. Para isso serão feitos alguns cálculos a partir da função quadrática onde cada coeficiente sofrerá variação em k unidades. O capítulo está dividido em três partes, onde cada parte descreve o comportamento do gráfico da função do segundo grau quando se faz variar um de seus parâmetros e os outros dois são mantidos fixados.

3.1 Variação do Coeficiente a

Nesta seção será discutido qual é o tipo de deslocamento sofrido pela parábola determinada pelo gráfico da função do segundo grau quando se faz variar o coeficiente a e são mantidos fixados os coeficientes b e c.

> O coeficiente a mede a maior ou menor abertura da parábola. [...] Assim, quanto maior for a mais fechada será a parábola e, vice-versa, quanto menor é a mais aberta se vê a parábola. No caso de a negativo, “maior” e “menor” devem ser tomados no sentido de valor absoluto. (LIMA, 2010, p. 31).

Considere uma função do segundo grau de expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ e seja k um número real. O objetivo é fazer variar o coeficiente a em k unidades e estudar o comportamento da parábola da nova função $f_k(x) = (a + k)x^2 + bx + c$, isto é, o deslocamento sofrido pelo gráfico de f quando se faz variar o coeficiente a em k unidades.

De acordo com Sousa (2013, p. 31), existem dois casos distintos para observação do movimento da parábola ao se variar o coeficiente a.

É sobre cada um desses casos que trata o estudo feito abaixo.

Caso 1 - $b \neq 0$.

Neste caso, considere fixado o coeficiente c. Então as funções $f(x)$ e $f_k(x)$ intersectam o eixo-y no mesmo ponto $(0, c)$. Baseado no que já foi estudado no capítulo anterior tem-se que a função $f(x)$ possui vértice no ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Por outro lado, a abscissa do vértice $\bar{x}_v$ da função $f_k(x)$ é dada por

$$\bar{x}_v = \frac{-b}{2(a+k)} = \frac{-b}{2a+2k}.$$

Logo, a ordenada do vértice é dada por

$$\bar{y}_v = \frac{-(b^2 - 4(a+k)c)}{4(a+k)} = \frac{-b^2 + (4a+4k)c}{4(a+k)} = \frac{-b^2 + 4ac + 4kc}{4a+4k},$$

e, portanto, a função $f_k(x)$ possui vértice no ponto

$$V_k = \left(\frac{-b}{2a+2k}, \frac{-b^2 + 4ac + 4kc}{4a+4k}\right).$$

Uma vez definido o vértice da função $f_k(x)$ e observado a sua dependência de k, pode-se analisar o deslocamento efetuado por este vértice quando se faz variar o valor de k. Para isto, basta proceder da seguinte forma: isolando k na igualdade $\bar{x}_v = \frac{-b}{2(a+k)}$, tem-se

$$k = \frac{-b - 2a\bar{x}_v}{2\bar{x}_v}.$$

Logo, por substituição na expressão de $\bar{y}_v$, vem que

$$\bar{y}_v = \frac{-b^2 + 4ac + 4\left(\frac{-b - 2a\bar{x}_v}{2x_{v1}}\right)c}{4a + 4\left(\frac{-b - 2a\bar{x}_v}{2\bar{x}_v}\right)} = \frac{\frac{-2b^2\bar{x}_v + 8ac\bar{x}_v - 4bc - 8ac\bar{x}_v}{2\bar{x}_v}}{\frac{8a\bar{x}_v - 4b - 8a\bar{x}_v}{2\bar{x}_v}},$$

donde, segue que

$$\bar{y}_v = \frac{-2b^2\bar{x}_v + 8ac\bar{x}_v - 4bc - 8ac\bar{x}_v}{8a\bar{x}_v - 4b - 8a\bar{x}_v} = \frac{-2b^2\bar{x}_v - 4bc}{-4b} = \frac{-2b^2\bar{x}_v}{-4b} + \frac{-4bc}{-4b},$$

e, portanto,

$$\bar{y}_v = \frac{b\bar{x}_v}{2} + c.$$

Isto mostra que a função $y = f_v(x) = \frac{b}{2}x + c = \bar{f}(x)$ é uma função é do primeiro grau. Logo, seu gráfico representa uma reta que intersecta o eixo-y e a parábola $f_k(x)$ no ponto $(0, c)$. Com isto, pode-se observar que a variação do coeficiente a em k unidades na função $f(x)$ implica no deslocamento do vértice da parábola ao longo da reta $\bar{f}(x)$.

Ao se fazer um estudo mais rigoroso, pode-se observar que a parábola altera seu nível de abertura, pois considerando a interseção no eixo-y sendo o ponto $(0, c)$, de acordo com Sousa (2013, p. 33), quanto mais próximo da origem estiver o valor de $\bar{x}_v$, mais fechada será a abertura da concavidade da parábola. A figura 3.1 dá uma ideia geométrica do deslocamento do vértice ao longo da reta $\bar{f}$.

