



**INSTITUTO
FEDERAL**

Goiano

Campus
Trindade

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO
CAMPUS TRINDADE
ENGENHARIA CIVIL**

**DESENVOLVIMENTO DE INTERFACE GRÁFICA PARA ANÁLISE LINEAR E
NÃO-LINEAR EM PÓRTICOS PLANOS**

**PABLO HENRIQUE ALVES DE SOUZA
RAFAEL VINÍCIUS MARTINS SILVA**

**TRINDADE - GO
2022**



**INSTITUTO
FEDERAL**

Goiano

Campus
Trindade

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO
CAMPUS TRINDADE
ENGENHARIA CIVIL**

**DESENVOLVIMENTO DE INTERFACE GRÁFICA PARA ANÁLISE LINEAR E
NÃO-LINEAR EM PÓRTICOS PLANOS**

**PABLO HENRIQUE ALVES DE SOUZA
RAFAEL VINÍCIUS MARTINS SILVA**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao
Instituto Federal Goiano – Campus Trindade,
como requisito exigido para Graduação em
Engenharia Civil.

Orientador: Geraldo P. da Silva Júnior

Co-Orientador: Matheus H. Morato de Moraes

**TRINDADE - GO
2022**

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano

S586d Silva, Rafael Vinícius Martins.

Desenvolvimento de interface gráfica para análise linear e não-linear em pórticos planos [manuscrito] / Rafael Vinícius Martins Silva; Pablo Henrique Alves de Souza. – 2022.

65 f.

Orientador Geraldo Pereira da Silva Júnior; co-orientador Matheus Henrique Morato de Moraes. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Instituto Federal Goiano, Campus Trindade, 2022.

Bibliografia.

1. Análise não-linear. 2. Análise linear. 3. Método dos elementos finitos. 4. Newton-Raphson. 5. Python. I. Silva Júnior, Geraldo Pereira da, orient. II. Moraes, Matheus Henrique Morato de, co-orient. III. Título.

Responsável: Johnathan Pereira Alves Diniz - Bibliotecário-Documentalista CRB-1 nº2376

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano a disponibilizar gratuitamente o documento em formato digital no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

IDENTIFICAÇÃO DA PRODUÇÃO TÉCNICO-CIENTÍFICA

- | | |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Tese (doutorado) | <input type="checkbox"/> Artigo científico |
| <input type="checkbox"/> Dissertação (mestrado) | <input type="checkbox"/> Capítulo de livro |
| <input type="checkbox"/> Monografia (especialização) | <input type="checkbox"/> Livro |
| <input checked="" type="checkbox"/> TCC (graduação) | <input type="checkbox"/> Trabalho apresentado em evento |

Produto técnico e educacional - Tipo:

Nome completo do autor:

Rafael Vinícius Martins Silva e Pablo Henrique Alves de Souza

Matrícula:

2018108200840296 e 2018108200840091

Título do trabalho:

Desenvolvimento de interface gráfica para análise linear e não-linear em pórticos planos

RESTRIÇÕES DE ACESSO AO DOCUMENTO

Documento confidencial: Não Sim, justifique:

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: 06 /03 /2023

O documento está sujeito a registro de patente? Sim Não

O documento pode vir a ser publicado como livro? Sim Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O(a) referido(a) autor(a) declara:


- Que o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- Que obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autoria, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- Que cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Trindade

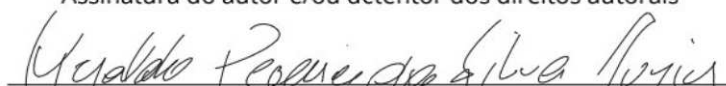
Local

17 /02 /2023

Data


Assinatura do autor e/ou detentor dos direitos autorais

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL GOIANO - CAMPUS TRINDADE



ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

No dia 15 do mês de dezembro de 2022, às 11 horas e 00 minutos, na presença da Banca Examinadora presidida pelo Professor Geraldo Pereira da Silva Júnior e composta pelos avaliadores:

1. Marcel Willian Reis Sales e
2. Pedro Filipe de Luna Cunha

os alunos Pablo Henrique Alves de Souza e Rafael Vinícius Martins Silva, apresentaram o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado:

Análise não-linear geométrica aplicada em pórticos através do método dos elementos finitos, como requisito curricular indispensável para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil pelo Instituto Federal Goiano Campus Trindade.

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

Trindade-GO, 15 de Dezembro de 2022.

Geraldo Pereira da Silva Júnior
Presidente da Banca Examinadora

Marcel Willian Reis Sales
Avaliador 01

PEDRO FILIPE DE LUNA CUNHA
Avaliador 02

Rafael Vinícius Martins Silva
Aluno 01

Pablo Henrique A. Souza
Aluno 02

RESUMO

Na análise estrutural e no estudo de tensões, os resultados da análise não linear refletem de maneira mais precisa o comportamento de um elemento estrutural submetido a carregamentos. A análise não-linear geométrica está associada à mudança da rigidez da estrutura conforme sua gradativa deformação, o que demonstra a semelhança com eventos da realidade. A fim de discretizar o problema da não-linearidade geométrica e determinar seu comportamento, o Método dos Elementos Finitos é empregado juntamente com a formulação Lagrangeana Atualizada. A resolução desse processo iterativo se dá pelo método numérico de Newton-Raphson. Foram abordados problemas desenvolvidos por meio de uma interface gráfica criada em linguagem *Python*, devido à facilidade e agilidade no desenvolvimento das rotinas computacionais. Por meio da rotina implementada foi possível a comparação dos resultados obtidos junto a *softwares* renomados na área de engenharia, como o MASTAN2.

Palavras-chave: Análise não-linear. Método dos Elementos Finitos. Newton-Raphson. *Python*.

ABSTRACT

In structural analysis and in the stress study, the results of the non-linear analysis more accurately reflect the behavior of a structural element subjected to loads. The geometric non-linear analysis is associated with the change in the rigidity of the structure according to its gradual deformation, which demonstrates the similarity with events in reality. In order to discretize the problem of geometric nonlinearity and determine its behavior, the Finite Element Method is employed along with the Updated Lagrangian formulation. The resolution of this iterative process is given by the numerical method of Newton-Raphson. Problems developed through a graphical interface created in *Python* language were addressed, due to the ease and agility in the development of computational routines. Through the implemented routine, it was possible to compare the results obtained with renowned *software* in the engineering area, such as MASTAN2.

Keywords: Non-linear analysis. Finite Element Method. Newton-Raphson. *Python*.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 – (a) Efeitos de 1º Ordem ; (b) Efeitos de 2ª Ordem
- Figure 1.2 – Consideração aproximada da não linearidade física de acordo com NBR 6118:2014
- Figure 1.3 – Relação entre estabilidade e efeitos de 2ª ordem
- Figure 1.4 – Significado dos valores de γ_z
- Figura 2.1 – Tipos de estruturas reticuladas. (a): viga, (b): treliça plana, (c): treliça espacial, (d): pórtico plano, (e) grelha, (f): pórtico espacial
- Figura 2.2 - Exemplos de pórticos isostáticos
- Figura 2.3 – Representação dos graus de liberdade em um pórtico
- Figura 2.4 – Graus de liberdade para fins de implementação computacional do elemento de viga (beam)
- Figura 2.5 – Alguns tipos de elementos – MEF
- Figura 2.6 – Consideração da formulação adotada – Viga de Navier/Euller Bernoulli
- Figura 2.7 – Graus de liberdade de um elemento de viga isolado
- Figura 2.8 – Esquema para obtenção dos coeficientes da matriz de rigidez
- Figura 2.9 – Coeficientes de Rigidez do elemento de viga
- Figura 2.10 – Transformação do sistema local para global
- Figura 2.10 – Transformação do sistema local para global
- Figura 2.11 – Comportamento linear em analogia com molas
- Figura 2.12 – Comportamento Não linear em analogia com associação de molas
- Figura 2.13 – Modelo genérico submetido ao RLT
- Figura 2.14 – Modelo genérico submetido ao RLA
- Figura 2.15 – Análise de um comprimento infinitesimal de uma viga
- Figura 2.16 – Método de Newton Raphson para um grau de liberdade
- Figura 2.17 – Exemplos de métodos incrementais-iterativos
- Figura 3.1 – Modelo organizacional inicial
- Figura 3.2 – Modelo organizacional quanto aos cálculos
- Figura 3.3 – Graus de liberdade para fins de implementação computacional do elemento de viga (*beam*)
- Figura 3.4 – Graus de liberdade de um pórtico genérico
- Figura 3.5 – Montagem da Matriz de Rigidez Global da Estrutura
- Figura 3.6 – Matriz de Rigidez Global da Estrutura do pórtico genérico

Figura 3.7 – (a) Modelo generalizado ; (b) Modelo Reduzido

Figura 3.8 – Modelo organizacional quanto aos cálculos da análise não-linear

Figura 3.9 – Interface gráfica

Figura 4.1 – Pórtico de estudo

Figura 4.2 – Deformada da estrutura com 3 elementos

Figura 4.3 – Deformada da estrutura com 21 elementos

Figura 4.4 – Problema 1 – Análise Linear

Figura 4.5 – Problema 1 – Inserção de dados

Figura 4.6 – Problema 1 – Janela 3D do algoritmo

Figura 4.7 – Problema 1 – Apresentação dos resultados na GUI com 21 elementos

Figura 4.8 – Problema 1 – Deformada da estrutura (Extrapolado 250 vezes)

Figura 4.9 – Problema 2 – Análise Linear

Figura 4.10 – Inserção de dados

Figura 4.11 – Apresentação dos resultados na GUI com 20 elementos

Figura 4.12 – Problema 2 – Deformada da estrutura

Figura 4.13 – Problema 2 – Análise Não Linear

Figura 4.14 – Inserção de dados

Figura 4.15 – Apresentação dos resultados na GUI com 21 elementos

Figura 4.16 – Problema 2 – Deformada da estrutura

Figura 4.17 – Problema 2 – Deformada da estrutura *software* MASTAN2

Figura 4.18 – Problema 3 – Análise Não Linear

Figura 4.19 – Problema 3 – Deformada da estrutura

Figura 4.20 – Problema 3 – Deformada da estrutura *software* MASTAN2

LISTA DE TABELAS

- Tabela 4.1 – Resultado em função do aumento de elementos
- Tabela 4.2 – Problema 1 – Resultados numéricos com 21 elementos
- Tabela 4.3 – Problema 2 – Resultados numéricos com 20 elementos
- Tabela 4.4 – Problema 2 – Resultados numéricos com 21 elementos
- Tabela 4.5 – Problema 2 – Resultados numéricos com 21 elementos e 20 iterações
- Tabela 4.6 – Problema 2 – Resultados numéricos com 21 elementos e 40 iterações
- Tabela 4.7 – Problema 3 – Resultados numéricos da análise linear com 20 elementos
- Tabela 4.8 – Problema 3 – Resultados numéricos da análise não linear com 20 elementos
- Tabela 4.9 – Problema 3 – Resultados numéricos da análise não linear com 160 elementos

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
FEM	<i>Finite Element Method</i>
GUI	<i>Graphical User Interface</i>
NLG	Não-Linear Geométrica
NLF	Não-Linear Física
ELU	Estado Limite Último
DOF	<i>Degrees Of Freedom</i>
CAD	<i>Computer-Aided Design</i>
DXF	<i>Drawing Interchange Format</i>

LISTA DE SIMBOLOS

d	Vetor de deslocamentos
M_{A2}	Momento Fletor de 2ª ordem
γ_Z	Parâmetro de avaliação de estabilidade global
$\Delta M_{tot,d}$	Soma dos produtos de todas as forças verticais de cálculo pelos deslocamentos horizontais obtidos em 1º ordem
$M_{1,tot,d}$	Momento de tombamento, isto é, soma dos momentos de todas as forças verticais de cálculo, com relação à base da estrutura.
σ	Tensão axial (normal)
F	Força axial interna
A	Área da seção transversal
ε	Deformação específica
ΔL	Variação de comprimento da barra
L	Comprimento da barra
E	Modulo de Elasticidade
I	Momento de Inércia
K	Constante de Rigidez
v	Deslocamento Nodal Vertical
u	Deslocamento Nodal Horizontal
θ	Rotação
$\{f\}$	Vetor de forças nodais
$[k]^e$	Matriz de rigidez local do elemento
$\{\delta\}$	Vetor de deslocamentos nodais
$[K]^e$	Matriz de rigidez global do elemento
$\{F\}$	Vetor de incremento de forças nodais
$[K]$	Matriz de rigidez do elemento corrigida
$\{\Delta\}$	Vetor de incremento de deslocamentos nodais
$[T]$	Matriz de rotação
RLT	Referencial Lagrangiano Total
RLA	Referencial Lagrangiano Atualizado
$k_{v,G}$	Matriz de Rigidez Geométrica
$[K]_G^e$	Matriz de Rigidez Global do Elemento (Elástica-Geométrica)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA	13
1.2	OBJETIVOS	17
1.2.1	<i>Objetivo Geral</i>	<i>17</i>
1.2.2	<i>Objetivos Específicos</i>	<i>17</i>
2	REFERENCIAL TEORICO	18
2.1	Estruturas reticuladas.....	18
2.2	Pórticos Planos	18
2.3	Graus de liberdade	19
2.4	Relações fundamentais	20
2.4.1	<i>Equações de equilíbrio</i>	<i>20</i>
2.4.2	<i>Relações constitutivas</i>	<i>21</i>
2.4.3	<i>Condições de compatibilidade.....</i>	<i>22</i>
2.5	Análise de sistemas discretos – MEF	22
2.6	Sistema de Pórtico Plano	23
2.6.1	<i>Matriz de Rigidez do elemento de barra no âmbito local e global.....</i>	<i>25</i>
2.7	Fundamentos da Análise Não-linear	29
2.7.1	<i>Formulação Lagrangiana Atualizada – Sistema de coordenadas.....</i>	<i>30</i>
2.7.2	<i>Não linearidade Geométrica</i>	<i>31</i>
2.7.3	<i>Matriz de Rigidez Geométrica</i>	<i>33</i>
2.7.4	<i>Newton-Raphson como método de solução de Sistemas Não Lineares.....</i>	<i>34</i>
3	METODOLOGIA	37
3.1	Abordagem Computacional.....	37
3.1.1	<i>Representação Gráfica – Desenho em CAD.....</i>	<i>37</i>
3.1.2	<i>Método de Cálculo - MEF</i>	<i>37</i>
3.1.2.1	<i>Enumeração dos Graus de Liberdade.....</i>	<i>38</i>
3.1.2.2	<i>Montagem da Matriz de Rigidez Global da Estrutura.....</i>	<i>39</i>
3.1.3	<i>Método de cálculo aplicado à análise não-linear</i>	<i>43</i>
3.1.4	<i>Algoritmo implementado e interface gráfica</i>	<i>43</i>
3.1.5	<i>Softwares Utilizados</i>	<i>44</i>
3.1.6	<i>Especificações técnicas do computador utilizado</i>	<i>45</i>
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	46

4.1	Relação entre número de elementos e precisão	46
4.2	Problema 1 – Análise Linear	50
4.3	Problema 2 – Análise Linear	53
4.4	Problema 1 – Análise Não-Linear	55
4.5	Problema 2 – Análise Não-Linear	56
4.6	Problema 3 – Análise Não-Linear	59
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
	REFERÊNCIAS.....	64

1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural consiste na determinação de esforços e deformações em estruturas solicitadas por agentes externos. Devido ao aumento gradual da complexidade de estruturas, os modelos matemáticos (base para determinar comportamento de estruturas mais simples) deixam de ser opções viáveis e práticas. A fim de contornar esse problema e ser possível determinar esforços e deformações em estruturas robustas e mais precisas, o modelo matemático ou analítico, passa a ser discretizado, sendo possível a implementação num modelo computacional.

Ao analisar uma estrutura de forma linear, aplicam-se os carregamentos de forma imediata e se admite pequenos deslocamentos nodais. Já na análise não-linear os carregamentos são aplicados de forma gradual e a estrutura pode apresentar deformações mais elevadas.

A análise não-linear geométrica, também conhecida comumente como análise de segunda ordem, leva em conta os efeitos dos carregamentos na estrutura já deformada, até a mesma atingir o equilíbrio. Tal análise leva em consideração grandes deformações e reformula a relação de deformação específica, diferente da análise linear convencional, que assume pequenas deformações e deformações específicas, além das equações de equilíbrio serem desenvolvidas a partir da estrutura indeformada (KASSIMALI, 2011).

Para solucionar os problemas não-lineares abordados utiliza-se o método incremental-iterativo. O método de Newton-Raphson será implementado neste trabalho devido a sua facilidade de implementação e apresentar boa convergência dos resultados de forma rápida. De acordo com Alves Filho (2012) É necessário a utilização de um método incremental-iterativo pois a medida que a estrutura se deforma, sua rigidez conseqüentemente varia. A determinação teórica da rigidez se dá pela aplicação de conceitos energéticos, isto é, a variação de trabalho interno e externo deve ser nulo, presumindo, portanto, o equilíbrio de forças internas e externas e sua compatibilidade com seus respectivos deslocamentos. Tem-se então que a cada iteração é preciso determinar uma nova rigidez estrutural associada a configuração deformada, o que caracteriza a utilização do método incremental-iterativo. Com base nisso, o método de Newton-Raphson utilizado neste trabalho pretende encontrar um vetor de deslocamentos (d) que anula o vetor das forças desequilibradas que estão em função desses deslocamentos ($f(d)$), por meio de sucessivas iterações (VAZ, 2011).

Para atingir os resultados, o método dos elementos finitos (MEF) será implementado utilizando a linguagem de programação *Python*, bem como bibliotecas complementares.

O método dos elementos finitos (MEF ou FEM – *Finite Element Method*) é um procedimento numérico para obter soluções aproximadas de problemas de condições de contorno em engenharia (HUTTON, 2003).

Devido a formulação mais simplista para a maioria dos problemas estruturais, uma vasta gama de *softwares* incorporam o método dos deslocamentos (*Displacement* ou *Stiffness Method*) (LOGAN, 2006)

A fim de explorar problemas mais complexos, ou seja, problemas que são constituídos de um número elevado de barras (elementos) e nós, será desenvolvida uma interface gráfica de usuário *GUI* (*Graphical User Interface*), que possibilitará ainda a entrada de qualquer problema (pórtico plano) proposto, apresentando os deslocamentos nodais na forma numérica e gráfica.

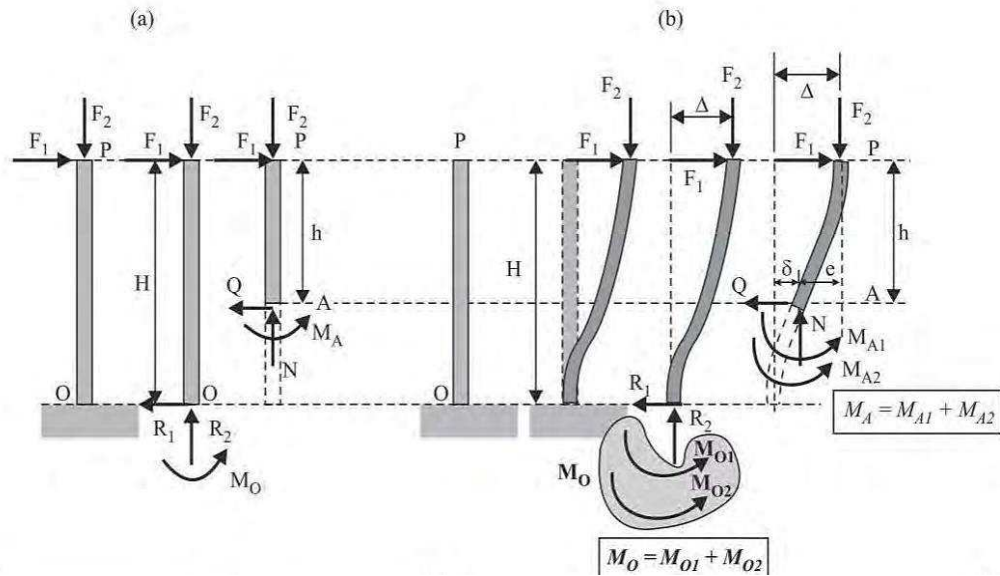
1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

Os estudos iniciais do comportamento físico de elementos da mecânica estrutural, se baseiam em sistema de proporcionalidade de ações e reações, bem como no princípio de superposição dos efeitos. Dito isto, pode-se então levantar hipóteses a respeito do verdadeiro comportamento dos fenômenos que nos cerca.

