

ESTUDO DO REFINAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS COM ELEMENTO FINITO Q4-ISOPARAMÉTRICO LINEAR

Cássia Carolina Santos Carneiro

Rio Verde, GO

2022

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
GOIANO – CAMPUS RIO VERDE**

BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

**ESTUDO DO REFINAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS
FINITOS COM ELEMENTO FINITO Q4-ISOPARAMÉTRICO LINEAR**

Cássia Carolina Santos Carneiro

Trabalho de curso apresentado ao Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcel Willian Reis Sales

Rio Verde, GO

Abril, 2022

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano

CC289e Carneiro, Cássia
ESTUDO DO REFINAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS
FINITOS COM ELEMENTO FINITO Q4-ISOPARAMÉTRICO LINEAR
/ Cássia Carneiro; orientador Marcel Willian Reis
Sales. -- Rio Verde, 2022.
52 p.

TCC (Graduação em Engenharia Civil) -- Instituto
Federal Goiano, Campus Rio Verde, 2022.

1. Deslocamento. 2. Discretização. 3. Análise
Numérica. I. Reis Sales, Marcel Willian , orient.
II. Título.

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Tese | <input type="checkbox"/> Artigo Científico |
| <input type="checkbox"/> Dissertação | <input type="checkbox"/> Capítulo de Livro |
| <input type="checkbox"/> Monografia – Especialização | <input type="checkbox"/> Livro |
| <input checked="" type="checkbox"/> TCC - Graduação | <input type="checkbox"/> Trabalho Apresentado em Evento |
| <input type="checkbox"/> Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Cássia Carolina Santos Carneiro

Matrícula: 2016102200840040

Título do Trabalho: ESTUDO DO REFINAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS COM ELEMENTO FINITO Q4-ISOPARAMÉTRICO LINEAR.

Restrições de Acesso ao Documento

Documento confidencial: Não Sim, justifique: _____

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: 29/04/2022

O documento está sujeito a registro de patente? Sim Não

O documento pode vir a ser publicado como livro? Sim Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Rio Verde, 21 de abril de 2022.

Cássia Carolina Santos Carneiro

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Ciente e de acordo:

Marcel William Reis Sade
Assinatura do(a) orientador(a)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Ata nº 27/2022 - GGRAD-RV/DE-RV/CMPRV/IFGOIANO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO

Ao(s) 13 dia(s) do mês de abril 2022, às 13 horas e 00 minutos, reuniu-se a banca examinadora composta pelos docentes: Marcel Willian Reis Sales, Wanderlei Malaquias Pereira Junior, Michell Macedo Alves, para examinar o Trabalho de Curso intitulado "Estudo do refinamento de malhas de elementos finitos com elemento finito q4-isoparamétrico linear" da estudante Cássia Carolina Santos Carneiro, Matrícula nº 2016102200840040 do Curso de Engenharia Civil do IF Goiano – Campus Rio Verde. A palavra foi concedida à estudante para a apresentação oral do TC, houve arguição da candidata pelos membros da banca examinadora. Após tal etapa, a banca examinadora decidiu pela APROVAÇÃO mediante as correções do texto. Ao final da sessão pública de defesa foi lavrada a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

(Assinado Eletronicamente)

Marcel Willian Reis Sales

Orientador(a)

Wanderlei Malaquias Pereira Junior

Membro Externo

(Assinado Eletronicamente)

Michell Macedo Alves

Membro

Observação:

() O(a) estudante não compareceu à defesa do TC.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Michell Macedo Alves**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 14/04/2022 17:58:16.
- **Flavio Hiochio Sato**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 14/04/2022 11:26:15.
- **Marcel Willian Reis Sales**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 13/04/2022 15:12:44.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 13/04/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 378690

Código de Autenticação: 3984380133



INSTITUTO FEDERAL GOIANO

Campus Rio Verde

Rodovia Sul Goiana, Km 01, Zona Rural, None, RIO VERDE / GO, CEP 75901-970

(64) 3620-5600

Cássia Carolina Santos Carneiro

**ESTUDO DO REFINAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS
FINITOS COM ELEMENTO FINITO Q4-ISOPARAMÉTRICO LINEAR**

Trabalho de Curso DEFENDIDO e APROVADO em _____, pela Banca Examinadora constituída pelos membros:

Prof. Dr. Michell Macedo Alves
Instituto Federal Goiano
(IF Goiano/Rio Verde)

Prof. Dr. Wanderlei Malaquias Pereira Junior
Universidade Federal de Catalão

Prof. Dr. Marcel Willian Reis Sales
Instituto Federal Goiano (IF Goiano/Rio Verde)

Rio Verde, GO

Abril, 2022

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, que fez com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudos.