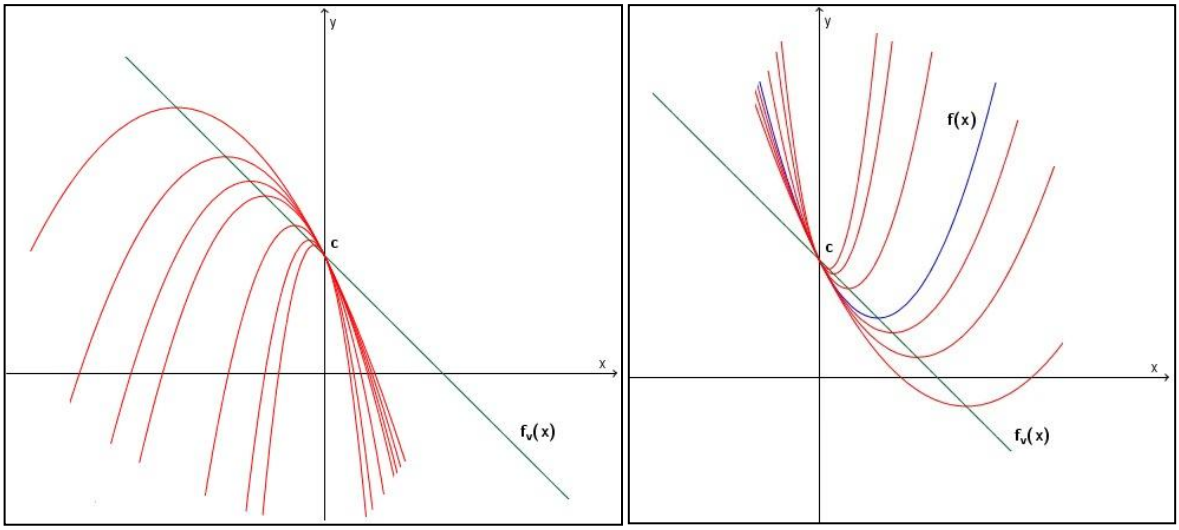

Figura 3. 1: Deslocamento do vértice da parábola quando $a > 0$ e quando $a < 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 17/01/2016.

Por uma análise sobre a figura 3.1, pode-se observar que para que a parábola de f continue a intersectar o eixo–y no ponto c, ao se deslocar o vértice da função quadrática f ao longo da reta $\bar{f}$, é necessário que a parábola sofra uma variação em sua abertura.

De acordo com Sousa (2013, p. 33), a abertura da parábola está diretamente ligada ao módulo do coeficiente de x^2, quanto maior ele for mais fechada será a parábola.

Agora, para um estudo mais aprimorado e rigoroso, será considerado dois subcasos para este estudo: o caso em que $b < 0$ e o caso em que $b > 0$.

Subcaso 1.1 - $b < 0$.

Neste caso, tem-se as seguintes situações:

(i) se $a < -k$, então $\bar{x}_v = \frac{-b}{2(a+k)} < 0$;

(ii) se $a > -k$, então $\bar{x}_v = \frac{-b}{2(a+k)} > 0$.

Note que, a reta que passa pelos vértices das parábolas é decrescente.

Assim, na primeira situação, as parábolas do qual os vértices estarão a esquerda do plano cartesiano, tem concavidades voltadas para baixo e intersectam o eixo-y no ponto c. Por outro lado, na segunda situação, os vértices das parábolas estarão à direita do plano cartesiano, as parábolas tem concavidades voltadas para cima e intersectam o eixo-y no ponto c, conforme a figura 3.1.

A figura 3.2 fornece uma interpretação geométrica dos dois casos citados acima, isto é, mostra o deslocamento do vértice sobre a reta $f(x)$ e a abertura das parábolas obtidas fazendo variar o coeficiente a em k unidades, de modo que tais parábolas continuem a intersectar o eixo-y no ponto c.

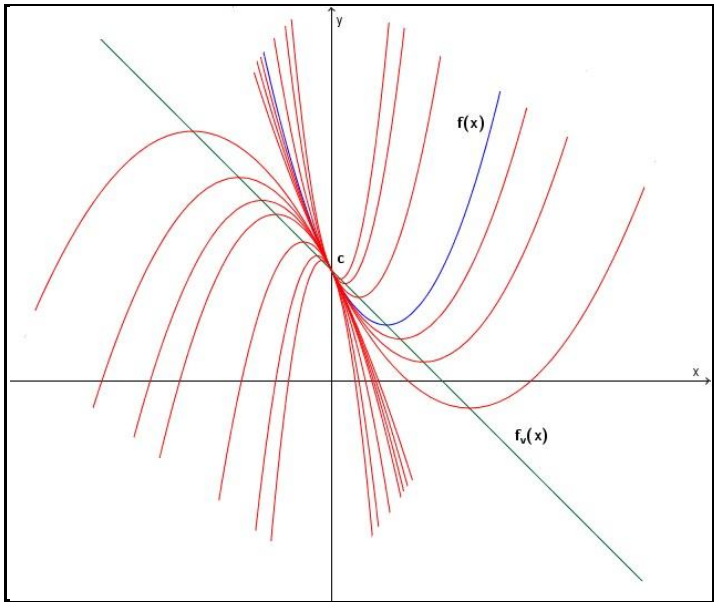

Figura 3. 2: Deslocamento do vértice e abertura da parábola no caso $b < 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 17/01/2016.