Em uma visão mais restrita dessa afirmação, no estudo de estruturas em resistência dos materiais, os engenheiros sempre tomam inicialmente análises estáticas lineares em seus diagramas de corpo livre baseados na estrutura indeformada (estado inicial), o que comuna em sistemas de equações algébricas lineares de simples resolução. Os resultados exprimem o equilíbrio e a consequente determinação dos esforços internos e reações, dado às ações externas e condições de contorno.

Levanta-se então a seguinte hipótese: o que ocorre na análise e nos resultados, se propuser a montagem do diagrama de corpo livre da estrutura em seu estado deformado? Segundo Alves Filho (2000) essa observação revela surpresas e propõe um exemplo simples e de fácil entendimento. Assim, constata-se que surgem termos que não eram considerados anteriormente. A figura demonstra o mesmo modelo submetido a duas diferentes abordagens.

Figura 1.1 – (a) Efeitos de 1º Ordem ; (b) Efeitos de 2ª Ordem



Autor: ALVES FILHO, 2000

As equações que regem os esforços internos e as reações são:

Diagrama de corpo livre da viga inteira – PO (a)

$$R_1 = F_1; R_2 = F_2; M_0 = F_1 \cdot H \quad (1.1)$$

Diagrama de corpo livre do trecho – PA (a)

$$Q = F_1; N = F_2; M_A = F_1 \cdot h \quad (1.2)$$

Diagrama de corpo livre da viga inteira – PO (b)

$$R_1 = F_1; R_2 = F_2; M_0 = M_{01} + M_{02} = F_1 \cdot H + F_2 \cdot \Delta \quad (1.3)$$

Diagrama de corpo livre do trecho – PA (b)

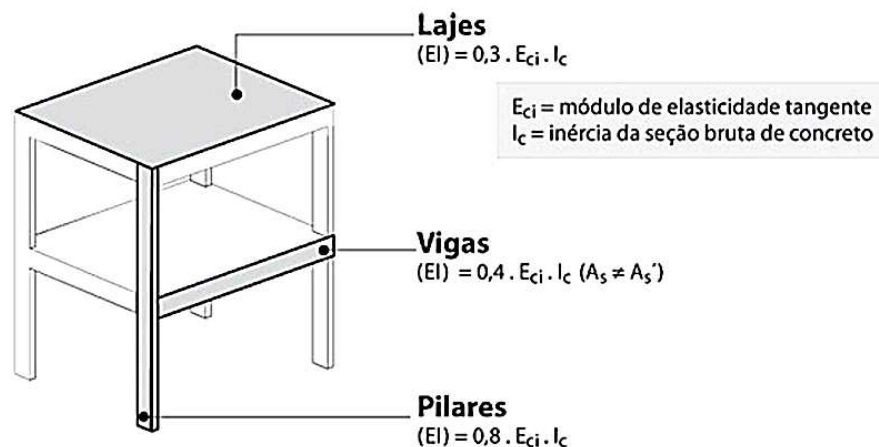
$$Q = F_1; N = F_2; M_A = M_{A1} + M_{A2} = F_1 \cdot h + F_2 \cdot e \quad (1.4)$$

Fica evidente as diferenças entre os dois casos. A esses efeitos adicionais (Momento Fletor de segunda ordem – M_{A2}) da abordagem à direita, dá-se a denominação de efeitos de segunda ordem, o qual são incluídos na análise não-linear geométrica (NLG).

Tem-se então uma justificativa contundente de que a abordagem de análise não-linear considerando a estrutura em seu estado deformado, acarreta em solicitações não previstas antes mediante uma simples análise linear.

Nas estruturas de concreto armado, existem três fatores principais que geram comportamento não-linear, são eles, a não linearidade geométrica (NLG), a não linearidade física (NLF) e a não linearidade devido ao contato. A NLG está atuando em conjunto com a não NLF (tópico este, junto à não linearidade devido ao contato, que não será abordado neste trabalho), que consiste basicamente na variação do comportamento do material à medida que o carregamento é aplicado, modificando, portanto, a rigidez dos elementos (KIMURA, 2007). A NBR 6118 (ABNT, 2014), no item 15.7.3 – Consideração aproximada da não linearidade física e item 17.3.2.1.1 – Flecha imediata em vigas de concreto armado, promovem uma forma aproximada de corrigir a rigidez dos elementos estruturais para análise da estabilidade global e no cálculo de flecha imediata de vigas.

Figura 1.2 – Consideração aproximada da não linearidade física de acordo com NBR 6118:2014



Autor: KIMURA, 2007

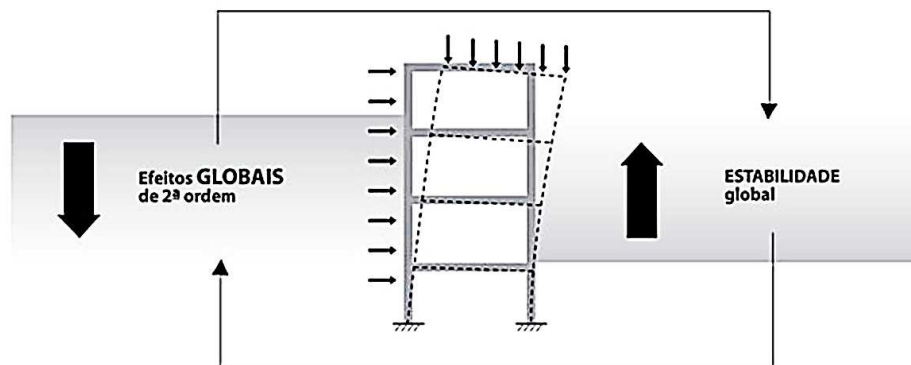
Outro ponto importante que visa justificar e mensurar sua relevância, não somente o estudo, mas a aplicação, se dá pelo item 4.9.2.2 da NBR 8800 (ABNT, 2008), que explicita o uso da análise não-linear sempre que os deslocamentos afetarem de forma significativa os esforços internos.

Conforme o item 15.2 – Campo de aplicação e conceitos fundamentais da NBR 6118 (ABNT, 2014) os efeitos de 2ª ordem se somam à aqueles obtidos em uma análise de primeira ordem. Tais efeitos podem ser desprezados sempre que não representarem acréscimo superior a 10% em reações e solicitações na estrutura.

A análise não-linear é uma ferramenta/abordagem que exprime o comportamento de estruturas mais próximas à realidade e que necessita ser explorada (DE LUNA CUNHA, 2017)

No escopo da estabilidade global de uma estrutura, tópico este também abordado no item 15 da NBR 6118:2014, os efeitos de 2ª ordem estão intrinsicamente associados. “A estabilidade global de uma estrutura é inversamente proporcional à sua sensibilidade perante os efeitos de segunda ordem. Em outras palavras, quanto mais estável for a estrutura, menores serão os efeitos de segunda ordem. Ou ainda, quanto maiores forem os efeitos de segunda ordem, menos estável será a estrutura” (KIMURA, 2007).

Figura 1.3 – Relação entre estabilidade e efeitos de 2ª ordem



Autor: KIMURA, 2007

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014), estabelece o cálculo do coeficiente γ_z que avalia a estabilidade global de um edifício de forma simples e eficiente, por meio de uma estimativa dos efeitos de 2ª ordem, e é dado pela expressão:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (1.5)$$

Onde:

$\Delta M_{tot,d}$ = Soma dos produtos de todas as forças verticais de cálculo pelos deslocamentos horizontais obtidos em 1º ordem;

$M_{1,tot,d}$ = Momento de tombamento, isto é, soma dos momentos de todas as forças verticais de cálculo, com relação à base da estrutura.

Assim, segundo Kimura (2007), o resultado representa:

Figura 1.4 – Significado dos valores de γ_z

γ_z	Significado
$\cong 1.00$	Efeitos de segunda ordem praticamente inexistentes
1.10	Efeitos de 2ª ordem em torno de 10% dos efeitos de 1ª ordem
1.15	Efeitos de 2ª ordem em torno de 15% dos efeitos de 1ª ordem
1.20	Efeitos de 2ª ordem em torno de 20% dos efeitos de 1ª ordem
...	Assim por diante

Autor: KIMURA, 2007

Nota-se que quanto maior o valor de γ_z , mais instável é a estrutura, sendo necessário considerar os efeitos de 2ª ordem para o dimensionamento no estado limite último (ELU). A fim de reduzir o custo computacional com tais efeitos (conforme dispensa da norma NBR 6118:2014, item 15.2), outra solução seria modificar a concepção estrutural a fim de propor mais rigidez, reduzindo assim o valor de γ_z .

Por meio desses pontos levantados de forma simplificada, fica portanto registrado a relevância do tema abordado no escopo deste trabalho.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

- Implementar computacionalmente a análise NLG em pórticos planos.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Compreender a teoria do MEF (ou no mínimo, conseguir interpretar a ideia geral de forma analítica e matricial, a origem, sua função e aplicabilidade no contexto referente a pórticos);
- No contexto da análise não-linear geométrica, compreender a teoria e obter a matriz que rege o comportamento da estrutura;
- Utilização da linguagem *Python* para implementação das rotinas computacionais;
- Implementar uma interface gráfica com o intuito de facilitar a visualização e entrada de dados por um usuário. Por fim, gerar um pequeno programa para que o usuário possa estudar e manipular por conta própria seus próprios problemas e analisá-los;
- Validar e comparar exemplos contidos na literatura e através de *softwares* de análise estrutural;
- Obter resultados da estrutura deformada.

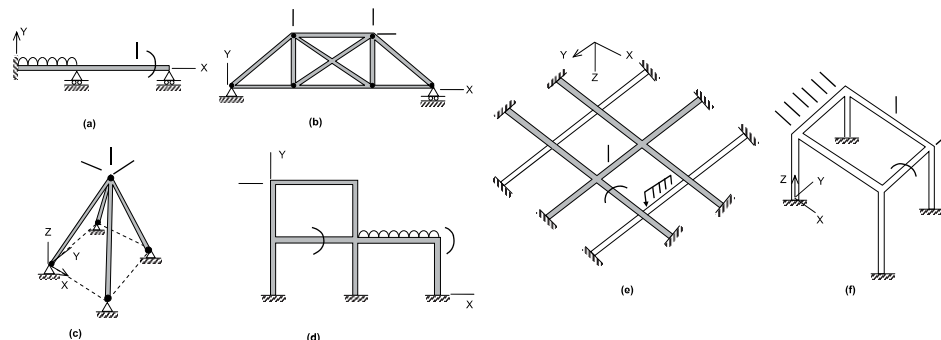
2 REFERENCIAL TEORICO

2.1 Estruturas reticuladas

Estruturas reticuladas são basicamente compostas de barras de eixo reto, unidas por juntas ou nós estruturais, conforme Figura 2.1. Durante o processo de análise estrutural, as estruturas podem ser abordadas, do ponto de vista matemático, como sistemas contínuos ou discretos. Em modelos que trabalham com sistemas contínuos, há o desenvolvimento do processo analítico dos cálculos, trabalhando com infinitos elementos infinitesimais, resultando assim em resultados exatos, porém do ponto de vista prático, bastante trabalhoso.

Em grande parte dos problemas práticos, os quais seus comportamentos necessitam serem entendidos com fim de aplicação, utilizar o sistema contínuo deixa de ser uma solução ideal. Com isso, considera-se a utilização dos sistemas discretos, que tem por objetivo a ideia da divisão da estrutura em partes separadas distintas e finitas, conectadas entre si, resultando em uma solução aproximada do modelo real (ALVES FILHO, 2000).

Figura 2.1 – Tipos de estruturas reticuladas. (a): viga, (b): treliça plana, (c): treliça espacial, (d): pórtico plano, (e) grelha, (f): pórtico espacial



Fonte: NAGARAJAN, 2018

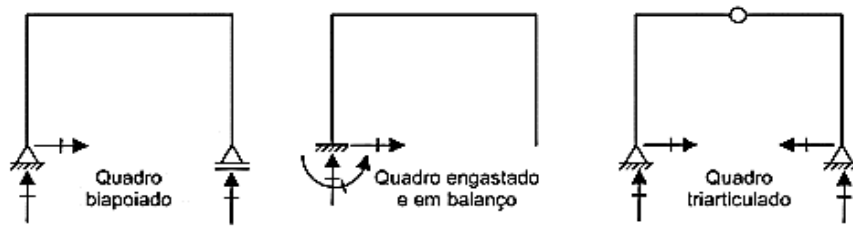
2.2 Pórticos Planos

O pórtico plano pode ser definido como uma estrutura reticulada bidimensional, constituída de elementos retos ligados entre si, seja por ligações rígidas (resistentes ao momento) ou por ligações rotuladas, para formar configurações estáveis (KASSIMALI, 2011).

Os elementos de um pórtico rígido são em geral submetidos a um momento de flexão, cortante, compressão ou tração normal sob ação das cargas externas (KASSIMALI, 2011).

Os pórticos estão entre os tipos de estruturas mais utilizados. Os pórticos de aço estrutural e de concreto armado são comumente usados em edifícios, pontes, instalações industriais, galpões e diversos outros.

Figura 2.2 - Exemplos de pórticos isostáticos



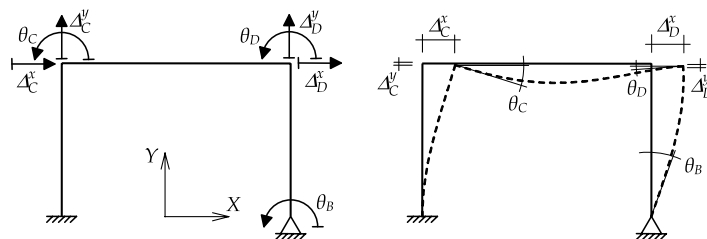
Fonte: MARTHA, 2010

2.3 Graus de liberdade

Os graus de liberdade (*degrees of freedom – DOF*) de uma estrutura são deslocabilidades nodais de translação ou rotação possíveis, o qual definem a forma deformada da estrutura quando submetida a carregamentos (KASSIMALI, 2011). Portanto, os graus de liberdade representam numericamente os deslocamentos ou rotações de cada nó, ou seja, a solução discreta do problema. É possível obter a solução contínua a partir da solução discreta através das funções de interpolação, além disso, em modelos reticulados rotulados, a solução discreta é igual a solução analítica, ou seja, não há a necessidade da aplicação de funções de interpolação (MARTHA, 2010).

Diante do estudo do Método dos Deslocamentos (*Displacement Method* ou *Stiffness Method*) é comum utilizar notação mais elaborada como a utilizada nas figuras abaixo.

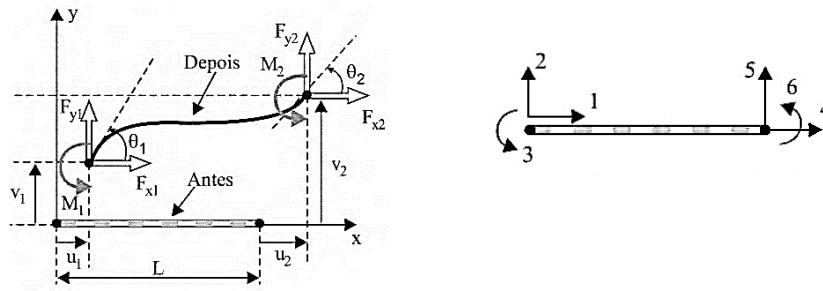
Figura 2.3 – Representação dos graus de liberdade em um pórtico



Fonte: MARTHA, 2010

É bastante comum enumerar os graus de liberdade de forma organizada devido a utilização em análise matricial, além de fins computacionais de programação. Assim, é estabelecido uma numeração como proposto nos exemplos abaixo. O método utilizado para enumerar os graus de liberdade do projeto é descrito no item 3.1.2.1 (Enumeração dos Graus de Liberdade).

Figura 2.4 – Graus de liberdade para fins de implementação computacional do elemento de viga (*beam*)



Fonte: ALVES FILHO, 2000

É importante salientar que o sentido adotado dos graus de liberdade são arbitrários, e os resultados dependem somente dos sentidos dos eixos adotados inicialmente, o que irão refletir no real comportamento da estrutura.

2.4 Relações fundamentais

As relações fundamentais ou, leis fundamentais da Mecânica Estrutural, são parâmetros a qual uma estrutura ou, concepção de um modelo matemático, deve satisfazer para simular o comportamento real da estrutura (MARTHA, 2010). Em uma análise estrutural há basicamente três tipos de relações fundamentais, sendo elas, equilíbrio de forças, relações constitutivas e condições de compatibilidade.

2.4.1 Equações de equilíbrio

Equações de equilíbrio ou também, equilíbrio de forças, em suma é uma condição que garante o equilíbrio dos elementos isoladamente, visto que a estrutura como um todo também está em equilíbrio (ALVES FILHO, 2000). Isto é, o equilíbrio deve ser global, para cada barra e cada nó (MARTHA, 2010).

Para uma estrutura no plano xy (estrutura bidimensional), o equilíbrio é satisfeito quando:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad e \quad \sum M = 0 \quad (2.2)$$

Já para uma estrutura contida no espaço xyz (estrutura tridimensional), o equilíbrio é satisfeito quando:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & & \sum F_y = 0 & & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & & \sum M_y = 0 & & \sum M_z = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.4.2 Relações constitutivas

As leis constitutivas são um conjunto de relações matemáticas entre tensões e deformações. Essas relações contêm parâmetros que definem o comportamento dos materiais (MARTHA, 2010). A Teoria da Elasticidade determina que as relações da lei constitutiva sejam expressas através de equações lineares com parâmetros constantes. Nesse caso diz-se que o material trabalha em regime elástico-linear (Timoshenko & Goodier, 1980, apud MARTHA, 2010).

O comportamento é considerado elástico quando, ao se descarregar a estrutura, o material não apresenta deformação residual alguma, isto é, ele retorna ao estado natural sem deformação. O comportamento é considerado linear quando existe proporcionalidade entre tensões e deformações. (MARTHA, 2010).

A lei constitutiva que relaciona tensões normais e deformações normais é a conhecida lei de Hooke (Beer & Johnston 2006, Féodosiev 1977, apud MARTHA, 2010) e é dada por:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.4)$$

onde:

σ = Tensão axial (normal);

F = Força axial interna;

A = Área da seção transversal;

Ainda, a deformação específica (ε) é dado por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (5)$$

onde:

ε = Deformação específica;

ΔL = Variação de comprimento da barra;

L = Comprimento da barra;

Logo:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\varepsilon \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.6) e isolando a força axial F , tem-se a expressão:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

$$F = AE \frac{\Delta L}{L} \quad (2.7)$$

Como ΔL é justamente o deslocamento, para fins didáticos, podemos interpreta-lo como sendo a variável d .

$$F = \frac{AE}{L} d \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é a relação linear entre deslocamento e força de uma barra (ALVES FILHO, 2000).