Agradeço ao meu orientador Marcel Willian Reis Sales por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa.

A todos os meus professores do curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Rio Verde pela excelência da qualidade técnica de cada um.

Aos meus pais Geovany Ferreira Santos e Marcelo Pedrosa Carneiro que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória.

A todos os meus familiares por todo o apoio e pela ajuda, que muito contribuíram para a minha formação

Ao meu amigo Eduardo Augusto de Oliveira Mendes que sempre esteve ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este curso.

Por fim a todos os meus amigos que se fizeram presentes me apoiando durante todo o curso.

BIOGRAFIA DO ALUNO

Natural da cidade de Santa Helena de Goiás-GO, filha de Marcelo Pedrosa Carneiro e Geovany Ferreira Santos. Graduando em Engenharia Civil pelo Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde. Em 2020 começou um estágio na empresa Projeção Engenharia onde se aprofundou na execução de todos os tipos de projetos, porém percebeu uma afinidade maior com o projeto estrutural. Logo, com base nessa vivência despertou-se a vontade de continuar pesquisando a área de estruturas, para melhor entender a resolução de estruturas complexas. Busca, por meio da apresentação desse trabalho, a conclusão do bacharel em engenharia civil.

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO ÚNICO

Tabela 1- Resultados elemento viga	32
Tabela 2- Resultados elemento pórtico	34
Tabela 3- Resultados elemento torus 2D	36

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Solução aproximada através de malhas pelo MEF	16
Figura 2. Esquema do funcionamento geral do algoritmo do MEF	19
Figura 3. Elemento no sistema cartesiano e no sistema de coordenadas naturais	20
Figura 4. Elemento isoparamétrico de 8 graus de liberdade	21
Figura 5. Malha de elementos finitos do chassi de caminhão	22
Figura 6. Representação da deformação de uma ponte no refinamento	22

CAPÍTULO ÚNICO

Figura 1- Geometria do elemento viga	29
Figura 2 - Geometria do elemento pórtico	29
Figura 3- Geometria do elemento pórtico torus 2D	30
Figura 4- Fluxograma das funções do programa.....	31
Figura 5- Número de elementos x deslocamento do elemento viga	33
Figura 6- Número de elementos x erro do elemento viga	33
Figura 7- Refinamento do elemento viga com 20 elementos	34
Figura 8- Número de elementos x deslocamento do elemento pórtico	35
Figura 9- Número de elementos x erro do elemento pórtico	35
Figura 10- Número de elementos x deslocamento do elemento torus 2D	37
Figura 11- Número de elementos x erro do elemento torus 2D	37
Figura 14- Refinamento viga com 1 elemento	40
Figura 15- Refinamento viga com 2 elementos	40
Figura 16- Refinamento viga com 3 elementos	41
Figura 17- Refinamento viga com 4 elementos	41
Figura 18- Refinamento viga com 5 elementos	42
Figura 19- Refinamento viga com 6 elementos	42
Figura 20- Refinamento com viga 7 elementos	43
Figura 21- Refinamento com viga 8 elementos	43
Figura 22- Refinamento com viga 10 elementos	44
Figura 23- Refinamento com viga 15 elementos	44
Figura 24- Refinamento pórtico com 8 elementos	45
Figura 25- Refinamento pórtico com 14 elementos	46
Figura 26- Refinamento pórtico com 24 elementos	47
Figura 27- Refinamento pórtico com 56 elementos	48

Figura 28- Refinamento torus 2D com 8 elementos	49
Figura 29- Refinamento torus 2D com 16 elementos	50
Figura 30- Refinamento torus 2D com 32 elementos	51
Figura 31- Refinamento torus 2D com 64 elementos	52