Subcaso 1.2 - $b > 0$.

Analogamente, se $b > 0$ e c é fixado no eixo-y, procedendo como no subcaso 1.1, tem-se

(i) se $a < -k$, então $\bar{x}_v = \frac{-b}{2(a+k)} > 0$;

(ii) se $a > -k$, então $\bar{x}_v = \frac{-b}{2(a+k)} < 0$.

Neste caso, a reta que passa pelos vértices é crescente.

Assim, o gráfico para a primeira situação apresentará as parábolas cujos vértices estão à direita do plano com concavidades voltadas para baixo e intersectando o eixo-y no ponto c. De maneira análoga para a segunda situação, as

parábolas do qual os vértices estão à esquerda do plano tem suas concavidades voltadas para cima e também intersectam o eixo-y no ponto c, como pode ser observado na figura 3.3.

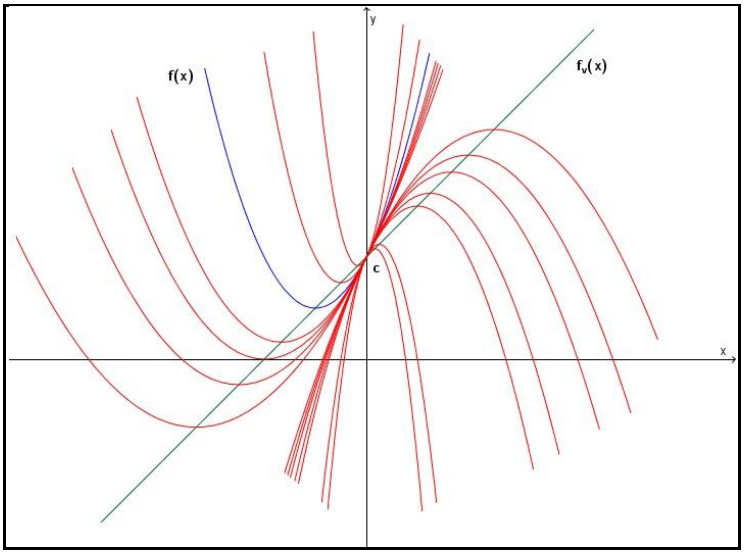

Figura 3. 3: Deslocamento do vértice e abertura da parábola no caso $b > 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 17/01/2016.

Portanto, pode-se observar que ao fazer variar o parâmetro k, obtém-se diferentes parábolas da forma $f_k(x) = (a+k)^2 + bx + c$ que intersectam o eixo-y no ponto $(0, c)$ e cujos vértices estarão sobre a reta $f_v(x) = \frac{bx}{2} + c$. Além disso, quanto maior for o valor do coeficiente $a + k > 0$, mais fechada será a abertura da parábola e quanto menor for o valor do coeficiente $a + k > 0$, mais aberta será a concavidade da parábola. O contrário ocorre no caso em que $a + k < 0$.

Caso 2 - $b = 0$

Neste caso tem-se que a função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, assume a forma $f(x) = ax^2 + c$. Logo, $x_v = 0$ e, com isto, o vértice da parábola está sobre o eixo-y no ponto c, o que facilita consideravelmente o estudo do comportamento do gráfico da função f, uma vez que o ponto de intersecção com o eixo-y e o vértice da parábola coincidem. Além disso, como $b = 0$ e $\bar{f}(x) = \frac{bx}{2} + c$, então $\bar{f}(x) = c$. Logo, a reta que passa pelos vértices das parábolas obtidas variando o coeficiente a em k unidades é paralela ao eixo-x, ou seja, os vértices

destas parábolas estão em um mesmo nível, mas precisamente, os vértices de todas essas parábolas coincidem e estão sobre o ponto c.

Assim, seja k um número real e considere a função

$$f_k(x) = (a + k)x^2 + c.$$

Então todas as parábolas obtidas variando k possuirão o vértice em um único ponto, o ponto c, diferenciando-se apenas por suas aberturas e concavidades.

De acordo com Sousa (2013, p. 35), ao atribuir valores para k, tem-se várias parábolas $f_k(x) = (a + k)^2 + c$ com concavidades para cima ou para baixo, todas com vértice no ponto $(0, c)$ e com aberturas inversamente proporcionais a $|a + k|$.

A figura 3.4 mostra o comportamento dos gráficos de f_k nos casos em que $c < 0$, $c > 0$ e $a + k$ troca de sinal.