2.4.3 Condições de compatibilidade

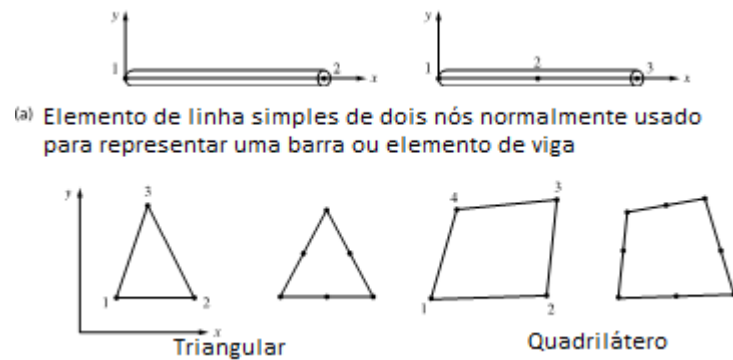
As condições de compatibilidade ou condições de continuidade (*continuity conditions*) relacionam as deformações para que não haja vazios ou sobreposições dos elementos e nós, garantindo que a estrutura permaneça contínua (KASSIMALI, 2011). A consistência do comportamento do modelo adotado é o propósito dessas condições, um nó que une três barras deve manter seu estado de junção mesmo após a deformação global da estrutura, caso contrário a estrutura estaria “abrindo”, comportamento este não permitido em nossas análises (ALVES FILHO, 2000). “Deve-se ressaltar que as condições de compatibilidade não têm relação alguma com as propriedades de resistência dos materiais da estrutura.” (MARTHA, 2010).

2.5 Análise de sistemas discretos – MEF

O MEF é uma técnica utilizada no âmbito computacional para obter soluções aproximadas de problemas de condições de contorno em engenharia (HUTTON, 2003). Em geral, o método é composto, segundo alguns autores, por cinco procedimentos: Pré-processamento; Desenvolvimento das equações dos elementos; Montagem; Solução do sistema de equações; Pós-processamento (BELYTSCHKO; FISH, 2007).

A discretização e a escolha do tipo de elemento é um fator muito importante para se analisar antes de iniciar a aplicação do MEF. Dependendo do problema abordado, o tipo, e também o tamanho do elemento, devem ser adequados para proporcionar resultados satisfatórios sem afetar o desempenho computacional (LOGAN, 2006). Neste projeto, foi aplicado o elemento mais simples, elemento de barra ou também chamado de linha (elemento linear), composto de dois nós em suas extremidades. Esse tipo de elemento é utilizado para análise de treliças, vigas e pórticos. Além desse tipo de elemento, existem outros para outras aplicações.

Figura 2.5 – Alguns tipos de elementos – MEF



Fonte: LOGAN, 2006

Define-se então as relações de tensão-deformação para os elementos, o que irá constituir a rigidez dos elementos, bem como a matriz de rigidez. A universalidade da matriz de rigidez de um elemento é um dos atributos do MEF que reafirma sua versatilidade (BELYTCHKO; FISH, 2007). Existem alguns métodos para se derivar a matriz de rigidez, como por exemplo: método direto de equilíbrio; método baseado em trabalho e energia; e o método dos pesos residuais ou método de Galerkin.

Em seguida deriva-se por sobreposição a matriz de rigidez global da estrutura, o qual foi utilizado o método direto neste projeto, por ser mais simples de ser implementado computacionalmente. Aplica-se então as condições de contorno, ou seja, restrições ou apoios, tornando possível a solução do sistema linear de equações. Após os deslocamentos nodais serem solucionados, basta então resolver a matriz de rigidez global da estrutura não simplificada com relação as forças, obtendo assim as tensões.

2.6 Sistema de Pórtico Plano

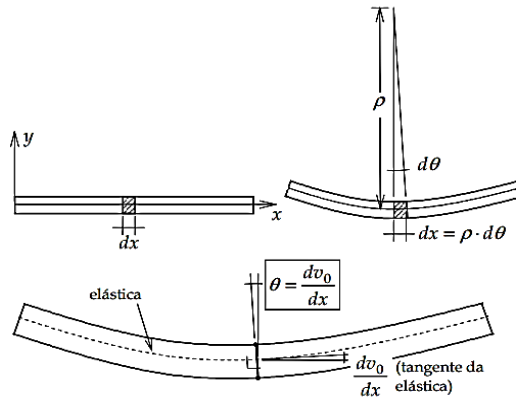
A matriz de rigidez (*stiffness matrix*) de um elemento (barra, mola, etc.) relaciona as coordenadas dos deslocamentos nodais às forças aplicadas no elemento (LOGAN, 2006). É importante salientar que existe a matriz de rigidez local e global. A primeira refere-se ao elemento isolado, e a segunda se trata da união das matrizes de rigidez locais, por meio do processo de montagem utilizando o método da rigidez direta (*direct stiffness method*).

O elemento mais simples para se estudar esse tópico são as molas. No entanto, por fins práticos, a explicação se dará com foco nos elementos que constituem os pórticos, ou seja, barras de vigas (*beam*).

Trabalha-se o conceito de vigas de Navier que em sua base adota a hipótese de Euler-Bernoulli, que considera que, na flexão de uma barra, seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado da barra (conforme Figura 2.6), ou seja, despreza-se

deformações devido ao efeito cortante, portanto, nesse caso, a rigidez do elemento considera apenas a componente axial e a componente de flexão (MARTHA, 2010).

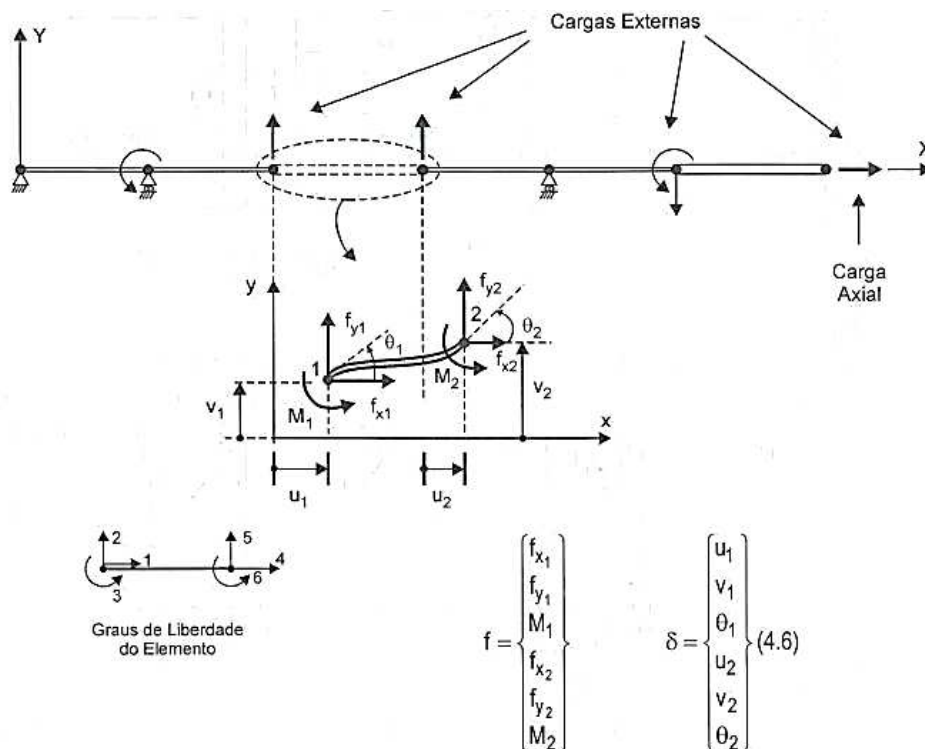
Figura 2.6 – Consideração da formulação adotada – Viga de Navier/Euller Bernoulli



Fonte: MARTHA, 2010

Analisando os graus de liberdade da barra do pórtico e aplicando os conceitos apresentados anteriormente teremos uma barra com 6 (seis) deslocabilidades conforme Figura 2.7.

Figura 2.7 – Graus de liberdade de um elemento de viga isolado



Fonte: ALVES FILHO, 2000

Pela hipótese das pequenas deflexões, o comportamento axial do elemento é independente do comportamento à flexão (ALVES FILHO, 2000).

Para a componente de flexão teremos a seguinte relação:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.9)$$

A equação diferencial leva em consideração a teoria da viga de Navier e relaciona o momento fletor na seção transversal com a segunda derivada do deslocamento transversal em relação a x (ALVES FILHO, 2000).

Para componente axial teremos a seguinte relação, expressão 2.8:

$$F = \frac{AE}{L} d \quad (2.8)$$

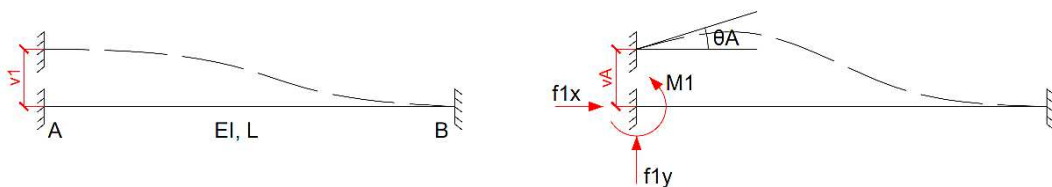
A equação é a relação linear entre deslocamento e força de uma barra. A barra de um pórtico, quando sujeita a tensão axial, comporta-se de modo semelhante à mola, de constante elástica $K = \frac{AE}{L}$ (ALVES FILHO, 2000).

2.6.1 Matriz de Rigidez do elemento de barra no âmbito local e global

Para a barra de pórtico teremos 6 (seis) deslocamentos possíveis como mostrado anteriormente, sendo 4 (quatro) lineares e 2 (dois) de rotação. Uma das formas de se obter a matriz de rigidez do elemento de viga é por meio das equações de equilíbrio, analisando para cada deslocamento nodal isoladamente e realizado a superposição dos efeitos para montagem da matriz de rigidez local do elemento da barra de pórtico.

Seja, por exemplo, o caso em que apenas o deslocamento v_1 é considerado teremos a seguinte configuração representada conforme Figura 2.8 abaixo:

Figura 2.8 – Esquema para obtenção dos coeficientes da matriz de rigidez



Fonte: AUTOR, 2022

Esse problema pode ser resolvido por integração da equação diferencial mostrada para componente de flexão, sendo as reações de apoio, parte da matriz de rigidez local da barra do pórtico devido ao deslocamento nodal v_1 .

Considerando as equações de equilíbrio e aplicando as condições de contorno teremos as seguintes equações para o problema:

$$\theta_A = 0 \rightarrow \frac{M_1 L}{EI} - \frac{f_{y1} L^2}{EI} = 0 \quad (2.10)$$

$$v_A = v1 \rightarrow \frac{f_{y1}L^3}{EI} - \frac{M_1L^2}{2EI} = v1 \quad (2.11)$$

Sistema cuja solução é dada por:

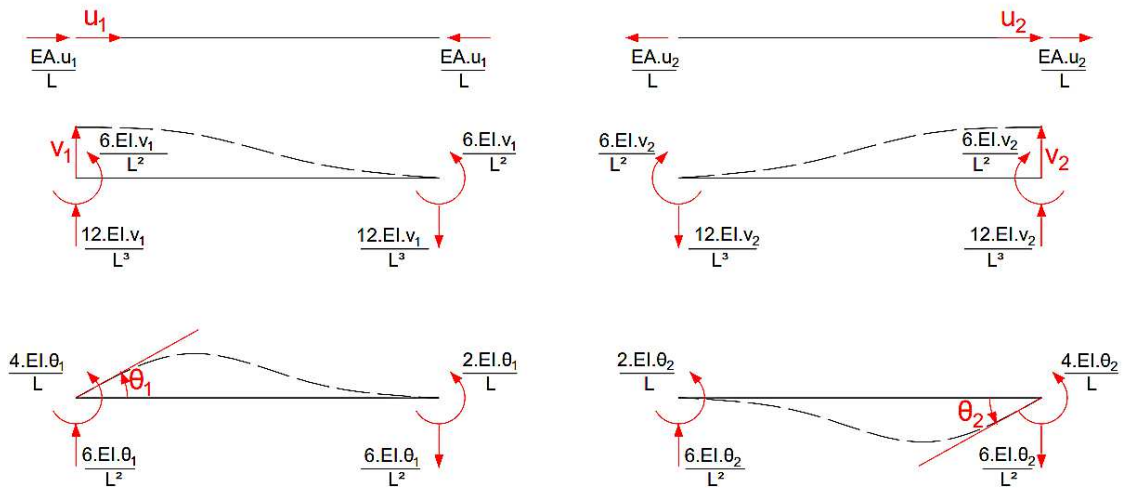
$$M_1 = \frac{6EI}{L^2} v1, \quad f_{y1} = \frac{12EI}{L^3} v1 \quad (2.12)$$

E pelas equações de equilíbrio determina-se os esforços na extremidade B.

$$M_2 = \frac{6EI}{L^2} v1, \quad f_{y2} = \frac{-12EI}{L^3} v1 \quad (2.13)$$

É realizada a mesma análise para cada deslocamento nodal. A Figura 2.9 apresenta os resultados obtidos para cada um dos deslocamentos isoladamente.

Figura 2.9 – Coeficientes de Rigidez do elemento de viga



Fonte: AUTOR, 2022

Considerando o efeito da imposição simultânea de todos os deslocamentos, é possível chegar na seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} f1x \\ f1y \\ M1 \\ f2x \\ f2y \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ \theta1 \\ u2 \\ v2 \\ \theta2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

De forma compacta tem-se:

$$\{f\} = [k]^e \times \{\delta\} \quad (2.15)$$

$\{f\}$ = Vetor de forças nodais;

$[k]^e$ = Matriz de rigidez do elemento;

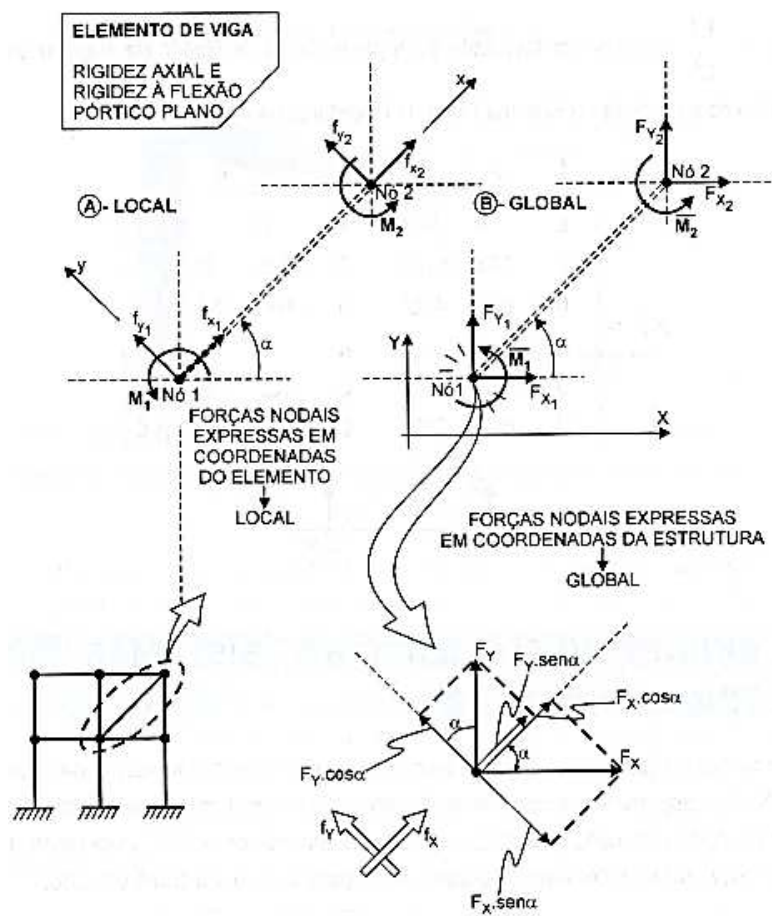
$\{\delta\}$ = Vetor de deslocamentos nodais.

Para realizar a determinação das propriedades de rigidez da estrutura completa a partir da rigidez de cada elemento, é necessário relacionar as forças e os deslocamentos associados dos elementos individuais a um sistema de referência comum, válido para a estrutura como um todo (ALVES FILHO, 2000).

Como as matrizes de rigidez são calculadas inicialmente em coordenadas locais, é necessário introduzir a transformação de forças de um sistema de coordenadas para o outro (ALVES FILHO, 2000).

Esse processo é realizado com uma matriz de transformação que utiliza o ângulo a qual as barras estão posicionadas em relação aos eixos cartesianos globais X, Y , projetando as forças e deslocamentos para o sistema local x, y conforme podemos observar na Figura 2.10.

Figura 2.10 – Transformação do sistema local para global



Fonte: ALVES FILHO, 2000

Como os momentos presentes no pórtico plano são perpendiculares ao plano cartesiano, tanto no sistema local x,y como no sistema global X,Y , os vetores de momento permanecerão com a mesma direção, de maneira que suas coordenadas não serão alteradas.

Assim a correspondência entre as forças nos dois sistemas pode ser dada pelas seguintes equações e escrita matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{cases} f1x = F1x \cdot \cos(\alpha) + F1y \cdot \text{sen}(\alpha) \\ f1y = -F1x \cdot \text{sen}(\alpha) + F1y \cdot \cos(\alpha) \\ M1 = \overline{M1} \\ f2x = F2x \cdot \cos(\alpha) + F2y \cdot \text{sen}(\alpha) \\ f2y = -F2x \cdot \text{sen}(\alpha) + F2y \cdot \cos(\alpha) \\ M2 = \overline{M2} \end{cases} \quad (2.16)$$

Onde:

$$\mu = \text{sen}(\alpha) \quad (2.17)$$

$$\lambda = \cos(\alpha) \quad (2.18)$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} f1x \\ f1y \\ M1 \\ f2x \\ f2y \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F1x \\ F1y \\ \overline{M1} \\ F2x \\ F2y \\ \overline{M2} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

De forma compacta, tem-se:

$$\{f\} = [T] \cdot \{F\} \quad (2.20)$$

Para transformar a matriz de rigidez local em global utiliza-se de propriedades matemáticas matriciais igualando a equação 2.15 a 2.20 obteremos a seguinte equação:

$$\{F\} = [T]^T \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\delta\} \quad (2.21)$$

$$[K]^e = [T]^T \cdot [k]^e \cdot [T] \quad (2.22)$$

$[K]^e$ = Matriz de rigidez global;

$[k]^e$ = Matriz de rigidez local;

Aplicando a expressão 2.22 para o elemento de viga com rigidez axial e rigidez a flexão, teremos a matriz de rigidez do elemento no sistema global de coordenadas, dado a seguir.