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1 Método dos Elementos Finitos	15
2.1.1 Formulação	17
3.2 A Utilização de Ferramentas Computacionais em Estruturas	17
4.3 Linguagem Python	18
5.4 Elementos Finitos Isoparamétricos	19
6.5 Qualidade da malha	21
3 OBJETIVOS	23
3.1 Geral	23
3.2 Específicos	23
4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	24
CAPÍTULO ÚNICO	26
Resumo	26
Introdução	26
Referencial teórico	27
Método dos Elementos Finitos	27
Técnicas de alto desempenho voltadas ao Método de Elementos Finitos	28
Materiais e Métodos	28
Geometrias	28
Elemento viga	28
Elemento pórtico	29
Elemento torus 2d	30
Programa	30
Análise de deslocamento a partir do refinamento de malhas	31
Resultados e discussões	32
Elemento viga	32
Elemento pórtico	34
Elemento torus 2D	36
Conclusão	37
Agradecimentos	38
Referências	38

ÂPENDICE A	40
-------------------------	-----------

RESUMO

CARNEIRO, C. C. S. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Rio Verde – GO, 2022. **Estudo do refinamento de malhas de elementos finitos com elemento finito q4-Isoparamétrico linear.**

Orientador: Marcel Willian Reis Sales

Devido à forma complexa e condições de carregamento variáveis da maioria das estruturas estudadas em engenharia, torna-se inviável realizar cálculos nas estruturas com métodos analíticos tradicionais. Portanto, é necessário recorrer a soluções aproximadas para resolver essa problemática. Dessa forma, é utilizado o método dos elementos finitos (MEF). Esta pesquisa teve como foco mostrar o refinamento de malha de MEF usando o elemento Q4 – Isoparamétrico. Assim, foi utilizado o programa Método dos Elementos Finitos, dividido em 5 funções, sendo, função de leitura da estrutura, função de graus de liberdade da estrutura toda, criação da matriz de rigidez da estrutura, função para montagem do vetor de forças externas da estrutura e função para determinação de deslocamentos nodais. Em seguida, realizou-se o refinamento de forma gradual, no qual, o valor do deslocamento foi calculado através do MEF e comparado com a sua solução analítica, quando possível. Como resultado, os três casos estudados, viga, pórtico e torus 2D, mostra que quanto melhor for o refinamento da malha, em termos de quantidade e principalmente do posicionamento dos elementos finitos na malha, mais o valor do deslocamento se aproxima da solução exata. Dessa maneira, com o MEF, apesar de ter uma porcentagem de erro, pode-se obter resultados bem próximos da solução exata.

Palavras-chave: Deslocamento. Análise numérica. Elementos reticulados.

ABSTRACT

CARNEIRO, C. C. S. Federal Institute of Education, Science, and Technology of Goiás – Campus Rio Verde – GO, 2022. **Study of finite element mesh refinement with finite element q4-Linear isoparametric.**

Advisor: Marcel Willian Reis Sales

Due to the complex shape and variable loading conditions of most structures studied in engineering, it is impossible to perform calculations on structures with traditional analytical methods. Therefore, it is necessary to resort to approximate solutions to solve this problem. Thus, the finite element method (FEM) is used. This research focused on showing the mesh refinement of FEM using the Q4 – Isoparametric element. Thus, the program Finite Element Method, divided into 5 functions, being, function of reading the structure, function of degrees of freedom of the whole structure, creation of the matrix of rigidity of the structure, function for assembling the vector of external forces of the structure and function for the determination of nodal displacements. Then, the refinement was carried out gradually, in which the displacement value was calculated using the FEM and compared with its analytical solution, when possible. As a result, the three cases studied, beam, frame and 2D torus, show that the better the mesh refinement, in terms of quantity and especially the positioning of finite elements in the mesh, the closer the displacement value is to the exact solution. In this way, with the FEM, despite having an error percentage, it is possible to obtain results very close to the exact solution.

Keywords: Displacement. Numerical Analysis. Geometric elements.

1 INTRODUÇÃO

A Engenharia Estrutural começou a se desenvolver no século XIX, quando novos materiais como concreto, aço e ferro fundido foram usados na construção. A análise estrutural é de grande importância na engenharia de estruturas, originando-se da apresentação de uma ideia e culminando na apresentação de um projeto executivo. Ao mesmo tempo, são necessárias várias etapas de análise estrutural, buscando prever o comportamento dos componentes, sejam eles de concreto ou aço, para que atendam plenamente às condições de segurança no momento do projeto (MARTHA, 2017).