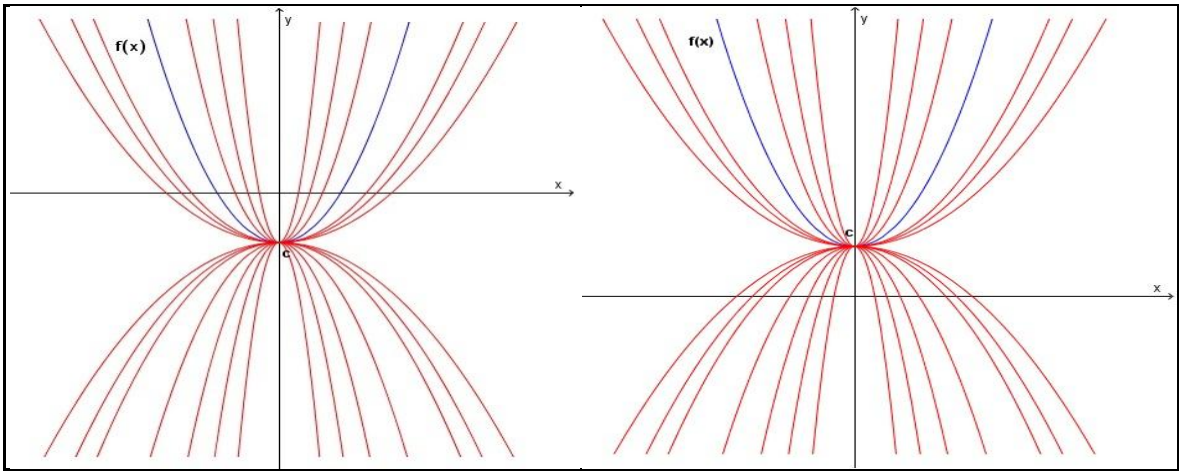

Figura 3. 4: Abertura e fechamento da parábola se $c < 0$ ou $c > 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 17/01/2016.

Já a figura 3.5 mostra o comportamento do gráfico de f_k no caso em que $c = 0$ e $a + k$ troca de sinal.

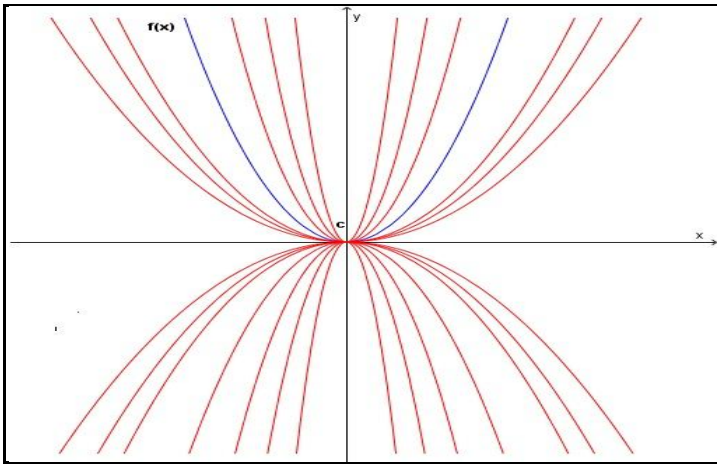

Figura 3. 5: Abertura e fechamento da parábola se $c = 0$.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 17/01/2016.

E isto finaliza a análise do gráfico de f quando se faz variar o coeficiente a. Na próxima seção será feita uma análise do comportamento do gráfico de f quando se faz variar o parâmetro b e os parâmetros a e c são mantidos fixados em f.

3.2 Variação do Coeficiente b

Seja k um número real e considere a função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nesta seção será estudado o comportamento da parábola descrita pelo gráfico de f quando se faz o parâmetro b em k unidades. Para isto, para cada k real, considere a função

$$f_k(x) = ax^2 + (b + k)x + c,$$

e, com isso, analisaremos o deslocamento da parábola de f_k, quando se faz variar k entre valores positivos e negativos.

> O parâmetro b indica se a parábola intersecta o eixo y no seu ramo crescente (se $b > 0$), decrescente (se $b < 0$) ou no vértice (se $b = 0$). Além disso, o parâmetro b causa uma translação vertical seguida de uma horizontal. (RIBEIRO, 2013, p. 21)

Observe que f e f_k intersectam o eixo-y no mesmo ponto, à saber, o ponto c, e seus gráficos são parábolas cujas concavidades tem mesma abertura, pois a é mantido fixado. Lembre que a função $f(x)$ possui vértice no ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Quando se faz b variar em k unidades tem-se que

$$\bar{x}_v = \frac{-(b + k)}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{-k}{2a} = x_v - \frac{k}{2a}.$$

E, consequentemente,

$$\bar{y}_v = \frac{-\Delta_k}{4a} = \frac{-((b + k)^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(b^2 + 2bk + k^2) - 4ac}{4a} = \frac{-b^2 - 4ac}{4a} + \frac{-2bk - k^2}{4a},$$

donde,

$$\bar{y}_v = \frac{-\Delta}{4a} - \frac{k^2 - 2bk}{4a} = y_v - \frac{k^2 - 2bk}{4a}.$$

Portanto, a função $f_k(x)$ possui vértice no ponto $V_k = \left(x_v - \frac{k}{2a}, y_v - \frac{k^2 - 2bk}{4a}\right)$.