$$[K]^e = \begin{bmatrix} a\lambda^2 + 12b\mu^2 & (a - 12b)\mu\lambda & -6bL\mu & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -(a - 12b)\lambda\mu & -6bL\mu \\ (a - 12b)\mu\lambda & a\mu^2 + 12b\lambda^2 & 6bL\lambda & -(a - 12b)\lambda\mu & -a\mu^2 - 12b\lambda^2 & 6bL\lambda \\ -6bL\mu & 6bL\lambda & 4bL^2 & 6bL\mu & -6bL\lambda & 2bL^2 \\ -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -(a - 12b)\lambda\mu & 6bL\mu & a\lambda^2 + 12b\mu^2 & (a - 12b)\lambda\mu & 6bL\mu \\ -(a - 12b)\lambda\mu & -a\mu^2 - 12b\lambda^2 & -6bL\lambda & (a - 12b)\lambda\mu & a\mu^2 + 12b\lambda^2 & -6bL\lambda \\ -6bL\mu & 6bL\lambda & 2bL^2 & 6bL\mu & -6bL\lambda & 4bL^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Onde:

$$a = \frac{EA}{L} \quad (2.24)$$

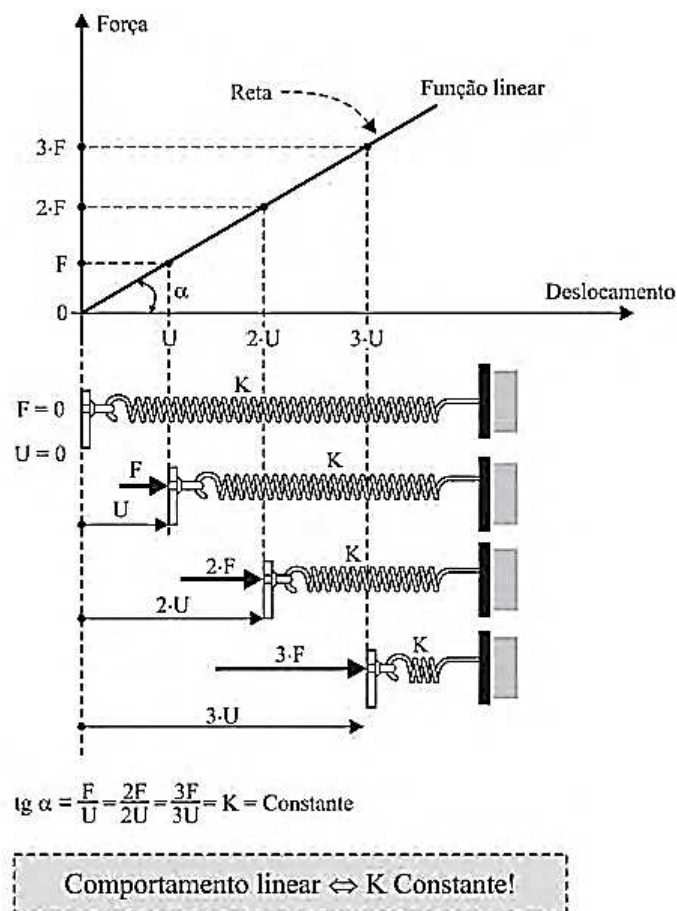
$$b = \frac{EI}{L} \quad (2.25)$$

2.7 Fundamentos da Análise Não-linear

No âmbito da análise linear até o momento abordada, percebe-se que a rigidez da estrutura não varia, tornando assim, proporcional as forças e deslocamentos (ALVES FILHO, 2000), conforme a expressão já vista e Figura 2.11:

$$\{f\} = [k]^e \times \{\delta\} \quad (2.15)$$

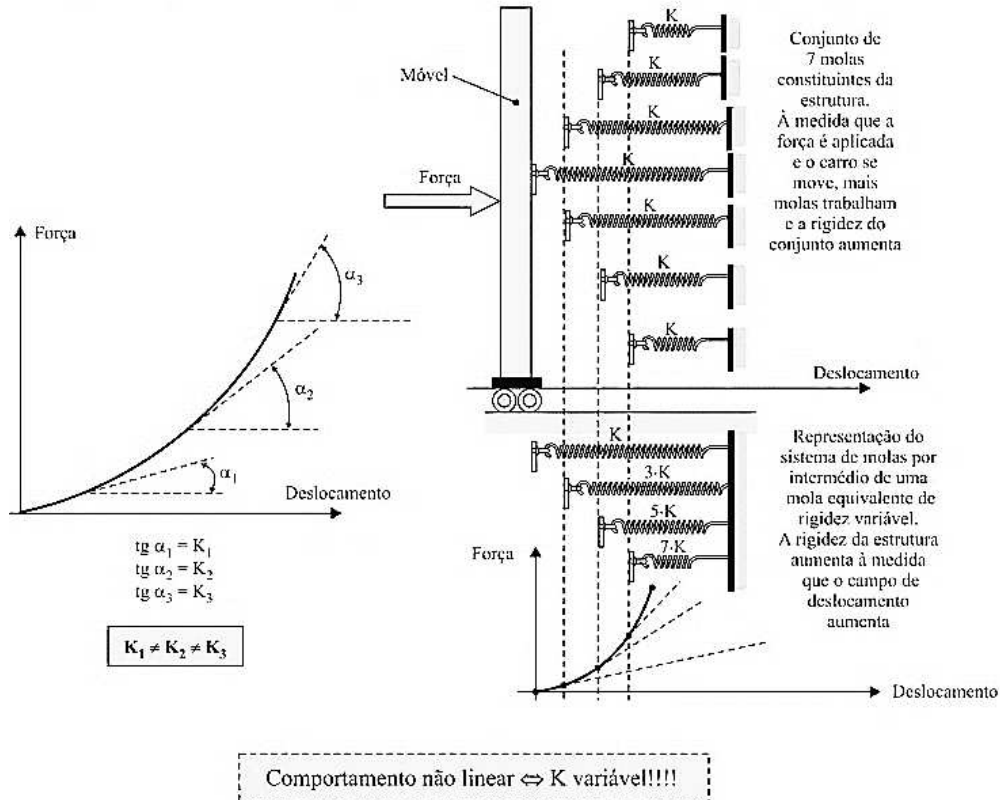
Figura 2.11 – Comportamento linear em analogia com molas



Fonte: ALVES FILHO, 2000

Já conforme um comportamento dito não linear, e utilizando a analogia com molas, a tratativa seguiria segundo a Figura 2.12.

Figura 2.12 – Comportamento Não linear em analogia com associação de molas



Fonte: ALVES FILHO, 2000

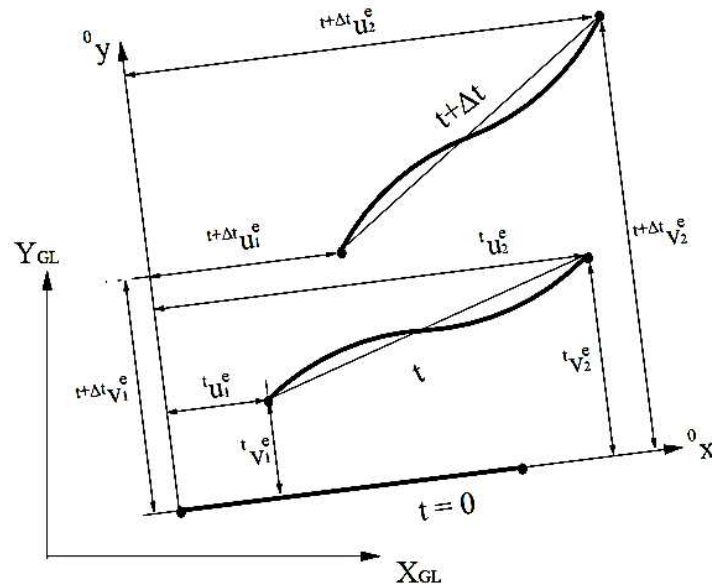
Isto é, nota-se que à medida que a força aplicada na estrutura móvel avança em encontro as molas, as rigidezes se associam, ou seja, um problema é não linear quando a rigidez da estrutura está em função dos deslocamentos (ALVES FILHO, 2000). Esse comportamento é facilmente notado no gráfico Força x Deslocamento, e se torna necessário o emprego de métodos incrementais e iterativos para solucionar o problema.

2.7.1 Formulação Lagrangiana Atualizada – Sistema de coordenadas

Segundo Galvão (2000) os referenciais Lagrangianos são usados para medir deslocamentos de um sistema estrutural com relação a uma configuração inicial deste sistema, sendo possível ainda adotar dentre duas formas deste referencial: Lagrangiano Total (RLT) e Lagrangiano Atualizado (RLA).

No RLT, em uma análise não linear incremental, os deslocamentos são medidos em função da configuração inicial (Figura 2.13).

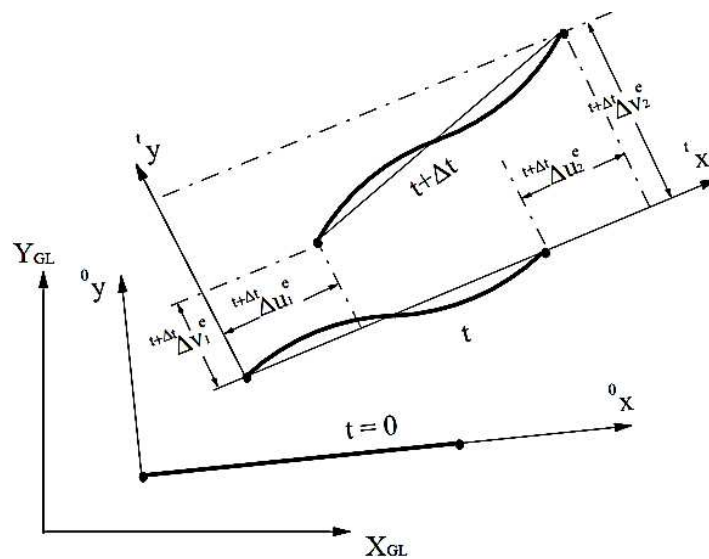
Figura 2.13 – Modelo genérico submetido ao RLT



Fonte: GALVÃO, 2000

Já no RLA, a configuração de referência do incremento subsequente é dada pela estrutura deformada (Figura 2.14).

Figura 2.14 – Modelo genérico submetido ao RLA



Fonte: GALVÃO, 2000

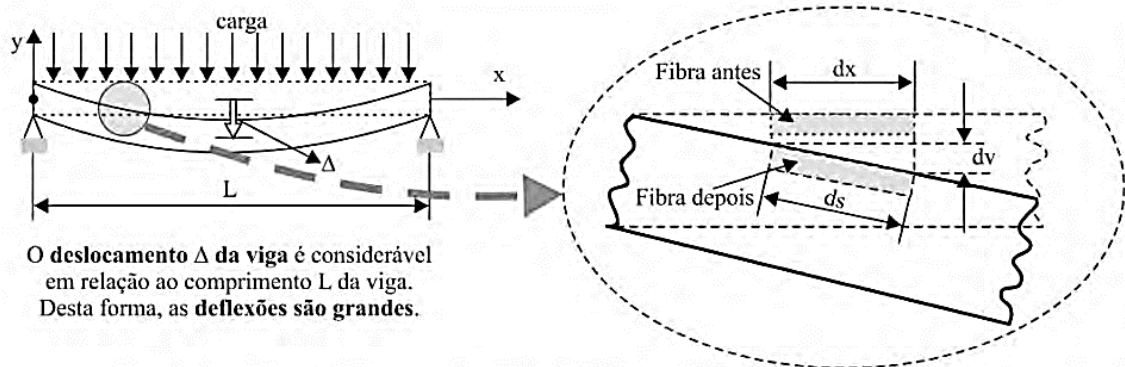
2.7.2 Não linearidade Geométrica

A não linearidade geométrica, a qual este trabalho aborda, é característica de estruturas submetidas há grandes deslocamentos/deflexões e pequenas deformações, como é o caso, por exemplo de estruturas esbeltas (PARASKI, 2012).

O desenvolvimento das equações a seguir se dá segundo Alves Filho (2000).

De acordo com a Figura 2.15, comprimento ds não possui grande variação comparado a dx , isto é, ocorre pequenas deformações, mesmo a estrutura (neste exemplo, uma viga) apresentando grande deslocamento (ALVES FILHO, 2000).

Figura 2.15 – Análise de um comprimento infinitesimal de uma viga



Fonte: ALVES FILHO, 2000

Conforme já apresentado em item anterior (análise linear) e retomando conceitos de resistência dos materiais, a deformação específica longitudinal pode ser expressada, em um caso geral, por duas parcelas, devido a ação axial e momento fletor:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + y \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \quad (2.16)$$

Em uma análise não linear, surge a necessidade da adição de mais uma parcela, esta derivada do efeito da ação flexional na parcela da deformação axial, ou seja, a interferência da flexão na deformação axial, tornando a equação 2.16, em:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + y \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) + \frac{(ds - dx)}{dx} \quad (2.17)$$

Mediante desenvolvimento matemático da última parcela de acordo com a Figura 2.15, tem-se resumidamente:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2} dx \quad (2.18)$$

Sendo:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.19)$$

$$ds \approx dx + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (2.20)$$

Logo, rearranjando a equação, tem-se:

$$\frac{ds - dx}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (2.21)$$

Ou seja, a equação 2.17 é dada agora por:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + y \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (2.22)$$

Isto é, o campo de deslocamentos (u, v) é composto de duas parcelas lineares (axial e flexão) e uma parcela não linear (advinda do acoplamento das ações flexional à axial).

2.7.3 Matriz de Rigidez Geométrica

Os termos lineares da expressão 2.22 estabelecem a base da matriz desenvolvida no item 2.6.1, chamada de matriz elástica ou, no âmbito da análise não linear, rigidez de partida (ou predita). Como já mencionado, a solução do problema é dada por método incremental iterativo, pois a rigidez varia, isto é:

$$[K]_{incremento} = [K]_{predita} + [K]_{correção} \quad (2.23)$$

Ou seja:

$$[K]_{correção} = [K]_{geométrica} \quad (2.24)$$

Equivalente:

$$\begin{aligned} [K]_{geométrica} &= [K]_G \\ [K]_{predita} &= [K]_0 \end{aligned}$$

Assim:

$$\{F\} = [K].\{\Delta\} = ([K]_0 + [K]_G).\{\Delta\} \quad (2.25)$$

$\{F\}$ = Vetor de incremento de forças nodais;

$[K]$ = Matriz de rigidez do elemento corrigida;

$\{\Delta\}$ = Vetor de incremento de deslocamentos nodais.

O desenvolvimento da Matriz de Rigidez Geométrica se dá pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, e é dada, no âmbito local, por:

$$k_{v,G} = \frac{F_x}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & -3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Nota-se que a característica fundamental dessa matriz é que a mesma depende somente de parâmetros geométricos.

Assim sendo, conforme expressão 2.25:

$$\{F\} = [K] \cdot \{\Delta\} = ([K]_0 + [K]_G) \cdot \{\Delta\}$$

Tem-se:

$$\begin{bmatrix} f1x \\ f1y \\ M1 \\ f2x \\ f2y \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} + \frac{F_x}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & -3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ \theta1 \\ u2 \\ v2 \\ \theta2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Por conseguinte, é realizado a transformação do sistema de coordenadas locais para sistema global, de acordo com a expressão 2.22, dando origem então a Matriz de Rigidez Geométrica Global do elemento:

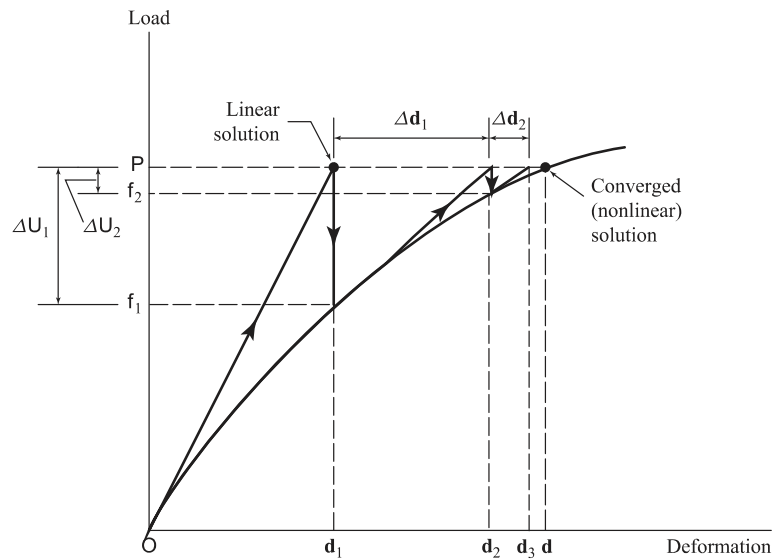
$$[K]_G^e = [T]^T \cdot [k_{v,G}]^e \cdot [T] \quad (2.28)$$

2.7.4 Newton-Raphson como método de solução de Sistemas Não Lineares

Segundo Segnini (2000) o método consiste em se determinar o desequilíbrio, ou resíduo, entre esforços internos e as forças aplicadas existente nos nós da estrutura ao final de cada iteração. De acordo com Paraski (2012), essa comparação entre as forças externas e internas a cada ciclo, baseia-se no princípio Variacional (tema este não abordado neste trabalho), onde a primeira variação do funcional de energia deve ser igual a zero, tornando assim a estrutura equilibrada. “O cálculo Variacional estuda os métodos que permitem achar os valores extremos dos funcionais. As leis da mecânica que aplicam esses métodos são chamadas de princípios variacionais. A eles pertencem, por exemplo, o princípio da mínima energia potencial, o princípio da mínima ação e a lei da conservação de energia.” (ASSAN, 2003).

Analisando um grau de liberdade com o objetivo de determinar a configuração deformada da estrutura dado um carregamento externo, tem-se o seguinte esquema:

Figura 2.16 – Método de Newton Raphson para um grau de liberdade



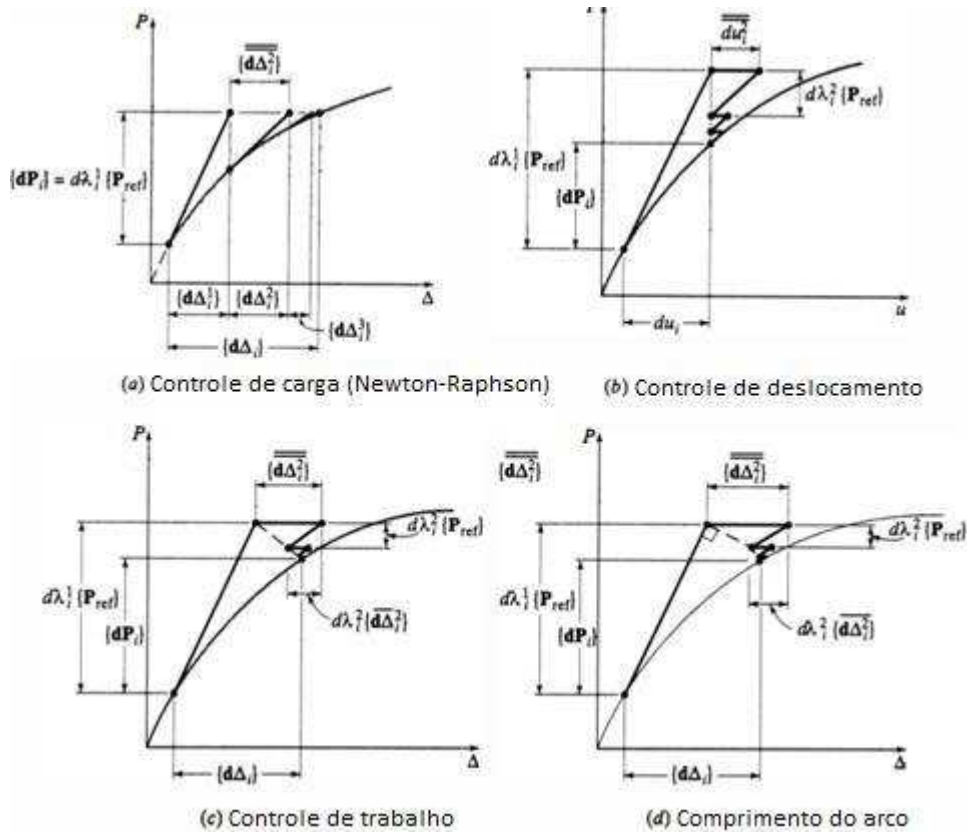
Fonte: (KASSIMALI, 2011)

Percebe-se que ao início do processo, é realizado uma análise linear, tendo carregamento P e deslocamento d_1 . Em seguida é calculado o desequilíbrio de forças da primeira iteração ΔU_1 , fazendo a subtração das forças externas com as forças internas, isto é: $\Delta U_1 = P - f_1$. Este processo é chamado de iteração a carga constante (Método de controle de Cargas), e trata-se de uma estratégia de fácil implementação e ineficaz em uma análise de pontos limites da estrutura – não tratado neste trabalho – (PARASKI, 2012).

De acordo com Kassimali (2011) essa variação de forças é tratada como um incremento de carregamento a ser aplicado na estrutura. A partir desse incremento é calculado a correção ou resíduo de deslocamento Δd_1 . Assim, a nova posição da estrutura deformada é dada pela configuração deformada inicial mais a correção, ou seja: $d_2 = d_1 + \Delta d_1$.