Embora existam métodos analíticos para cálculos estruturais, nem sempre é viável obter algumas variáveis, ou mesmo considerar alguns fatores, para correlacionar com tais modelos de forma convencional. Portanto, vários problemas encontrados na situação de campo não são analisados por simplificação, sendo necessário adotar alguns procedimentos que possam facilitar esta pesquisa, como o advento dos microcomputadores que possibilita a complexidade dos procedimentos envolvendo tais dimensões estruturais, agora considerando a interação dos vários elementos para aproximar o que acontece de uma forma mais realista (LEITE; ROCHA, 2017).

De acordo com Martha (2017), desde a década de 1960, os computadores têm aumentado gradativamente sua participação na engenharia como um fator importante nos cálculos estruturais, tornando-se um uso regular após o desenvolvimento de softwares de computador, o que é conveniente para escritórios de informática e empresas de consultoria.

Segundo Souto Filho (2002), o método dos elementos finitos é bem mais antigo que os computadores. Porém, não era utilizado antes pois tínhamos que fazer várias iterações para propor soluções para as equações diferenciais. Logo, como manualmente esse processo iria demorar muito, o método então só ganhou forças com a ideia dos computadores poder realizar as iterações em tempo recorde.

Vários programas de análise estrutural foram desenvolvidos, principalmente para treinamento de estudantes da área. Esses programas são projetados para ter a capacidade de resolver uma variedade de problemas, como análise de temperatura, movimento de suporte, análise não linear e muito mais. No entanto, grande parte do software produzido ainda possui interfaces de entrada e saída de dados na forma de texto (BORGES; SILVA; BEZERRA, 2016).

Além disso, grande parte desses programas tem acesso restrito, e nesses programas é necessária a obtenção de licença para uso. Conseqüentemente, o desenvolvimento de softwares

de código aberto vem crescendo recentemente, superando o impasse do alto valor de acesso, o que proporciona maior facilidade de uso.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Método dos Elementos Finitos

Para o estudo da mecânica estrutural na engenharia, fica claro que, em geral, a análise é baseada em estruturas simples aplicando métodos analíticos clássicos, segundo Alves Filho (2000), deslocamentos, deformações e tensões em todos os pontos da estrutura podem ser calculados. No entanto, devido à forma complexa e condições de carregamento variáveis da maioria das estruturas estudadas em engenharia, torna-se inviável realizar cálculos nas estruturas com métodos analíticos tradicionais. Portanto, é necessário recorrer a soluções aproximadas para resolver esses problemas de engenharia. Como resultado, surgiram vários métodos para resolver problemas práticos de engenharia, um dos quais é o método dos elementos finitos (MEF) (ALVES FILHO, 2000, p. 3).

No campo da engenharia, o método dos elementos finitos é aplicado em diversas áreas como análise de tensão, fluxo de calor, fluxo de fluido e eletromagnetismo por meio de simulação computacional (FISH; BELYTSCHKO, 2009, p.1).

A ideia básica do MEF é dividir uma estrutura, ou componente mecânico, ou geralmente, um corpo contínuo, em um número finito de partes, também chamadas de elementos, que são conectadas entre si por pontos discretos, chamados de nós. A conexão de diferentes elementos através de nós cria uma malha. A partir da geração desta malha, pode-se obter uma solução aproximada para cada elemento individual que compõe o contínuo (FISH; BELYTSCHKO, 2009, p.1; ALVES FILHO, 2000, p.11).

De acordo com a Figura 1 pode-se compreender melhor, de forma geral, o conceito do método dos elementos finitos. Considere uma placa com um furo central submetida a uma determinada carga e é necessário encontrar a tensão e o deslocamento em um determinado ponto. Usando métodos analíticos clássicos, o processo torna-se inviável e quase impossível de resolver. O problema é resolvido por uma solução aproximada, que pode ser obtida dividindo a estrutura ou objeto em várias partes pelo método dos elementos finitos, onde cada parte é chamada de elemento, e cada elemento possui vários nós. Como pode ser visto no exemplo da Figura 1, é utilizado um elemento triangular com três nós. Pode-se observar que em geometrias complexas, quanto menor o número de nós, menor a proximidade com a solução verdadeira. E,

quanto maior o número de nós, mais fina a malha, mais próxima da solução real. Isso é especialmente evidente na região do furo central da placa na Figura 1. Na parte inferior esquerda da imagem, há uma grade grosseira na qual os orifícios circulares não são definidos com precisão. Portanto, devido à deformação geométrica, a solução não será muito próxima da solução exata. No canto inferior direito da imagem, o número de nós é maior e o furo está muito próximo de um círculo, o que aproxima a solução da solução exata. (FISH; BELYTCHKO, 2009).