De acordo com Sousa (2013, p. 36), não é possível verificar diretamente qual deslocamento sofre o vértice. Porém, tanto a abscissa quanto a ordenada dependem do valor de k.

Assim, o objetivo agora é encontrar a curva descrita pelos vértices das parábolas obtidas fazendo variar em k unidades o parâmetro b de f. Com efeito, da expressão de $\bar{x}_v$, vem que

$$2a\bar{x}_v = -(b+k),$$

donde $k = -b - 2a\bar{x}_v$. Substituindo o valor de k equação que define $\bar{y}_v$, obtém-se

$$\bar{y}_v = y_v - \frac{k^2 - 2bk}{4a} = \frac{-\Delta}{4a} - \frac{(-b-2a\bar{x}_v)^2 + 2b(-b-2a\bar{x}_v)}{4a},$$

isto é,

$$\bar{y}_v = \frac{-b^2 + 4ac - b^2 - 4ba\bar{x}_v - 4a^2\bar{x}_v^2 + 2b^2 + 4ba\bar{x}_v}{4a} = \frac{4ac - 4a^2\bar{x}_v^2}{4a},$$

e, portanto, $\bar{y}_v = -a\bar{x}_v^2 + c$.

Isto mostra que os pontos do vértice das parábolas de f obtidas pela variação do coeficiente b em k unidades descrevem uma parábola semelhante a parábola descrita pelo gráfico de f, com concavidade voltada para baixo e que intersecta o eixo-y exatamente no ponto c.

Assim, quando se faz variar k entre valores positivos e negativos, obtém-se uma sequência de parábolas que satisfazem as condições descritas acima. A figura 3.6 mostra o deslocamento da parábola descrita pelo gráfico de f quando o parâmetro b varia em k unidades e quando o coeficiente $a > 0$ e quando $a < 0$.

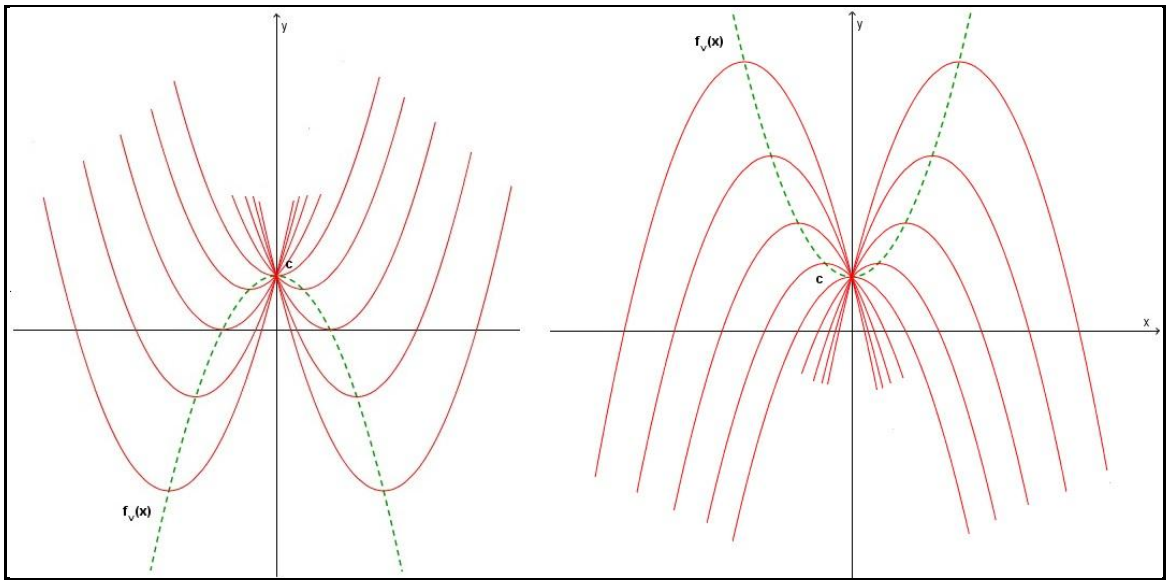

Figura 3. 6: Deslocamento da parábola se b varia k unidades.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 17/01/2016.

Conclui-se, então, que variando o coeficiente b, a parábola faz um movimento cuja curva descrita pelos vértices das parábolas obtidas por este movimento é uma parábola com concavidade voltada para o lado oposto da parábola primitiva e que intersecta o eixo das ordenadas no mesmo ponto desta parábola.

Na seção seguinte será estudado o comportamento da parábola descrita pelo gráfico de uma função quadrática quando os coeficientes a e b são mantidos fixos e o coeficiente c varia em k unidades.

3.3 Variação do coeficiente c

Seja k um número real e considere a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como visto nas seções anteriores, o coeficiente c determina o ponto onde a parábola descrita pelo gráfico de f intersecta o eixo das ordenadas. Diante disso, será estudado nesta seção qual o deslocamento efetuado por esta parábola quando se faz o coeficiente c sofrer uma variação de k unidades, isto é, para cada k real, será estudado o comportamento do gráfico de $f_k(x) = ax^2 + bx + (c + k)$ no que se refere à intersecção com o eixo das ordenadas e posição no plano.