Existem outros métodos incrementais-iterativos mais sofisticados tal como os métodos baseados em controle de deslocamentos, controle de trabalho e energia, comprimento de arco cilíndrico, e métodos modificados baseados nestes já citados (GALLAGHER; MCGUIRE; ZIEMIAN; 1999)

Figura 2.17 – Exemplos de métodos incrementais-iterativos



Fonte: (GALLAGHER; MCGUIRE; ZIEMIAN; 1999)

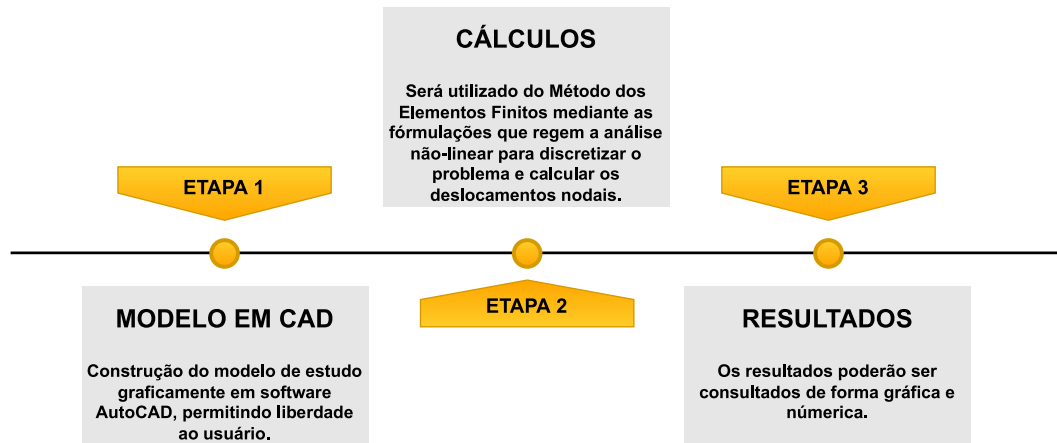
O critério de parada das iterações, isto é, apresentar convergência dos resultados, segundo Kassimali (2011) é dado basicamente pela comparação dos resíduos de deslocamentos da iteração atual e anterior, ou seja, admite-se uma tolerância para este erro, dado por:

$$\sqrt{\frac{\sum(\Delta d)^2}{\sum(d)^2}} \leq e \quad (2.29)$$

3 METODOLOGIA

A metodologia aplicada para a resolução dos problemas, seguiram procedimentos similares. As rotinas computacionais que foram implementadas se fundaram no seguinte fluxograma.

Figura 3.1 – Modelo organizacional inicial



Fonte: (AUTOR, 2020)

Os pórticos planos foram modelados graficamente em ambiente *CAD*. Tal modelo foi submetido a uma rotina computacional que o analisará quantitativamente. Na mesma rotina, é apresentado de forma visual e numérica os resultados obtidos.

3.1 Abordagem Computacional

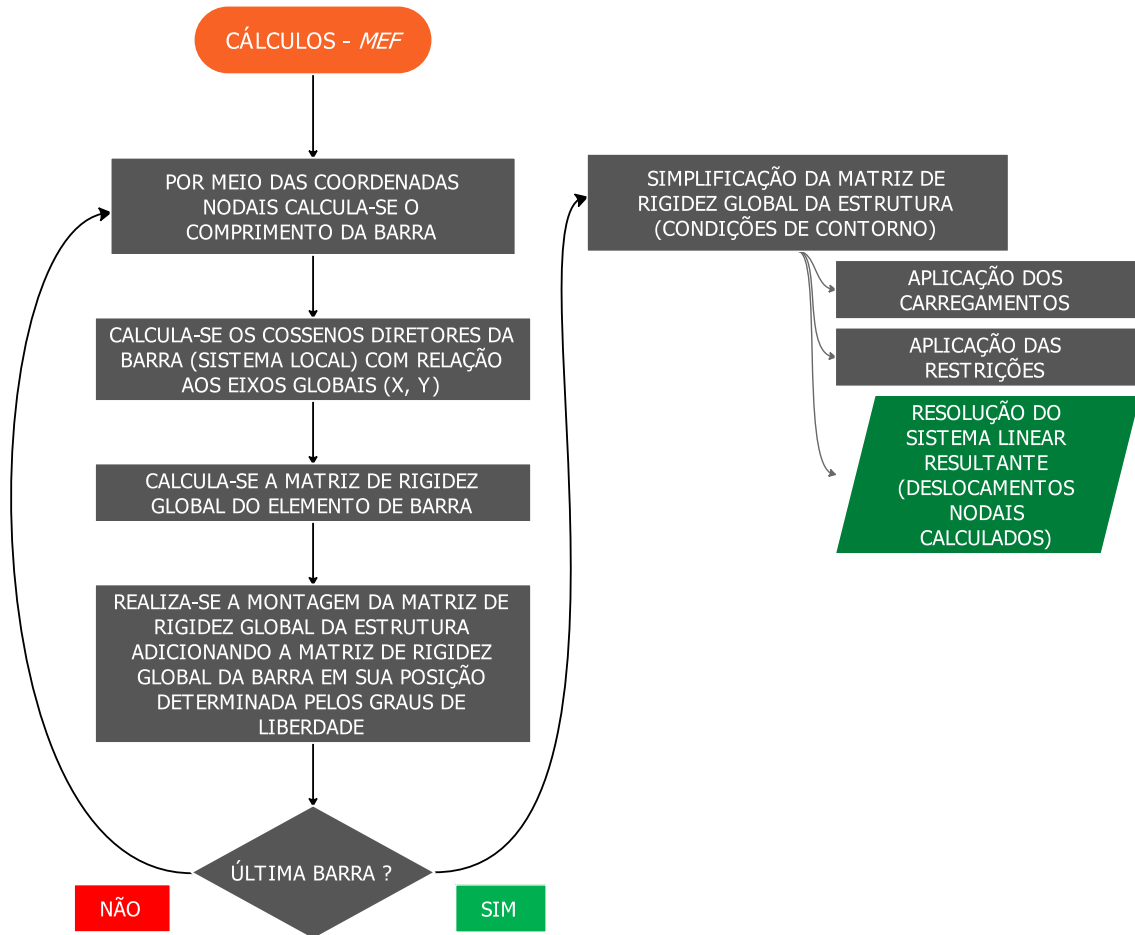
3.1.1 Representação Gráfica – Desenho em *CAD*

Partindo desse simples modelo inicial foi traçado então a estratégia para alcançar o objetivo final de obter os deslocamentos nodais. Para extrair as coordenadas do desenho foi utilizado de uma biblioteca *Python* denominada *EZdxf*. Com a mesma pode-se obter uma matriz de coordenadas de todos os pontos que constituem as linhas representativas do objeto de estudo.

3.1.2 Método de Cálculo - MEF

Após essa etapa de introdução de dados no algoritmo que foi implementado, a etapa seguinte constituiu da programação da rotina do MEF quanto ao elemento de barra denominado viga. O fluxograma a seguir apresenta os passos o qual o algoritmo executa.

Figura 3.2 – Modelo organizacional quanto aos cálculos

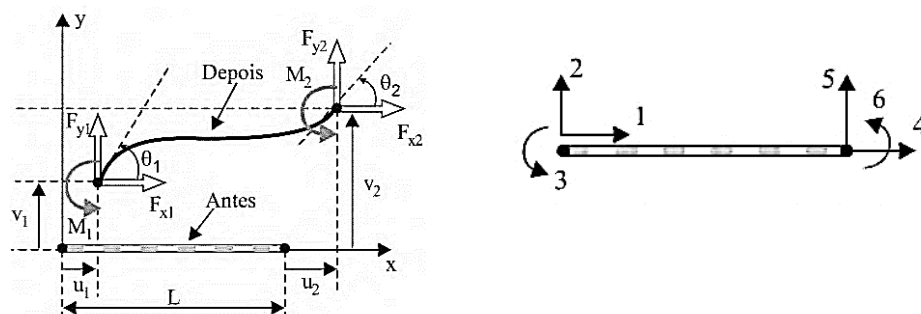


Fonte: (AUTOR, 2020)

3.1.2.1 Enumeração dos Graus de Liberdade

É importante expor o modo como o algoritmo admite os graus de liberdade (deslocabilidades) para cada nó. Admitisse o modelo da Figura 3.3.

Figura 3.3 – Graus de liberdade para fins de implementação computacional do elemento de viga (*beam*)



Fonte: ALVES FILHO, 2000

O algoritmo determina os graus de liberdade por meio das seguintes fórmulas:

$$u_n = 3n - 2 \quad (3.1)$$

$$v_n = 3n - 1 \quad (3.2)$$

$$\theta_n = 3n \quad (3.3)$$

Onde:

n = número do nó.

Realizou-se os seguintes testes com o intuito de verificar as equações propostas.

$$u_1 = 3n - 2 \rightarrow 1 = 3n - 2 \rightarrow n = \frac{1 + 2}{3} \rightarrow n = 1$$

$$v_1 = 3n - 1 \rightarrow 2 = 3n - 1 \rightarrow n = \frac{2 + 1}{3} \rightarrow n = 1$$

$$\theta_1 = 3n - 1 \rightarrow 3 = 3n \rightarrow n = \frac{3}{3} \rightarrow n = 1$$

$$u_2 = 3n - 2 \rightarrow 4 = 3n - 2 \rightarrow n = \frac{4 + 2}{3} \rightarrow n = 2$$

$$v_2 = 3n - 1 \rightarrow 5 = 3n - 1 \rightarrow n = \frac{5 + 1}{3} \rightarrow n = 2$$

$$\theta_2 = 3n - 1 \rightarrow 6 = 3n \rightarrow n = \frac{6}{3} \rightarrow n = 2$$

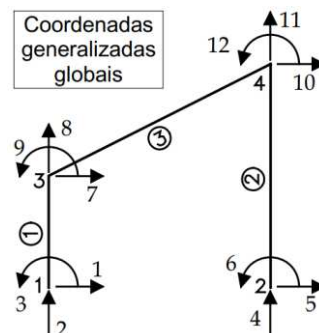
Portanto, conclui-se que a fórmula oferece os resultados corretos e pode ser utilizada. A fórmula ainda pode ser adaptada para não utilizar o valor zero, o que pode causar alguma dificuldade na notação matricial. No entanto, para fins computacionais não há maiores dificuldades.

3.1.2.2 Montagem da Matriz de Rigidez Global da Estrutura

“O método dos deslocamentos determina a matriz de rigidez global de um modelo por superposição de casos básicos” (MARTHA, 2010).

Considere o esquema genérico de um pórtico da figura a seguir:

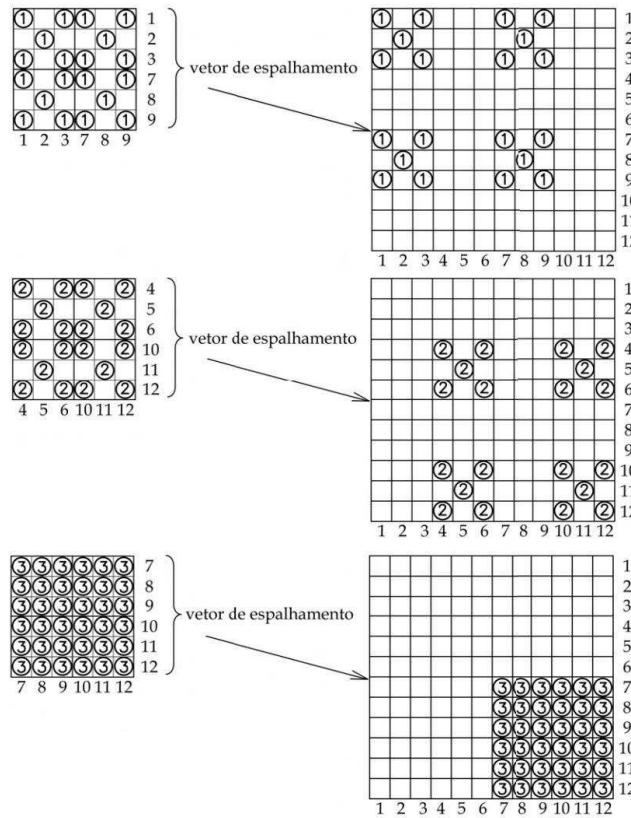
Figura 3.4 – Graus de liberdade de um pórtico genérico



Fonte: MARTHA, 2010

O passo inicial é enumerar os nós. Em seguida determinar os graus de liberdade, conforme item anterior. Assim, existe uma relação direta entre o número do nó e seus graus de liberdade. A Matriz de Rigidez Global da Estrutura é, portanto, uma matriz 12×12 .

Figura 3.5 – Montagem da Matriz de Rigidez Global da Estrutura



Fonte: Adaptado de MARTHA (2010)

O processo de montagem (*Assembly*) consiste em basicamente somar coeficientes de mesmos índices (Graus de Liberdade) da i -ésima linha e j -ésima coluna. Os índices são representados pelos valores dispostos na horizontal e vertical a fim de facilitar a visualização.

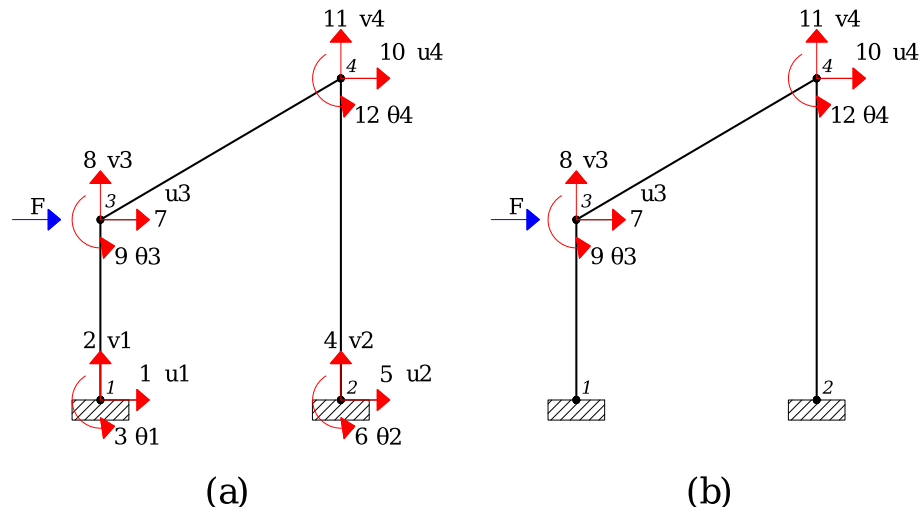
Figura 3.6 – Matriz de Rigidez Global da Estrutura do pórtico genérico

$$K_{12 \times 12}^G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+3 & 3 & 1+3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1+3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+3 & 3 & 1+3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2+3 & 3 & 2+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2+3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2+3 & 3 & 2+3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fonte: (AUTOR, 2020)

Em seguida, é realizado o processo de simplificação, isto é, aplicar as condições de contorno (restrições) e carregamentos externos. Para exemplificar, adotou-se o esquema genérico, aplicando restrições de 3º gênero e um carregamento externo F .

Figura 3.7 – (a) Modelo generalizado ; (b) Modelo Reduzido



Fonte: (AUTOR, 2020)

Sabendo que:

$$\{F\} = [K] \cdot \{\Delta\} \quad (3.4)$$

Logo:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+3 & 3 & 1+3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1+3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+3 & 3 & 1+3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2+3 & 3 & 2+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2+3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2+3 & 3 & 2+3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Onde F pode representar uma força pontual ou momento fletor.

Considera-se então que foi aplicado uma força F no nó 3 na direção do grau de liberdade 7, um apoio de 3º gênero no nó 1 e 2 (restringindo deslocamento vertical, horizontal e rotação). Assim, a expressão 3.5 se torna:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

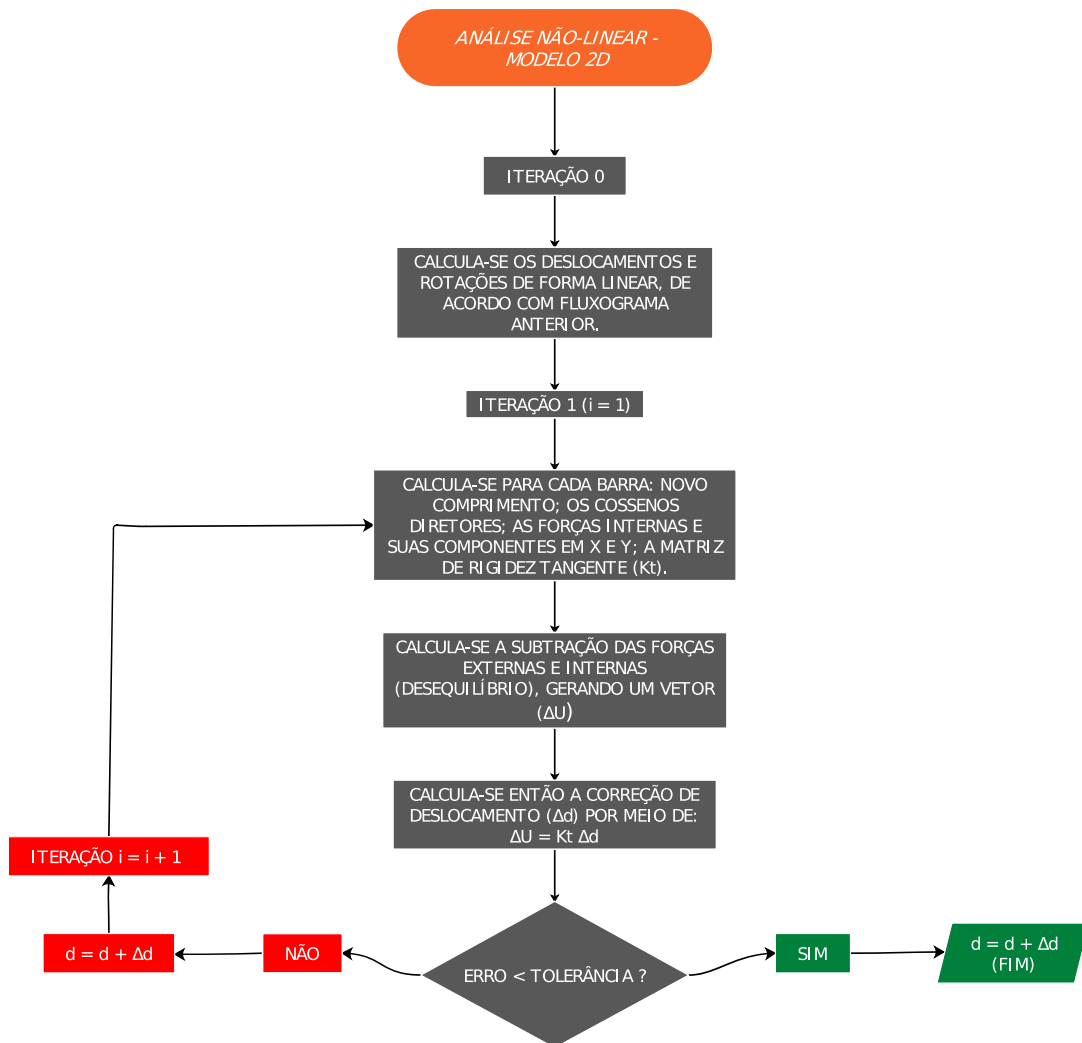
Pode-se então reduzir a matriz de Rigidez Global da Estrutura anulando as linhas e colunas dos respectivos valores nulos presentes no problema. Por fim, a expressão reduzida:

$$\begin{pmatrix} F \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} + \mathbf{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

3.1.3 Método de cálculo aplicado à análise não-linear

O fluxograma a seguir representa de forma mais objetiva o processo pelo qual a análise não-linear geométrica foi implementada em uma estrutura de pórtico plano.