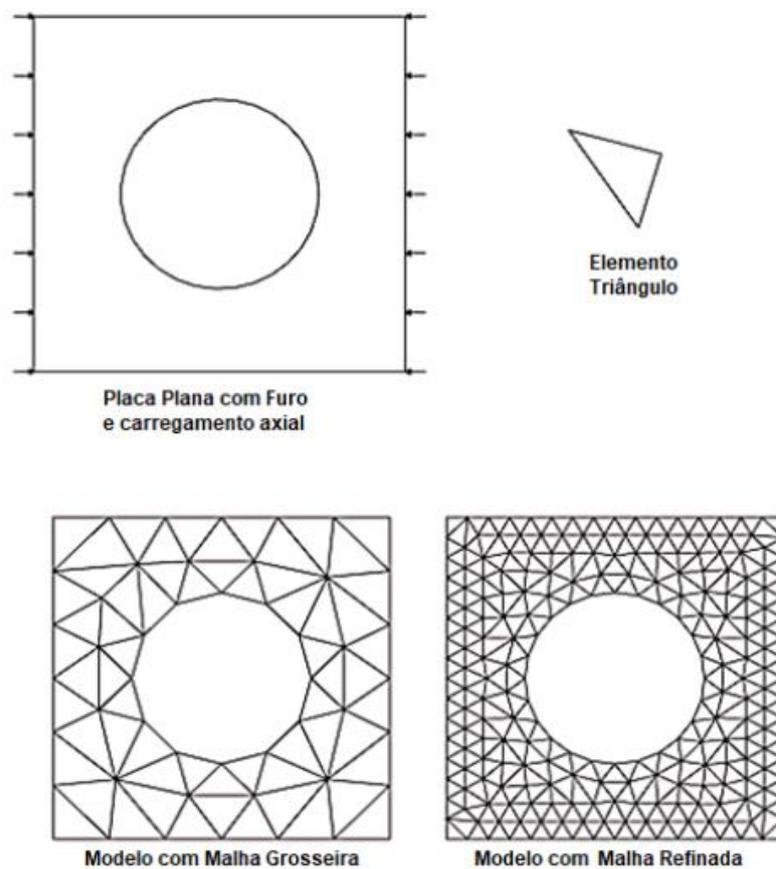


Figura 1. Solução aproximada através de malhas pelo MEF.

Fonte: Fish (2009, p.2).

De modo geral, no MEF, as estruturas podem ser discretizadas por elementos em malha ou por elementos continuamente conectados. Em elementos reticulados como vigas contínuas, pórticos planos, pórticos espaciais, grelhas e treliças, a interação entre os elementos é causada apenas por juntas ou nós, ou seja, as forças entre eles ocorrem apenas nesses pontos. Para elementos estruturantes conectados continuamente, como elementos triangulares ou

quadriláteros, as interações podem ocorrer não apenas por meio de nós, mas também por partes do elemento compartilhado, como arestas (ALVES FILHO, 2000, p.12 e 13).

Malha é o nome para a discretização do domínio de um sistema de elementos finitos. Em geral, uma malha mal refinada está mais longe de uma solução analítica, enquanto uma malha excessivamente refinada cria um custo computacional desnecessariamente caro para a análise (DE TROYA; TORTORELLI, 2018).

As cargas aplicadas no modelo estrutural são traduzidas em tensões e deslocamentos nos nós, desde as propriedades geométricas de cada elemento até as propriedades do material. Um elemento é o nome da "parte" do domínio cujo comportamento a equação controla. Nós são pontos onde o deslocamento e outras propriedades relevantes do elemento realmente existem, no caso de elementos de viga. Geralmente, os atributos são obtidos em um nó, e o resultado é obtido por interpolação ao longo do elemento, dependendo dos valores em outros nós. A forma como essa interpolação é feita geralmente é um recurso exposto no elemento. Por exemplo, se um atributo é interpolado linearmente entre um nó e outro, o elemento é chamado de elemento linear, em alusão à sua forma interpolada (BARBOSA, 2020).