> O parâmetro c indica onde a parábola intersecta o eixo y, no ponto $(0, c)$. [...] Observe que a parábola de $f(x) = ax^2 + c$ é igual a parábola de $f(x) = ax^2$, porém sua posição é, em valores absolutos, c unidades acima ou abaixo, conforme c seja positivo ou negativo. Assim, podemos construir gráficos de funções pensando em translações (ou deslocamentos) verticais para cima ou para baixo. Isso acontece quando só alteramos o coeficiente c da função. (RIBEIRO, 2013, p. 22)

Como a abscissa do vértice de $f(x)$ e $f_k(x)$ coincidem e independem do coeficiente c, então $x_v = \bar{x}_v$ e $f_k(x)$ tem ordenada do vértice dada por

$$\bar{y}_v = \frac{-\Delta_k}{4a} = \frac{-b^2 + 4a(c+k)}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac) + 4ak}{4a} = \frac{-\Delta}{4a} + \frac{4ak}{4a} = y_v + k.$$

Logo, as coordenadas do vértice da função quadrática $f_k(x) = ax^2 + bx + (c + k)$ são dadas por

$$\mathrm{V_k} = (\bar{x}_v\, , y_v + k).$$

Assim, pode-se observar que a variação em k unidades do coeficiente c implica em uma variação em k unidades da ordenada do vértice da função $f(x)$, ou seja, o ponto onde o gráfico intersecta o eixo-y se desloca verticalmente para cima ou para baixo dependendo do valor do acréscimo k. Com isso, qualquer que seja o ponto do gráfico de $f_k(x)$ que intercepta o eixo x, a distância desse ponto até um ponto do gráfico de $f(x)$ no mesmo eixo é dada por $|k|$ unidades verticais.

Portanto, conclui-se que variando o parâmetro c, a parábola se desloca verticalmente para cima quando $k > 0$ e verticalmente para baixo quando $k < 0$. A figura 3.7 mostra o deslocamento da parábola determinada pelo gráfico de f quando se faz variar o coeficiente c e são deixados fixados os parâmetros a e b.

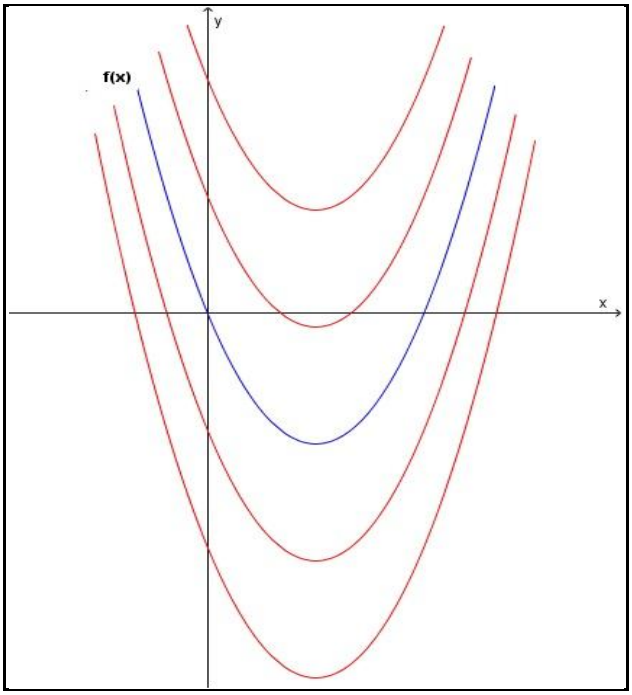

Figura 3. 7: Deslocamento da parábola se c varia k unidades.
Fonte: ARAÚJO, Letícia Alves, gerado pelo Geogebra em 17/01/2016.

Portanto, neste caso, ficou verificado que com a variação do coeficiente c definido na função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, a parábola determinada pelo gráfico desta função sofre um deslocamento vertical (para baixo ou para cima) cujo comprimento é igual a quantidade que o coeficiente c varia na função quadrática determinada.

4 RELATO DA OFICINA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Neste capítulo abordaremos a metodologia utilizada para a aplicação da oficina realizada com os alunos do 9º ano do Colégio Estadual Dr. Vasco dos Reis Gonçalves, localizada em Urutaí – GO. Nesse aspecto, a oficina teve o intuito de melhorar a compreensão geométrica dos alunos diante do conteúdo abordado.

Visando a utilização das tecnologias como ambiente de aprendizagem Tajra (2004, p.74) afirma que, “A utilização de um software está diretamente relacionada à capacidade de percepção do professor em relacionar a tecnologia à sua proposta educacional. Por meio de softwares podemos ensinar aprender, estimular a curiosidade ou, simplesmente, produzir trabalhos com qualidade”. Diante disso, unimos a tecnologia com a matemática.

4.1 Descrição da Oficina

O estudo da equação do segundo grau na formação do estudante de matemática nos níveis iniciais é fundamental para um bom desempenho no decorrer do período escolar. É notável que a maioria dos professores e os alunos ficam presos ao que está proposto no livro didático. Todos conhecem os coeficientes, mas poucos sabem que a variação deles interfere diretamente no comportamento do gráfico.