Figura 3.8 – Modelo organizacional quanto aos cálculos da análise não-linear



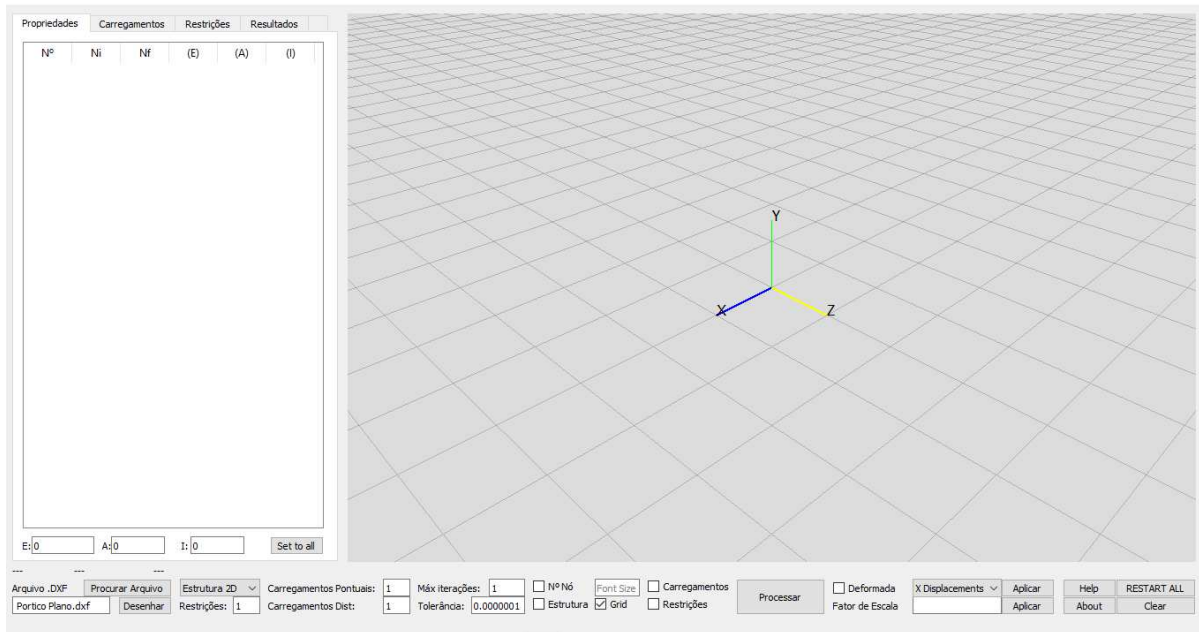
Fonte: (AUTOR, 2020)

3.1.4 Algoritmo implementado e interface gráfica

A última etapa, após obter os deslocamentos e rotações, trata-se da visualização desses resultados em forma de uma listagem das coordenadas finais dos nós, bem como a forma gráfica da estrutura deformada.

A interface gráfica tem como finalidade facilitar o uso pelo usuário. A mesma conta com regiões específicas e que conduzirão o usuário. A mesma pode ser vista na figura a seguir:

Figura 3.9 – Interface gráfica



Fonte: (AUTOR, 2020)

3.1.5 Softwares Utilizados

- **Python 3.10:** É uma ótima linguagem de programação orientada a objetos, interpretada e interativa. Combina notável poder com sintaxe muito clara. Possui módulos, classes, exceções, tipos de dados dinâmicos de nível muito alto, digitação dinâmica e bibliotecas. As bibliotecas complementares conhecidas também como *packages* (pacotes) são blocos de códigos desenvolvidos por programadores a fim de facilitar o uso do usuário.

Foram utilizadas as seguintes bibliotecas auxiliares:

- **NumPy 1.19.2:** É um projeto *open source* criado em 2005 escrito em linguagem C que possibilita manipulação multidimensional de vetores e matrizes, oferece geradores randômicos de números, rotinas de álgebra linear, transformações de Fourier, etc.;
- **Matplotlib 3.0.3:** Biblioteca para criação de gráficos 2D-3D estáticos, animados e interativos.
- **EZdxf 0.14.2:** Segundo o autor, Manfred Moitzi (Mozman), é um biblioteca para criar e ler/modificar arquivos do formato *DXF* (*Drawing Interchange Format* ou *Drawing Exchange Format*) de modelos *CAD* (*Computer Aided Design*).
- **PyQT 5.15.1:** Segundo a companhia desenvolvedora *Riverbank Computing Limited*, *QT* é um conjunto bibliotecas multiplataformas em C++ implementadas em linguagens de alto nível. Já o *PyQT5* é um apanhado de rotinas de ligação em

Python v2 e v3 para QT. De forma bastante resumida, o *PyQT5* permite usufruir da linguagem *Python* em relação ao *C++*. Por intermédio do *PyQT5*, houve a possibilidade da criação da interface gráfica do usuário (*GUI – Graphical User Interface*) utilizando o *QT Designer 5.11.1*.

- **PyQTGraph 0.11.0:** Biblioteca criada por Luke Campagnola por volta de 2011 a 2012 pela Universidade da Carolina do Norte em Chapel Hill (*University of North Carolina at Chapel Hill*). A biblioteca tem o objetivo de ser rápida e versátil quanto a visualização 2D e 3D de gráficos interativos e no manejo de grande quantidade de dados, podendo ser utilizada em aplicações nas áreas de matemática e engenharia.
- **AutoCAD 2019:** Segundo a desenvolvedora *Autodesk*, o AutoCAD é um *software* CAD que profissionais de construção utilizam para criar desenhos 2D e 3D de forma precisa.

Foram utilizadas os seguintes *softwares* para comparação de resultados:

- **Ftool 4.00.04:** Programa desenvolvido por meio de um projeto de pesquisa do departamento de informática da PUC-Rio. O *software* realiza análise estrutural de pórticos planos, afim de promover rápida e eficiente forma de estudo de estruturas. No âmbito do atual trabalho, o Ftool foi utilizado como forma de comparação dos resultados para validação do algoritmo implementado.
- **MASTAN2:** *Software* desenvolvido em MATLAB por Ronald D. Ziemian, William McGuire e Siwei Liu, autores do livro texto *Matrix Structural Analysis, 1999*. O programa foi utilizado como forma de comparação de resultados dos problemas com Análise Linear e Análise Não Linear.

3.1.6 Especificações técnicas do computador utilizado

As configurações do computador utilizado no processamento do algoritmo implementado e dos resultados apresentados neste trabalho são:

- **Processador:** Intel Core i3 10105 @3.70Ghz 4/8;
- **Placa mãe:** H510M H;
- **Memoria RAM:** 8GB DDR4 3.200 MHz;
- **Placa Gráfica:** Integrada intel UHD Graphics 630;
- **SO:** Windows 10 Pro v. 22H2 – 64bits;

O tempo de processamento pode ser influenciado diretamente pelas especificações do computador, bem como pela falta de otimização da rotina implementada.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com a rotina implementada realizou-se observações quanto ao impacto do aumento do número de elementos na análise além da comparação de problemas já conhecidos da literatura com os resultados obtidos pela rotina programada. A comparação foi realizada para problemas lineares e para não lineares utilizando-se de *softwares* renomados para afirmação dos resultados encontrados.

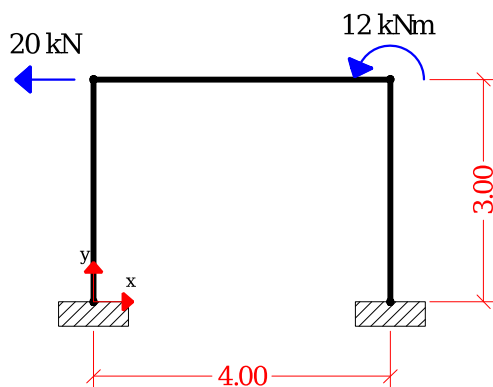
4.1 Relação entre número de elementos e precisão

Em uma simulação que utiliza de análise numérica, como o caso do MEF, é necessário ter em mente que são métodos aproximados, ou seja, possuem erros. Quando se recorre à utilização desses métodos para resolver problemas de engenharia, é de grande importância desenvolver meios de identificar os geradores e a magnitude destes erros (TEIXEIRA DIAS et al., 2010).

Levando em consideração essa importância, para o MEF, é fundamental estabelecer uma quantidade de elementos adequada para a análise do pórtico, visando o equilíbrio entre precisão e desempenho de processamento. Dito isso, foi realizada uma série de processamentos com a mesma estrutura aumentando apenas a quantidade de elementos na análise para que se pudesse observar o impacto nos resultados observados.

Foi realizado o estudo da quantidade de elementos necessários para uma tolerância de erro de 1.10^{-4} para a estrutura com as propriedades e configurações da figura a seguir:

Figura 4.1 – Pórtico de estudo



Parâmetros Geométricos e Material	
Módulo de Elasticidade (E)	210000000 Pa
Area da Seção Transversal (A)	0,02 m ²
Momento de Inércia (I)	0,00005 m ⁴

Fonte: Adaptado de KATTAN (2008)

Analisando os deslocamentos de um ponto fixo no pórtico – ponto médio da barra horizontal – é possível perceber que com o aumento dos elementos os valores de deslocamentos tendem a convergir para um resultado, ou seja, o erro tende a diminuir. Contrapartida o tempo de processamento da estrutura aumenta devido à quantidade de matrizes a serem calculadas. É possível observar os resultados na tabela a seguir que relaciona os deslocamentos em x e y de um ponto fixo no pórtico, com o aumento de elementos.

Tabela 4.1 – Resultado em função do aumento de elementos

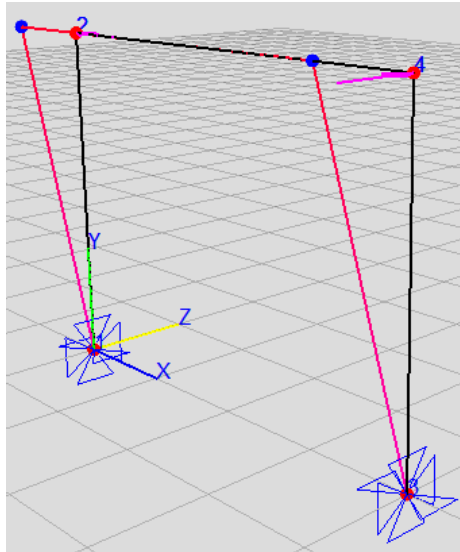
Deslocamento em função do aumento de elementos			
Nº de Elementos	x (m)	y (m)	Tempo de processamento (s)
3	-0,003783	0	0,295
9	-0,003783	-0,000276	0,314
15	-0,003783	-0,000298	0,374
21	-0,003783	-0,000304	0,488
27	-0,003783	-0,0003065	0,808
33	-0,003783	-0,000308	1,139
39	-0,003783	-0,0003085	1,854
63	-0,003783	-0,0003095	8,625

Fonte: (AUTOR, 2022)

Percebe-se que com 21 (vinte e um) elementos o valor já converge com um erro aceitável e que uma quantidade maior de elementos traria um ganho pouco significativo na precisão e um tempo de processamento superior. Essa característica fica muito clara quando extrapolamos o número de elementos para 63 (sessenta e três) e os resultados praticamente não se alteram, porém o tempo de processamento é muito superior. Uma análise que deve ser feita também é a rápida convergência dos valores de deslocamento em x que não se alteraram com a diferença no número de elementos, ou seja, o aumento no número de elementos, para esse caso, foi mais importante na minimização do erro nos valores dos deslocamentos em y.

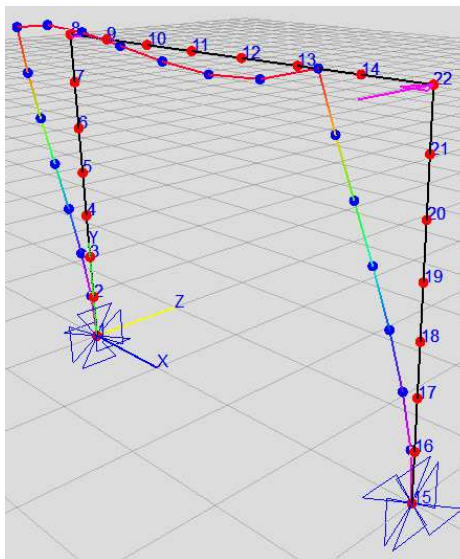
A convergência dos deslocamentos em função do aumento do número de elementos além das configurações do pórtico analisado podem ser observadas nas figuras a seguir:

Figura 4.2 – Deformada da estrutura com 3 elementos



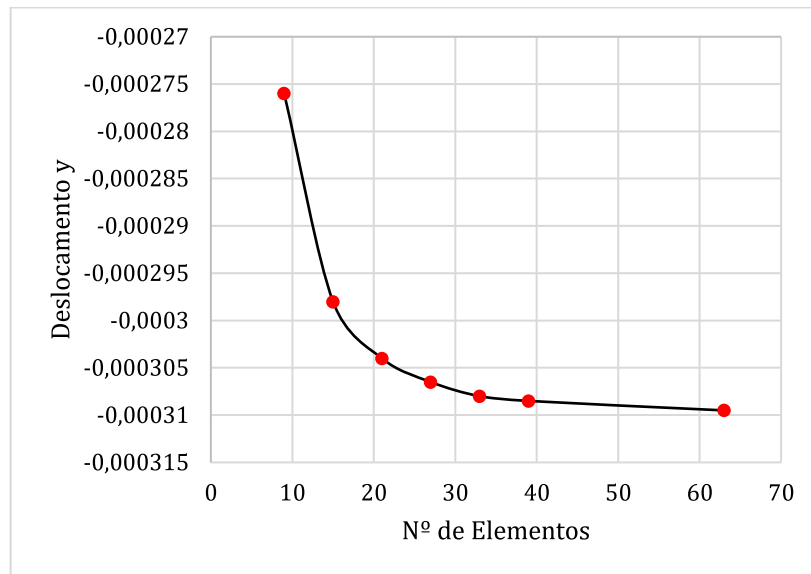
Fonte: (AUTOR, 2022)

Figura 4.3 – Deformada da estrutura com 21 elementos



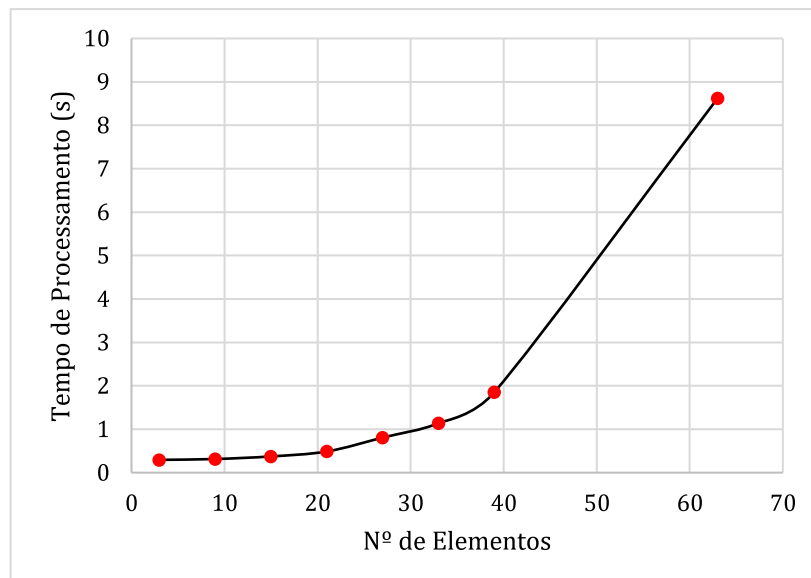
Fonte: (AUTOR, 2022)

Observando o gráfico fica claro que com o aumento do número de elementos o valor do deslocamento em y tende à um resultado.

Gráfico 4.1 – N° de Elementos x Deslocamento em y

Fonte: (AUTOR, 2022)

Já no gráfico abaixo, fica evidente que o tempo de processamento praticamente dobra após adotado 21 elementos, enquanto o valor do deslocamento em y pouco se altera. Com a extrapolação de 63 elementos, percebe-se o quanto este estudo é importante de ser realizado, evitando custo computacional desnecessário.

Gráfico 4.2 – N° de Elementos x Tempo de processamento

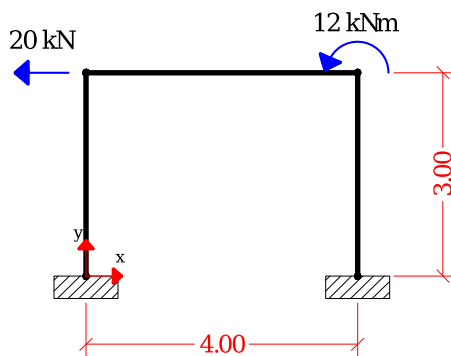
Fonte: (AUTOR, 2022)

4.2 Problema 1 – Análise Linear

Com objeto de validar os resultados obtidos da análise linear realizada pelo algoritmo desenvolvido, utilizou-se como comparação um problema com resultados já conhecidos pela literatura. Ainda foi realizado a comparação dos resultados com o *software* Ftool, utilizado amplamente no Brasil, e o resultado apresentado pela literatura.

O problema proposto trata-se do exemplo 8.1 do livro *Matlab Guide to Finite an Interactive Approach* do autor Kattan (2008), já utilizado em tópicos anteriores, no entanto com intuito diferente. Trata-se de um pórtico com dois apoios de 3º gênero, solicitado por uma carga horizontal de 20 kN e um momento no sentido anti-horário de 12 kN.m.

Figura 4.4 – Problema 1 – Análise Linear



Parâmetros Geométricos e Material	
Módulo de Elasticidade (E)	210000000 Pa
Area da Seção Transversal (A)	0,02 m ²
Momento de Inércia (I)	0,00005 m ⁴

Fonte: Adaptado de KATTAN (2008)

Como visto no tópico anterior, será utilizado 21 elementos para resolução do problema, pois com esse número de elementos o resultado possui um erro dentro dos padrões adotados como aceitáveis com um tempo de processamento otimizado.

É então introduzido os dados na GUI implementada, como pode ser visto na imagem a seguir.

Figura 4.5 – Problema 1 – Inserção de dados

Propriedades							Carregamentos			Restrições			Resultados		
	Nº	Ni	Nf	(E)	(A)	(I)									
1	1	22	14	210000000	0.02	0.00005									
2	2	2	1	210000000	0.02	0.00005									
3	3	3	2	210000000	0.02	0.00005									
4	4	4	3	210000000	0.02	0.00005									
5	5	5	4	210000000	0.02	0.00005									
6	6	6	5	210000000	0.02	0.00005									
7	7	7	6	210000000	0.02	0.00005									
8	8	8	7	210000000	0.02	0.00005									
9	14	13	13	210000000	0.02	0.00005									
10	10	13	12	210000000	0.02	0.00005									
11	11	12	11	210000000	0.02	0.00005									
12	12	11	10	210000000	0.02	0.00005									
13	13	10	9	210000000	0.02	0.00005									
14	14	9	8	210000000	0.02	0.00005									
15	15	16	15	210000000	0.02	0.00005									
16	16	17	16	210000000	0.02	0.00005									
17	17	18	17	210000000	0.02	0.00005									
18	18	19	18	210000000	0.02	0.00005									
19	19	20	19	210000000	0.02	0.00005									
20	20	21	20	210000000	0.02	0.00005									
21	21	22	21	210000000	0.02	0.00005									

Propriedades							Carregamentos			Restrições			Resultados		
Pontual							Distribuído								
	F Nº	Nó	Fx	Fy	Mz										
1	1	8	-20	0	0										
2	2	22	0	0	12										

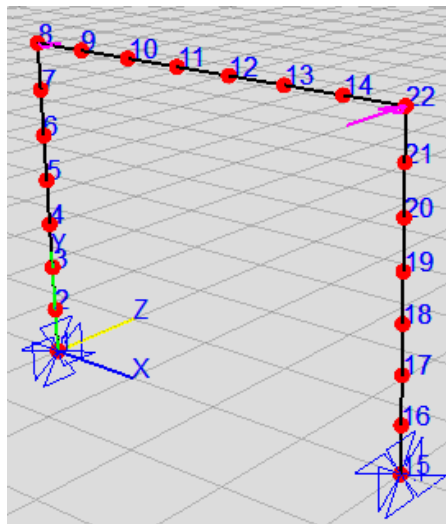
Propriedades							Carregamentos			Restrições			Resultados		
	C Nº	Nó	Rest x	Rest y	Rest z										
1	1	1	1	1	1										
2	2	15	1	1	1										

Fonte: (AUTOR, 2022)

Na aba (Restrições) o valor 1 (um) significa que o movimento é restrito e 0 (zero) significa que o movimento é permitido.