2.1.1 Formulação

Métodos de elementos finitos são baseados em matriz e álgebra variacional. Em uma estrutura de malha, os elementos unidimensionais (molas, treliças e vigas) são conectados por nós, localizados nas extremidades. As forças externas são aplicadas apenas aos nós e os deslocamentos são expressos como deslocamentos nodais. Portanto, a relação linear geral entre todas as forças externas e deslocamentos nodais pode ser expressa em notação matricial, verificado na Equação 1 (ALVES FILHO, 2000, p.18):

$$\{F\} = [K] \times \{U\} \quad \text{Eq. 1}$$

Sendo que:

$\{F\}$ = Vetor com as cargas nodais;

$[K]$ = Matriz rigidez global;

$\{U\}$ = Vetor com os deslocamentos nodais.

2.2 A Utilização de Ferramentas Computacionais em Estruturas

Faria (2009) afirma que ferramentas computacionais de fácil acesso e processamento com suficiente precisão, devem ser inseridas em ambientes acadêmicos para permitir a

introdução de dados com pequenos requisitos de tempo e a geração de modelos com esforço e deslocamento detalhados.

Segundo Borges, Silva e Bezerra (2016), o Ftool é um dos programas cada vez mais utilizados para cálculos estruturais nas universidades devido à sua interface de fácil compreensão. Outras linguagens conhecidas são Python, C e Fortran, as duas últimas apresentando velocidade de desenvolvimento mais rápida que a primeira.

O software *Matlab* também é amplamente utilizado, fornecendo uma extensa biblioteca de funções predefinidas para tornar a programação mais eficiente e prática. Portanto, programas podem ser facilmente escritos e modificados usando a implementação da linguagem *Matlab*, que por si só é uma alternativa viável (CHAPMAN, 2003).

Nessa pesquisa foi utilizado o COLAB, que permite escrever e executar código Python.

2.3 Linguagem Python

Para a construção do código MEF, primeiro é necessário escolher uma linguagem de programação. Nesse sentido, a linguagem Python se mostra uma alternativa, pois está consolidada no mercado e possui aplicações na educação, engenharia, ciência e negócios (FOUNDATION, 2020).

Essa linguagem foi escolhida devido às suas características avançadas, orientação a objetos, tipagem dinâmica e forte, principalmente por sua facilidade de aprendizado. Além disso, Python é open source, uma das linguagens de programação mais populares do mundo, com alto engajamento de usuários em fóruns e comunidades, e acesso às mais diversas bibliotecas (FOUNDATION, 2020).

Portanto, para construir o código na linguagem de escolha, é importante entender o significado do fluxo de informações de entrada e saída para cada pergunta, conforme mostrado na Figura 2.

O algoritmo consiste em três etapas distintas, chamadas de "Pré-Processamento", "Solução" e "Pós-Processamento".

A etapa de "pré-processamento" consiste em obter o problema contínuo, ou seja, a forma discreta do problema, em condições adequadas ao método dos elementos finitos. Depois de definir as propriedades geométricas e mecânicas da estrutura, apoios e cargas, o trabalho realmente tem início em Python.

Em seguida, a fase de "solução" inclui então o desenvolvimento da função de forma, a análise das matrizes fundamentais de rigidez e carregamento, a montagem das matrizes globais

de rigidez e carregamento, a aplicação das condições de contorno e a obtenção dos deslocamentos nodais $\{u\}$.

A etapa final, "pós-processamento", processa a solução e obtém resultados em função do deslocamento, como tensão de Von Mises e energia de deformação.