Então, esta oficina é destinada a estudar o comportamento do gráfico da função quadrática quando se varia os parâmetros que a definem, transformando assim em um recurso didático. Foram utilizados os softwares matemáticos Excel e Geogebra para a melhor visualização e compreensão do conteúdo. Muitas vezes, o estudo da função quadrática não é desenvolvido com grandezas de detalhes nos cursos do ensino fundamental e ensino médio, isso se dá devido ao programa da disciplina que não abrange certos conteúdos, ao livro didático que o professor utiliza em sala de aula e também pela falta de tempo no decorrer da disciplina.

A aplicação da oficina foi dividida em momentos, no qual foram destinados a definir a função do segundo grau, mostrar o gráfico que caracteriza a função, demonstrar a fórmula de Bhaskara, demonstrar a fórmula de se encontrar os vértices da parábola, mostrar o crescimento e decrescimento da parábola e o eixo de simetria e, por fim, trabalhar com os softwares Excel e Geogebra.

4.2 Sequência Didática

De acordo com Zabala (2007, p. 18) a sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelo professor como pelos alunos.

Nesse aspecto é importante mostrar ao aluno atividades lúdicas, práticas com material concreto e diferenciado do que eles estão acostumados em sala de aula, pois apresentando desafios, os alunos se sentem instigados e assim desenvolve, de forma significativa, a construção do conhecimento.

Portanto, a elaboração da sequencia didática que fundamenta a oficina possui o objetivo melhorar a prática educativa tanto dos alunos quanto dos professores.

TÍTULO: Comportamento do gráfico da função quadrática variando seus parâmetros.
TURMA: 9º ano Ensino Fundamental
DURAÇÃO: Aproximadamente 90 minutos.
OBJETIVO GERAL: Mostrar de forma dinâmica o comportamento do gráfico da função quadrática utilizando o software Excel.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Mostrar as características da função do segundo grau;
- Demonstrar a fórmula de Bhaskara;
- Compreender as implicações que a variação dos coeficientes causa no gráfico.

JUSTIFICATIVA - Esta oficina se justifica pela relevância e importância do estudo do gráfico da função do segundo grau na formação do estudante de matemática do ensino básico. Na maioria das vezes o estudo da função quadrática não é trabalhado de forma aprimorada e rica em detalhes em sala de aula, dessa forma esta oficina tem o intuito de melhorar a compreensão geométrica dos alunos do conteúdo abordado e mostrar o comportamento do gráfico de tal função uma vez observada a variação dos coeficientes que a define.

RECURSOS:

- Sala de informática com computadores;
- Computador com os softwares Excel instalado;
- Projetor.
- Quadro, pincel e apagador.

4.3 Procedimentos

Antes de se iniciar a aplicação da oficina, foram discutidos alguns assuntos relevantes para o melhor entendimento da função quadrática, bem como os conceitos essenciais que norteiam a função, sendo eles: fórmula geral da equação, gráfico, pontos notáveis, raízes da equação. Então, diante disso, demonstramos alguns destes pontos.

O primeiro momento da oficina se caracterizou pela definição da função quadrática e pela demonstração da fórmula de Bhaskara, da mesma forma que foi mostrado no capítulo 2. Os alunos participantes demonstraram bastante interesse, pois, de fato, quando se tem uma equação do segundo grau a primeira coisa que o aluno relaciona é a fórmula de Bhaskara, que na maioria das vezes parte do ato de decorar. Mas com a demonstração, eles puderam complementar o conhecimento e perceber que existe um processo de obtenção dessa fórmula que é raramente difundido em sala de aula.

Posteriormente, foi discutido sobre o gráfico que caracteriza a função quadrática e como ele se comporta quando $a > 0$ e $a < 0$. Também foi demonstrada

a fórmula de se encontrar os vértices da parábola. Feito isso, de forma sucinta foi explicado como acontece o crescimento e decrescimento da parábola e o eixo de simetria. Durante esse momento, os alunos se manifestaram para expor seus conhecimentos e dizer que algumas coisas do que estava sendo explicados, nesse momento da oficina, eles lembravam que já tinham aprendido. É importante considerar que o aluno já sabe, ou seja, a bagagem intelectual que ele carrega contribui para a construção da aprendizagem.

Finalmente, foram utilizados os softwares matemáticos Excel e Geogebra com o intuito de mostrar qual o comportamento do gráfico da função quadrática quando se varia os coeficientes que a definem. Os alunos puderam manusear e acompanhar todos os procedimentos. Então, foi mostrada através de exemplos a variância do parâmetro a fixando valores iguais para e coeficiente b e c. Com os exemplos também foi feita a explicação do que realmente acontece variando esse coeficiente. De maneira análoga, a variação dos parâmetros b e c foi mostrada.