Ao lançar os dados acima, tem-se:

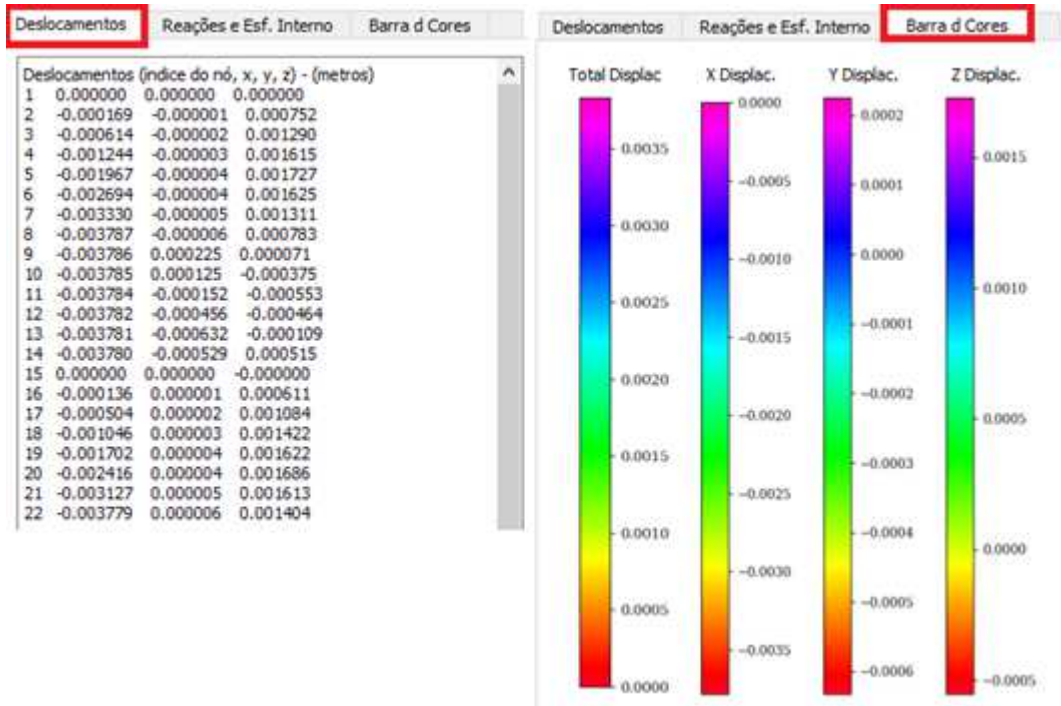
Figura 4.6 – Problema 1 – Janela 3D do algoritmo



Fonte: (AUTOR, 2022)

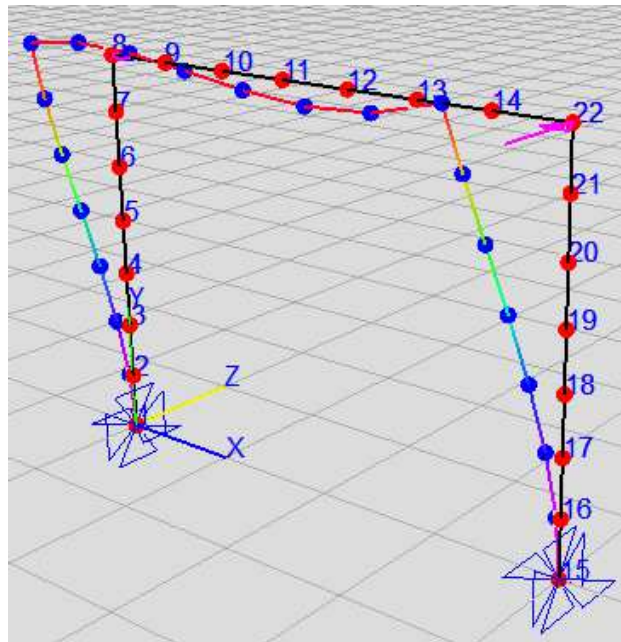
Tem-se então os resultados calculados pela rotina. Unidade dos deslocamentos em metros e rotações em radianos.

Figura 4.7 – Problema 1 – Apresentação dos resultados na GUI com 21 elementos



Fonte: (AUTOR, 2022)

Figura 4.8 – Problema 1 – Deformada da estrutura (Extrapolado 250 vezes)



Fonte: (AUTOR, 2022)

Os resultados são demonstrados para os pontos 8 e 22 na tabela a seguir, comparando-se ao resultado obtido por Kattan (2008) e o *software* Ftool.

Tabela 4.2 – Problema 1 – Resultados numéricos com 21 elementos

Deslocamentos nodais - Análise Linear									
Rotina Implementada				Kattan (2008)					
Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)		
8	-0,003787	-0,000006	0,000783	2 = 8	-0,0038	0	0,0008		
22	-0,003779	0,000006	0,001404	3 = 22	-0,0038	0	0,0014		
Parâmetros Geométricos e Material utilizados				Ftool					
E	210000000Pa	A	0,02 m ²	I	0,00005 m ⁴	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)
Parâmetros do Modelo Estrutural				2 = 8	-0,003785	-0,000006133	0,000783		
Nós	22	Elementos	21	Graus de Liberdade	66	3 = 22	-0,003779	0,000006133	0,001404

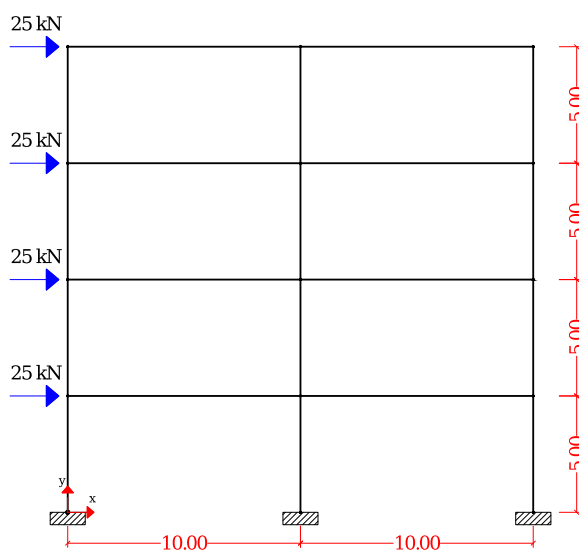
Fonte: (AUTOR, 2022)

Observa-se excelente aproximação dos resultados. O tempo gasto para o algoritmo realizar os cálculos e apresentá-los na GUI, levou cerca de 0,4 segundos.

4.3 Problema 2 – Análise Linear

O problema proposto trata-se de um pórtico de 3 lances, com três apoios de 3º gênero, solicitado por cargas horizontais de 25 kN. Neste problema analisou-se principalmente os deslocamentos horizontais dos nós já existente na estrutura. Se houvesse a necessidade de obter os deslocamentos em qualquer ponto das barras, seria de suma importância subdividir em mais elementos, aumentando assim a exatidão dos valores, bem como demonstrado no estudo da relação entre número de elementos e precisão

Figura 4.9 – Problema 2 – Análise Linear

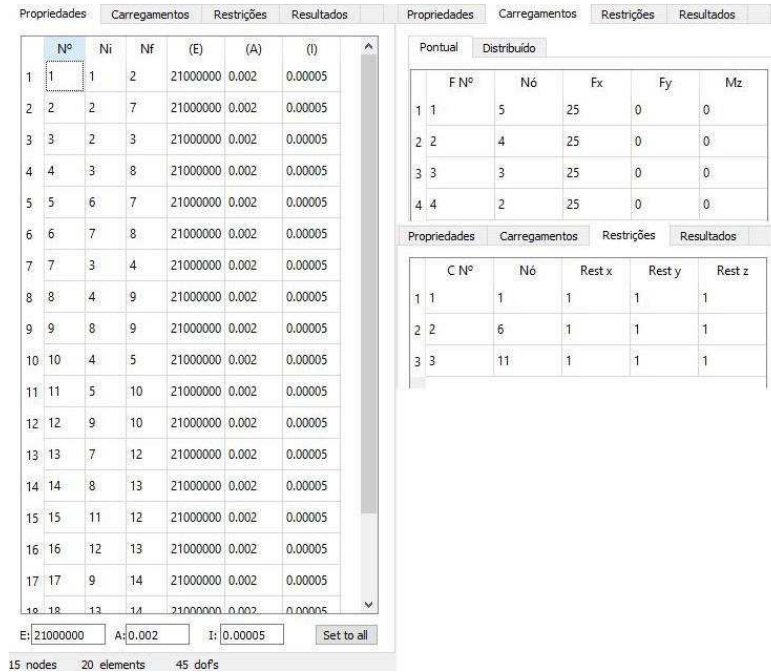


Parâmetros Geométricos e Material	
Módulo de Elasticidade (E)	21000000 Pa
Area da Seção Transversal (A)	0,002 m ²
Momento de Inércia (I)	0,00005 m ⁴

Fonte: (AUTOR, 2022)

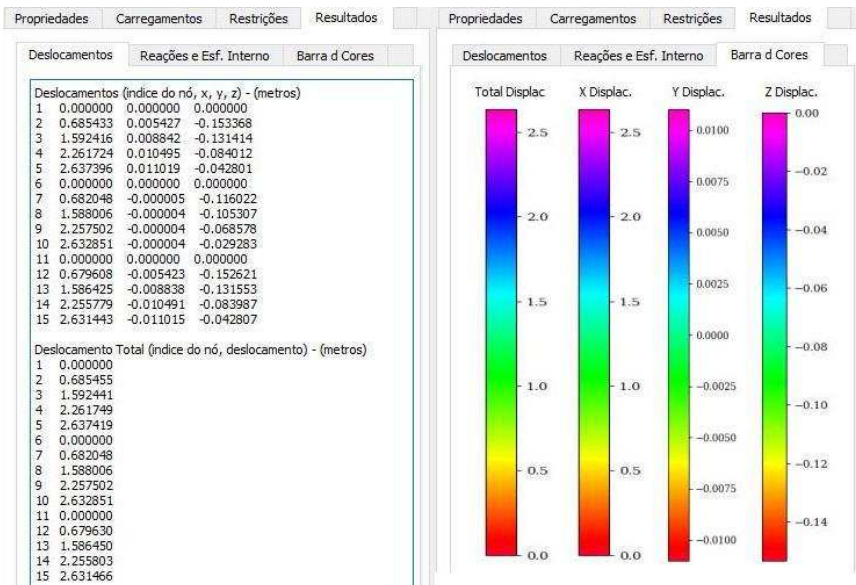
Segue então o mesmo procedimento de inserção de dados e obtenção dos resultados no algoritmo.

Figura 4.10 – Inserção de dados



Fonte: (AUTOR, 2022)

Figura 4.11 – Apresentação dos resultados na GUI com 20 elementos



Fonte: (AUTOR, 2022)

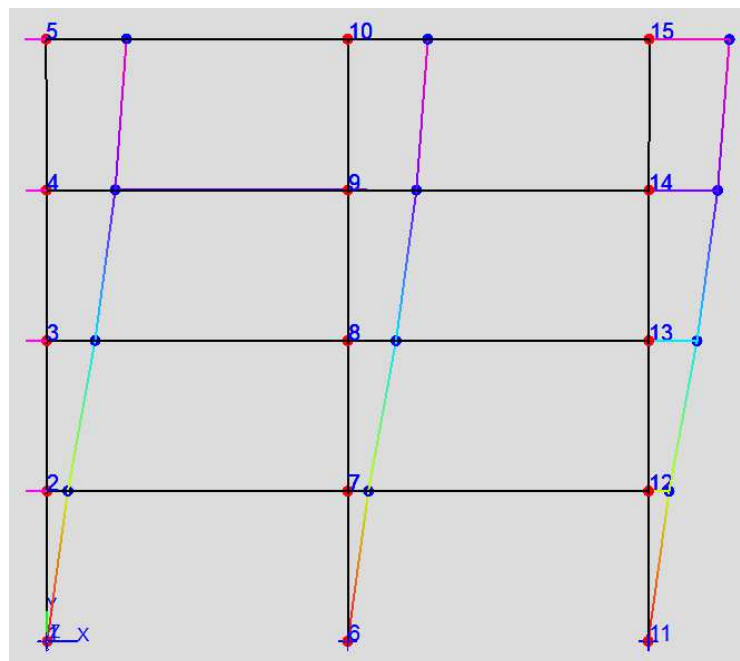
Observa-se novamente ótima aproximação dos resultados entre o algoritmo e o *software* MASTAN2. O tempo decorrido para o algoritmo realizar os cálculos e apresentá-los na GUI, levou cerca de 0,385 segundos.

Tabela 4.3 – Problema 2 – Resultados numéricos com 20 elementos

Deslocamentos nodais e rotações - Análise Linear							
Rotina Implementada				MASTAN2			
Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)
5	2,637396	0,011019	-0,042801	13	2,637	0,01102	-0,0428
4	2,261724	0,010495	-0,084012	16	2,266	0,01049	-0,08401
3	1,592416	0,008842	-0,131414	7	1,592	0,00884	-0,1314
2	0,685433	0,005427	-0,153368	4	0,6854	0,00543	-0,1534
Parâmetros Geométricos e Material utilizados							
E	21000000 Pa	A	0,002 m ²	I	0,00005 m ⁴		
Parâmetros do Modelo Estrutural							
Nós	15	Elementos	20	Graus de Liberdade	45		

Fonte: (AUTOR, 2022)

Figura 4.12 – Problema 2 – Deformada da estrutura



Fonte: (AUTOR, 2022)

4.4 Problema 1 – Análise Não-Linear

Através do estudo realizado da relação entre o número de elementos e a precisão na convergência aceitável dos resultados, utilizou-se do mesmo pórtico já estudado na análise linear (com 22 elementos) para se realizar o estudo quanto a análise não linear geométrica. Os dados iniciais de características físicas e geométricas do pórtico foram os mesmos, no entanto, é necessário informar a tolerância e quantidade de iterações. Tais valores não seguem uma regra específica, e é responsabilidade do usuário analista de propô-los, efetuando tentativas.

Inicialmente adotou-se 50 iterações e tolerância de $1 \cdot 10^{-5}$ (unidade de deslocamento). Notou-se que já na primeira iteração, isto é, os resultados após a solução predita, que o erro calculado foi de $2,610764 \cdot 10^{-7}$, ou seja, menor que a tolerância exigida. Afim de contornar esse

ocorrido, reduziu-se ainda mais a tolerância, para 1.10^{-7} , mantendo 50 iterações, e realizou novamente a análise.

O algoritmo levou aproximadamente 42 segundos para calcular e plotar os resultados visuais e numéricos. O valor do erro calculado de $2,617006.10^{-7}$, não apresentou variação expressiva com relação a primeira análise, ocorrendo, portanto, a conclusão da análise por meio do critério de iterações, ou seja, alcançou o número máximo de 50 iterações.

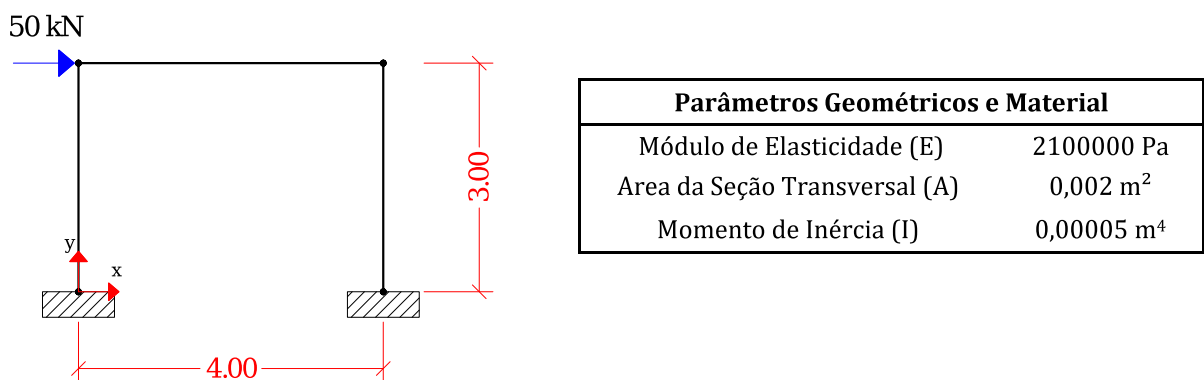
Os resultados obtidos, analisando-se os nós 8 e 22, não apresentaram nenhuma diferença quando comparados com a análise linear realizada. Tal comportamento já era esperado, pois os valores bem reduzidos dos deslocamentos nodais (conforme Tabela 4.2) da análise linear, não causa um efeito expressivo na matriz de rigidez geométrica, parcela esta da rigidez da estrutura, que depende fundamentalmente da alta variação dos comprimentos dos elementos que constituem o pórtico estudado.

Assim, dois outros problemas foram propostos a fim de demonstrar uma variação significativa dos deslocamentos.

4.5 Problema 2 – Análise Não-Linear

O problema proposto trata-se de um pórtico idêntico ao primeiro problema analisado, logo foi utilizado 22 elementos em sua modelagem, com dois apoios de 3º gênero, solicitado por uma carga horizontal de 50 kN. Utilizou-se 20 iterações e tolerância de 1.10^{-7} . Haja visto que no problema anterior, não houve variação expressiva dos resultados, os parâmetros de módulo de elasticidade e área da seção transversal foram reduzidos para esta análise, esperando assim que houvesse maiores deslocamentos, devido a conseqüente perda de rigidez.

Figura 4.13 – Problema 2 – Análise Não Linear



Fonte: (AUTOR, 2022)

Segue então o mesmo procedimento de inserção de dados e obtenção dos resultados no algoritmo.

Figura 4.14 – Inserção de dados

	Nº	Ni	Nf	(E)	(A)	(I)
1	1	22	14	2100000	0.002	0.00005
2	2	2	1	2100000	0.002	0.00005
3	3	3	2	2100000	0.002	0.00005
4	4	4	3	2100000	0.002	0.00005
5	5	5	4	2100000	0.002	0.00005
6	6	6	5	2100000	0.002	0.00005
7	7	7	6	2100000	0.002	0.00005
8	8	8	7	2100000	0.002	0.00005
9	9	14	13	2100000	0.002	0.00005
10	10	13	12	2100000	0.002	0.00005
11	11	12	11	2100000	0.002	0.00005
12	12	11	10	2100000	0.002	0.00005
13	13	10	9	2100000	0.002	0.00005
14	14	9	8	2100000	0.002	0.00005
15	15	16	15	2100000	0.002	0.00005
16	16	17	16	2100000	0.002	0.00005
17	17	18	17	2100000	0.002	0.00005
18	18	19	18	2100000	0.002	0.00005

F Nº	Nó	Fx	Fy	Mz
1	1	8	50	0

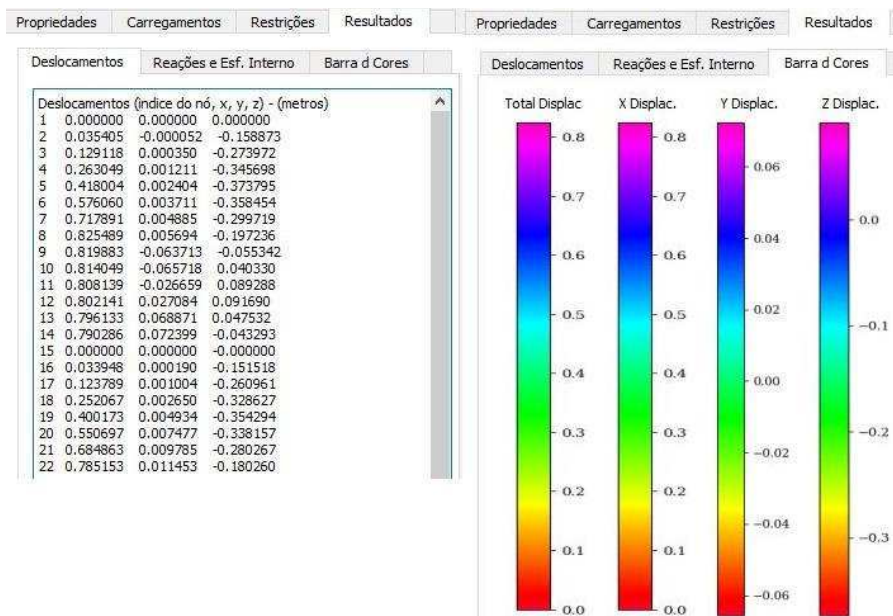
C Nº	Nó	Rest x	Rest y	Rest z
1	1	1	1	1
2	2	15	1	1

E: 2100000 A: 0.002 I: 0.00005 Set to all

22 nodes 21 elements 66 dofs

Fonte: (AUTOR, 2022)

Figura 4.15 – Apresentação dos resultados na GUI com 21 elementos



Fonte: (AUTOR, 2022)

Realizado uma análise linear do problema, observa-se outra vez uma excelente aproximação dos resultados entre o algoritmo e o *software* MASTAN2. O tempo decorrido para o algoritmo realizar os cálculos e apresentá-los na GUI, levou cerca de 0,470 segundos.