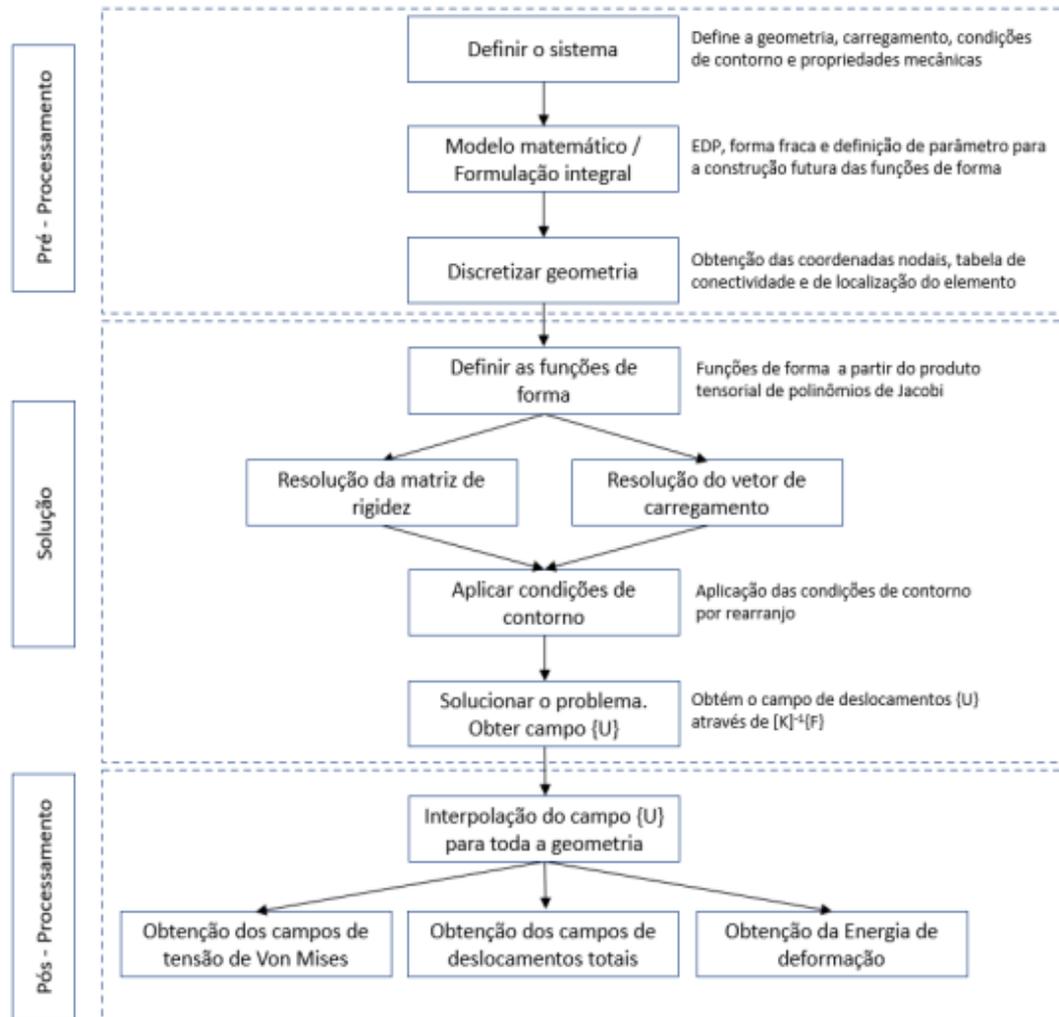


Figura 2. Esquema do funcionamento geral do algoritmo do MEF

Fonte: (VERUZ, 2020).

2.4 Elementos Finitos Isoparamétricos

No método dos elementos finitos, uma série de funções são necessárias para interpolar a geometria e as quantidades a serem obtidas. Com essas funções, uma transformação (Fig. 3) pode ser realizada para mapear o elemento distorcido para o sistema de coordenadas (coordenadas naturais ξ e η), onde ele se torna regular (BECKER et al., 1981).

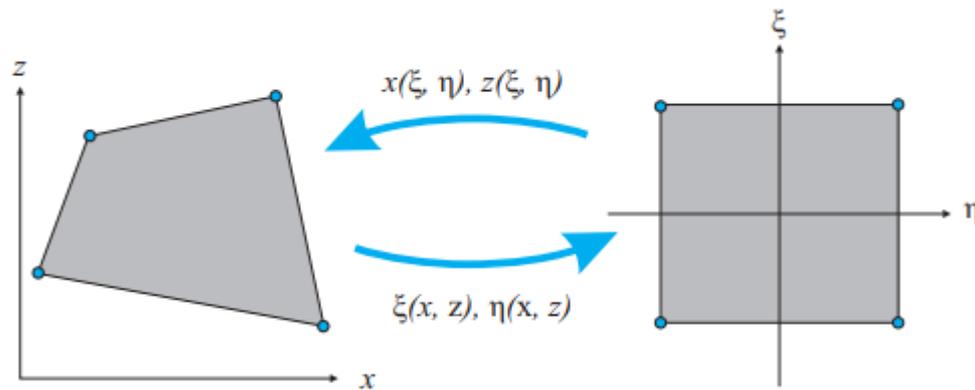


Figura 3. Elemento no sistema cartesiano e no sistema de coordenadas naturais.
Fonte: BECKER et al. (1981).