4.4 Considerações Finais Sobre a Oficina

De acordo Medeiros (2005; p.34), [...] o aluno é sujeito participante, intelectualmente, e não objeto do ato educativo, assim, ao momento que os alunos tiveram contato com o software, eles puderam questionar e analisar diversas questões relacionadas ao conteúdo, além de ter contato com uma metodologia diferenciada do que eles estão acostumados.

A oficina possibilitou relacionar a teoria matemática com o uso da tecnologia, servindo de auxílio, complementação e fixação do conteúdo. Os alunos alegaram que o contato direto com o software contribui para aprimorar a percepção gráfica diante do conteúdo e também as dificuldades que apresentaram foram amenizadas.

Sendo assim, o objetivo da oficina foi atingido com louvor. E conclui-se que usar softwares como ferramenta para o processo de ensino-aprendizagem contribui significamente para o desenvolvimento tanto do aluno quanto do professor. E mais, a utilização dessas tecnologias se faz interessante, pois os alunos de alguma forma pode mudar a visão em relação à Matemática.

CONCLUSÃO

O ensino da função do segundo grau está presente desde os anos finais do Ensino Fundamental, durante todo Ensino Médio e em muitas disciplinas dos cursos de graduação em matemática e áreas aplicadas. Muitas vezes o professor fica preso ao que está sendo proposto no livro didático e esquece que o aluno precisa ter curiosidade sobre o conteúdo. Todos sabem o que é a função quadrática, conhecem os coeficientes que a definem, conhecem a fórmula de se obter as raízes e os vértices. Mas, como deduzir essas fórmulas? As variações dos coeficientes interferem no comportamento do gráfico? São perguntas que vagariam pela sala de aula se fossem questionadas aos alunos.

Sendo assim, este trabalho mostrou que o estudo do comportamento do gráfico da função quadrática, observada a variação dos coeficientes que a define, implicam condições sobre a abertura e o comportamento da parábola uma vez fixado os parâmetros b e c e variando o parâmetro a, e sobre o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal da parábola uma vez fixado o parâmetro a e variando os parâmetros b e c.

Com isto entende-se a grande importância e enorme relevância deste conteúdo no desenvolvimento do conhecimento matemático por parte dos alunos que iniciam estudos em matemática, uma vez que tal conceito apresenta-se em diversas partes da matemática e produz aplicações consideráveis em diversas situações.

Assim, este trabalho veio com o intuito de dar maior relevância ao estudo das funções quadráticas, uma vez observada a superficialidade com que este conteúdo é trabalhado dentro de sala de aula. Mostrando que este conceito é bem maior do que se imagina, buscando incentivar professores à aprofundar os conhecimentos sobre o assunto dentro de sala de aula de forma à propiciar ao aluno um conhecimento mais amplo e puro do que vem a ser matemática, mostrando a grandeza e profundidade do estudo.

Além disso, o trabalho dá suporte para o desenvolvimento de metodologia diferente daquilo que os alunos estão acostumados, unindo matemática e tecnologia através de oficinas utilizando softwares matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, 3ª edição. Edgard Blücher**,** São Paulo – SP, 2010.

DANTE, L. R**. Matemática: contexto e aplicações**, volume 1, 1ª edição. Editora Ática, São Paulo - SP, 2011.

FELMMING, Diva Maria, GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. Editora Pearson. São Paulo-SP. 2006.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO. J. R. **Matemática Completa.** 2ª edição FTD S.A, São Paulo - SP, 2005.

GUELLI, Oscar. **Matemática uma aventura do pensamento**. São Paulo: Ática, 2001.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David M., PÉRIGO, Roberto. **Matemática Volume Único**. Editora Atual. São Paulo-SP. 1997.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David M., PÉRIGO, Roberto, ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: Ciência e Aplicações, Vol. 1**. Editora Saraiva. São Paulo-SP. 2013.

LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo C. P., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1**. SBM. Rio de Janeiro-RJ. 2006.

LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo C. P., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2**. SBM. Rio de Janeiro-RJ. 2006.

LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo C. P., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C. **Temas e Problemas**. SBM. Rio de Janeiro-RJ. 2010.

LIMA, E. L; CARVALHO. P. C. P; WAGNER. E; MORGADO. C. **Temas e Problemas Elementares**. SBM, Rio de Janeiro - RJ, 12ª edição, 2006.

MEDEIROS, Cleide Farias. (2005). ***Por uma Educação Matemática como Intersubjetividade*** in BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. ***Educação Matemática***. 2. Ed. São Paulo: Centauro, 2005.

NETO, José de Caldas Lemos. **Uma Análise da História das Equações do 2º Grau nos Livros Didáticos**. Trabalho de Curso de Graduação. UFPB. Itaporanga-PB. 2011.

RIBEIRO, Dayse. M. A. A. **Uma Aborgagem Didática para a Função Quadrática**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF. Rio de Janeiro – RJ, 2013.

SOUSA, Fábio. A. L. **Funções quadráticas: estudo do gráfico das funções quadráticas.** Dissertação de Mestrado. UFG, Goiânia - GO, 2013.

TAJRA, Sanmya Feitosa. ***Informática na Educação***. 5° Ed. São Paulo: Editora Érica Ltda, 2004.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.