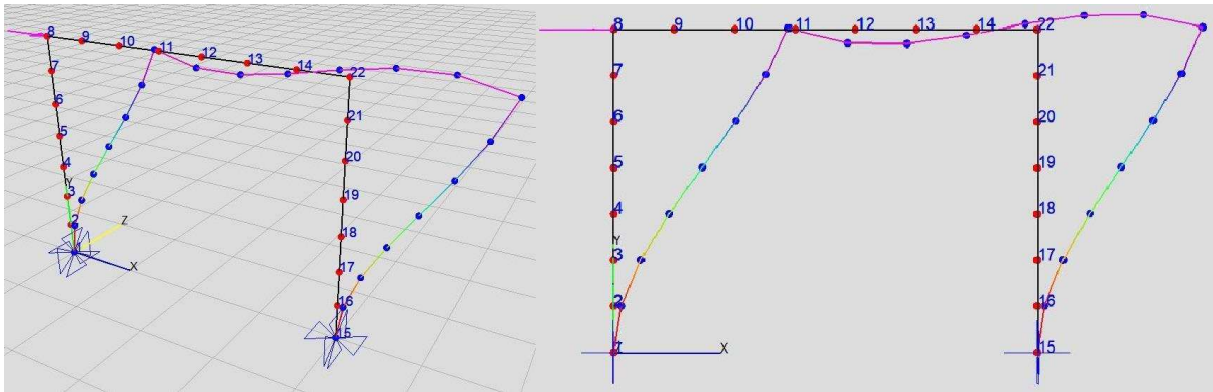
Tabela 4.4 – Problema 2 – Resultados numéricos com 21 elementos

Deslocamentos nodais - Análise Linear							
Rotina Implementada				MASTAN2			
Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)
8	0,846398	0,010902	-0,203551	3	0,8464	0,0109	-0,2036
22	0,822826	-0,010902	-0,194979	4	0,8228	-0,0109	-0,195
Parâmetros Geométricos e Material utilizados							
E	2100000 Pa		A	0,002 m ²	I	0,00005 m ⁴	
Parâmetros do Modelo Estrutural							
Nós	22	Elementos		21	Graus de Liberdade		66

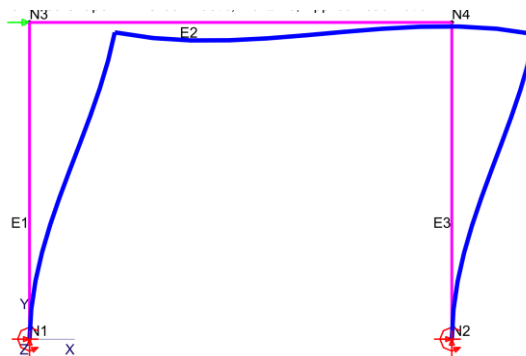
Fonte: (AUTOR, 2022)

Já na análise não linear, os resultados apresentaram proximidade nos deslocamentos horizontais e rotações, e resultando em uma razoável diferença nos deslocamentos verticais. O tempo decorrido para o algoritmo realizar os cálculos e apresenta-los na GUI, levou cerca de 3,755 segundos. A conclusão da análise ocorreu por meio do critério de iterações, isto é, alcançou o número máximo de 20 iterações, como informado a rotina, apresentando um erro de 0,002118 ($2,118 \cdot 10^{-3}$) superior a tolerância exigida.

Figura 4.16 – Problema 2 – Deformada da estrutura



Fonte: (AUTOR, 2022)

Figura 4.17 – Problema 2 – Deformada da estrutura *software* MASTAN2

Fonte: (AUTOR, 2022)

Tabela 4.5 – Problema 2 – Resultados numéricos com 21 elementos e 20 iterações

Deslocamentos nodais - Análise NÃO Linear							
Rotina Implementada				MASTAN2			
Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)
8	0,82549	0,00569	-0,197236	3	0,8076	-0,0944	-0,1967
22	0,78515	0,01145	-0,18026	4	0,7878	-0,1118	-0,1917
Parâmetros Geométricos e Material utilizados							
E	2100000Pa		A	0,002 m ²		I	0,00005 m ⁴
Parâmetros do Modelo Estrutural							
Nós	22		Elementos	21		Graus de Liberdade	66

Fonte: (AUTOR, 2022)

Pode-se concluir, que os resultados poderiam vir a convergir aumentando, portanto, o número de iterações. Mantendo-se os mesmos parâmetros e elevando o número de iterações para 40, obteve-se os seguintes resultados. Levou cerca de 21,221 segundos e erro de 0,000023.

Tabela 4.6 – Problema 2 – Resultados numéricos com 21 elementos e 40 iterações

Deslocamentos nodais - Análise NÃO Linear							
Rotina Implementada - 20 iterações				Rotina Implementada - 40 iterações			
Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)
8	0,80373	-0,0015	-0,190424	3	0,82549	0,00569	-0,197236
22	0,74322	0,03655	-0,163616	4	0,78515	0,01145	-0,18026
Parâmetros Geométricos e Material utilizados							
E	2100000Pa		A	0,002 m ²		I	0,00005 m ⁴
Parâmetros do Modelo Estrutural							
Nós	22		Elementos	21		Graus de Liberdade	66

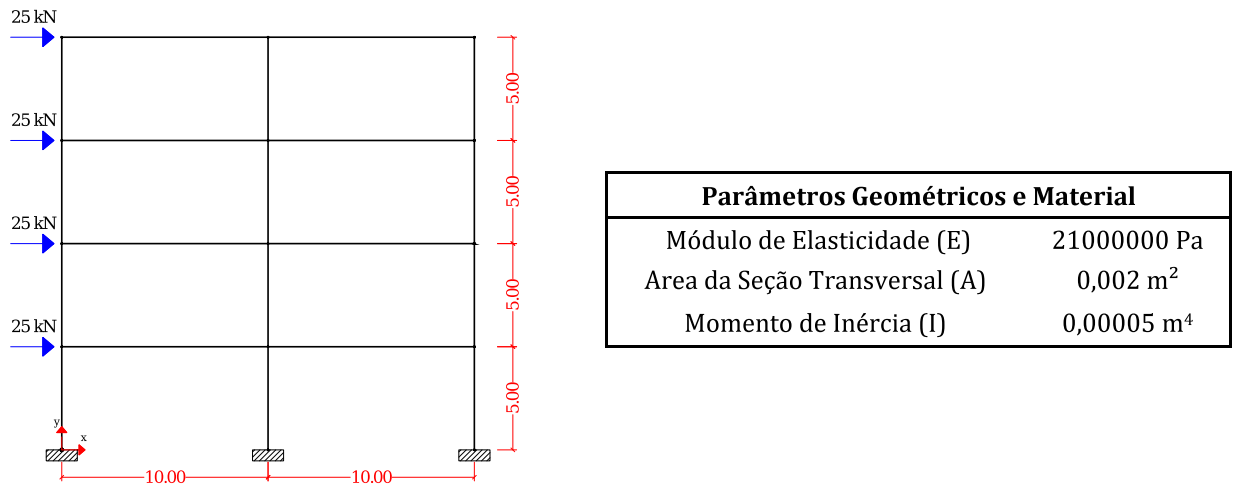
Fonte: (AUTOR, 2022)

Nota-se uma pequena melhora na convergência dos resultados dos deslocamentos verticais, no entanto houve imprecisão nos deslocamentos horizontais do nó 22. Conclui-se que a rotina necessita de revisão, e que os resultados se aproximam, mas de forma insatisfatória.

4.6 Problema 3 – Análise Não-Linear

O último problema proposto trata-se de um pórtico idêntico ao segundo problema analisado, utilizando-se duas versões do modelo, com 20 elementos (já analisado neste trabalho) e 160 elementos, com 20 iterações e tolerância de 1.10^{-7} .

Figura 4.18 – Problema 3 – Análise Não Linear



Fonte: (AUTOR, 2022)

Tabela 4.7 – Problema 3 – Resultados numéricos da análise linear com 20 elementos

Deslocamentos nodais - Análise Linear							
Rotina Implementada				MASTAN2			
Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)
5	2,637396	0,011019	-0,042801	13	2,637	0,01102	-0,0428
4	2,261724	0,010495	-0,084012	16	2,266	0,01049	-0,08401
3	1,592416	0,008842	-0,131414	7	1,592	0,00884	-0,1314
2	0,685433	0,005427	-0,153368	4	0,6854	0,00543	-0,1534
Parâmetros Geométricos e Material utilizados							
E	21000000 Pa		A	0,002 m ²	I	0,00005 m ⁴	
Parâmetros do Modelo Estrutural							
Nós	15	Elementos	20	Graus de Liberdade	45		

Fonte: (AUTOR, 2022)

Na análise não linear com 15 elementos e 20 iterações os resultados apresentaram certa discrepância. Levou cerca de 3,192 segundos e erro de 0,004097.

Tabela 4.8 – Problema 3 – Resultados numéricos da análise não linear com 20 elementos

Deslocamentos nodais - Análise NÃO Linear							
Rotina Implementada				MASTAN2			
Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)
5	2,95912	0,13826	-0,0611	13	2,611	-0,1727	-0,04312
4	2,48424	0,12423	-0,1032	16	2,235	-0,1592	-0,08409
3	1,71007	0,09763	-0,1489	7	1,571	-0,1167	-0,1309
2	0,71624	0,05765	-0,1627	4	0,6775	-0,0402	-0,1518
Parâmetros Geométricos e Material utilizados							
E	21000000 Pa		A	0,002 m ²	I	0,00005 m ⁴	
Parâmetros do Modelo Estrutural							
Nós	15	Elementos	20	Graus de Liberdade	45		

Fonte: (AUTOR, 2022)

Alterando-se dois parâmetros, a quantidade de elementos e iterações, foi possível chegar em resultados mais próximos quando comparados ao *software* MASTAN2. Após algumas tentativas, 7 iterações apresentou um tempo de 34,743 segundos. Os resultados com mais iterações não apresentaram diferenças significativas.

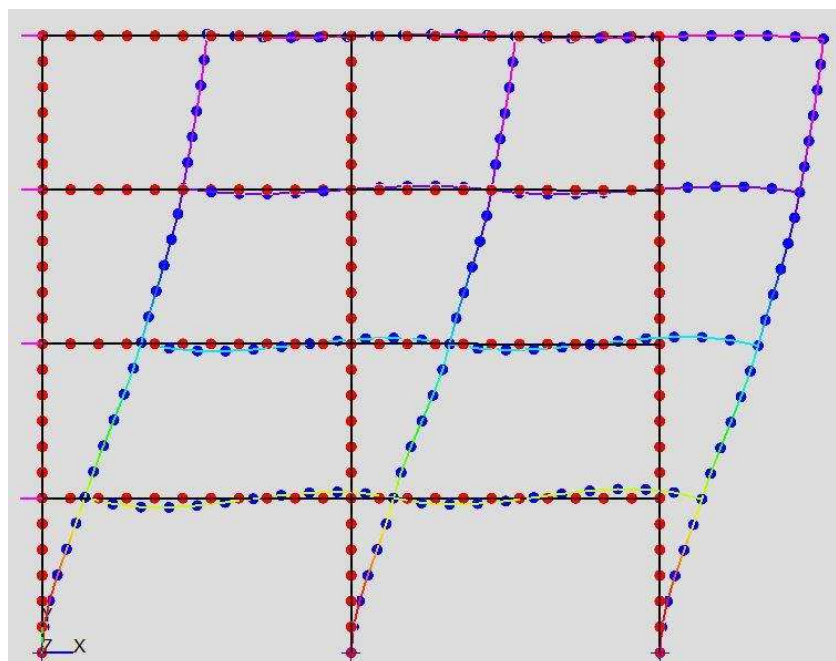
Os resultados da análise não linear abaixo trata-se do modelo com 155 elementos e 7 iterações. Novamente os resultados apresentaram uma perceptível melhora na proximidade nos deslocamentos horizontais e rotações, porém os deslocamentos verticais continuam a apresentar imprecisão.

Tabela 4.9 – Problema 3 – Resultados numéricos da análise não linear com 160 elementos

Deslocamentos nodais - Análise NÃO Linear							
Rotina Implementada				MASTAN2			
Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)	Nó	x(m)	y(m)	ϕ (rad)
25	2,66041	0,02806	-0,044559	13	2,611	-0,1727	-0,04312
19	2,27626	0,02532	-0,085519	16	2,235	-0,1592	-0,08409
13	1,59967	0,01977	-0,13248	7	1,571	-0,1167	-0,1309
7	0,68744	0,01129	-0,153875	4	0,6775	-0,0402	-0,1518
Parâmetros Geométricos e Material utilizados							
E	21000000 Pa		A	0,002 m ²	I	0,00005 m ⁴	
Parâmetros do Modelo Estrutural							
Nós	155	Elementos	160	Graus de Liberdade	465		

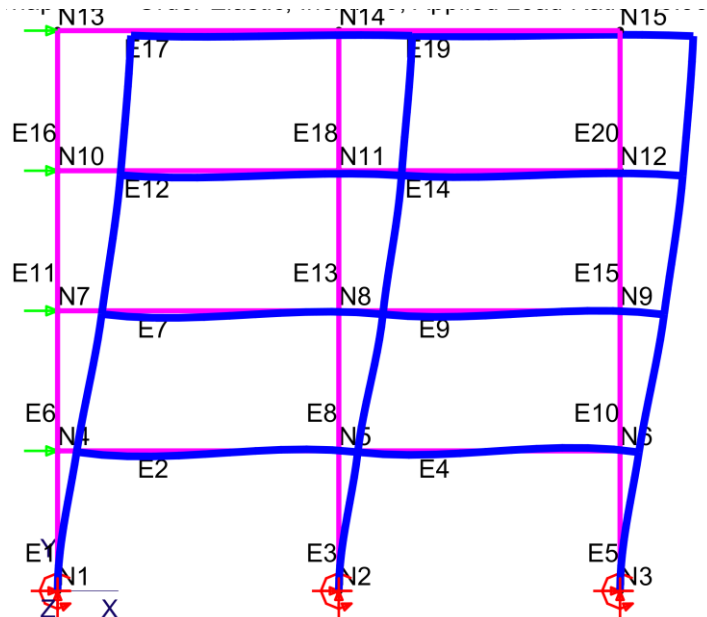
Fonte: (AUTOR, 2022)

Figura 4.19 – Problema 3 – Deformada da estrutura



Fonte: (AUTOR, 2022)

Figura 4.20 – Problema 3 – Deformada da estrutura *software* MASTAN2



Fonte: (AUTOR, 2022)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho consistiu, antes de apresentar e validar a rotina implementada, expor ao leitor a importância do estudo do comportamento não-linear em estruturas, tópico este não comentado durante o curso de graduação e que está presente inclusive em normas. A tratativa do tema durante o desenvolvimento do trabalho, buscou ser objetiva e intuitiva, apresentando as principais equações e quando possível, uma explicação física e prática, pois o tema em sua grande parte é bastante complexo.

Além do estudo voltado para a resistência dos materiais e análise estrutural, foi necessário ainda aliar a um conhecimento pouco explorado durante a graduação de engenharia civil, a programação computacional. Este aspecto do trabalho foi inteiramente estudado de forma independente pelos integrantes do trabalho, a fim de estabelecer uma sequência lógica para a resolução dos problemas propostos.

Dito isto, fica evidente que, o presente projeto serviu como uma excelente base de aprendizado, tanto na análise estrutural voltada para a engenharia civil, quanto na programação envolvida, reforçando assim, as bases dos conhecimentos adquiridos durante o curso.

Os objetivos do trabalho foram em parte alcançados. Quanto a análise linear, os resultados de deslocamentos e rotações obtidos apresentaram satisfatória convergência quando comparados aos resultados dos *softwares* Ftool e MASTAN2. O cálculo das reações, e esforços solicitantes axial, de flexão e cisalhante, não foram implementados na rotina, ficando, portanto,

como sugestão da continuidade do aperfeiçoamento do algoritmo até então escrito, pois são por meio destes esforços que os elementos estruturais são dimensionados na prática.

A respeito dos resultados obtidos nas análises não-lineares, de fato, esperava-se maior precisão. Foi realizado diversas revisões no código implementado, no entanto, nenhuma incongruência teórica e computacional foi encontrada, ficando portanto, como sugestão de trabalhos futuros, a adoção de outro método de solução de sistemas não lineares, como visto no item 2.7.4, trazendo assim um comparativo da precisão de cada método incremental-iterativo, pois como já dito, o método de Newton-Raphson não descreve com eficiência a trajetória de equilíbrio, isto é, curva carga-deslocamento que apresenta pontos limites (equilíbrio ou estacionariedade), podendo apresentar resultados insatisfatórios..

Por fim, o material apresentado neste trabalho serve como uma fonte inicial e básica do estudo da análise linear e não-linear geométrica (NLG), apresentando aspectos teóricos/físicos e computacionais que podem vir de interesse à futuras pesquisas acadêmicas.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118:2014 Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.
- ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A Base Da Tecnologia CAE**. ERICA, 2012.
- ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A Base Da Tecnologia CAE: análise não linear**. ERICA, 2012.
- ASSAN, Aloisio Ernesto. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2ed. Editora Unicamp, 2003.
- BELYTSCHKO, Ted; FISH, Jacob. **A first course in finite elements**. 1ed. John Wiley & Sons, 2007.
- CUNHA, Pedro Filipe de Luna. **Rotinas computacionais para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2017.
- F. TEIXEIRA, Dias. J. PINHO DA CRUZ, R. A. FONTES VALENTE. R. J. ALVES DE SOUSA. **Método dos Elementos Finitos. Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia**. 2ed, ETEP, 2018.
- GALVÃO, Alexandre da Silva. **Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, 2000.
- HUTTON, David V. **Fundamentals of Finite Element Analysis**. 1ed. McGraw-Hill, 2003.
- KASSIMALI, Aslam. **Matrix Analysis of Structures**. 2ed. Cengage Learning, 2011.
- KATTAN, Peter I. **MATLAB Guide to Finite Elements An Interactive Approach**. 2ed. 2007.
- KIMURA, Alio. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculos de edifícios com o uso de sistemas computacionais**. São Paulo, Pini, 2007.
- LOGAN, Daryl L. **First Course in the Finite Element Method**. 4ed. CL Engineering, 2006.

MARTHA, Luiz.F., **Análise de Estruturas. Conceitos e Métodos Básicos**. 2ed. Elsevier, 2010.

MARTHA, Luiz.F., **Notas de Aula: Métodos Básicos da Análise de Estruturas**, material disponível pela internet. 2010.

McGUIRE, W. & et all. **Matrix Structural Analysis**. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.

NAGARAJAN, Praveen. **Matrix Methods of Structural Analysis**. Chapman and Hall/CRC, 2018.

PARASKI, Natalie V. **Análise estática não linear de pórticos planos via MATLAB**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, 2012.

SEGNINI, Sandra Cristina de Agostini. **Estudo comparativo de formulações para a análise não-linear geométrica de treliças**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, 2000.

VAZ, Luiz Eloy. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. Elsevier, 2011.