Assim, assumindo um problema de elementos finitos onde a forma do elemento é definida com nós, então a geometria no sistema de coordenadas natural, neste caso, pode usar a função de forma ($\phi_i(\xi, \eta)$) no mesmo domínio, e as posições de cada nó (ASSAN, 2003).

Portanto, elementos finitos isoparamétricos são caracterizados por realizarem transformações no sistema de coordenadas para facilitar operações numéricas em um determinado elemento torcido. Porque nesta técnica, a função de forma usada na interpolação geométrica é a mesma que na aproximação de grandezas físicas.

O nome isoparamétrico deriva do fato de que a geometria desses elementos é representada em termos das coordenadas de seus nós, usando a mesma função de interpolação para expressar os deslocamentos dos elementos em termos de deslocamentos nodais. Portanto, para que existam elementos isoparamétricos, o número de coordenadas de forma deve ser igual ao número de coordenadas de deslocamento. Por exemplo, para um elemento sólido, existem três coordenadas de forma (x, y, z) e três coordenadas de deslocamento (u, v, w). Elementos lineares possuem arestas retas, mas elementos quadráticos e isoparamétricos de ordem superior podem ter arestas curvas, o que os torna mais comumente usados em estruturas curvas (ROSSI, 1987).

Um elemento q possui 8 graus de liberdade, é mapeado em coordenadas naturais para coordenadas geométricas, e é isoparamétrico pois, o mesmo vetor de forma é usado para interpelar o campo deslocamento e as coordenadas do natural para o geométrico (Figura 4).

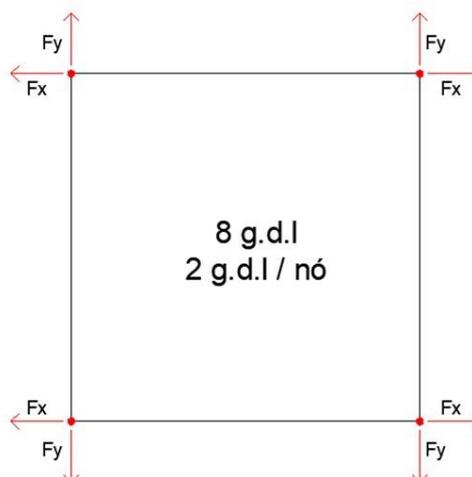


Figura 4. Elemento isoparamétrico de 8 graus de liberdade.

Fonte: Autoria própria.

2.5 Qualidade da malha

A malha expressa a divisão dos elementos no objeto de estudo por meio de equações, o que garante a medição de múltiplos pontos. Portanto, a precisão da qualidade da malha dependerá da modelagem, geração da malha e outros recursos empregados na simulação (LO; LEE, 1997).

A malha representa uma união de subdivisões de elementos, portanto a eficiência da malha dependerá da adaptação do refinamento feito. Esta melhoria depende da operação aritmética, que é proporcional ao elemento finito. As malhas representam muitos tipos de modelagem, especialmente triângulos, quadriláteros, hexaedros, entre outros (OWEN, 1998).

Muthukrishnan; Nambiar; Lawrence (1995), ressalta que é possível fazer uma malha sobre todo o corpo, para superfícies menos complexas, sem afetar significativamente o tempo de análise, mas no caso de superfícies complexas, deve-se realizar um refinamento de áreas específicas de maior importância, como curvas, pontos de interseção e descontinuidades.

De acordo com o sistema computacional de Lo; Lee (1997) divide-se o refinamento em três etapas, a saber: análise modular de elementos finitos, erro de estimativa e geração da modelagem.

O refinamento é uma ferramenta importante porque define como os elementos são subdivididos, portanto, escolher o refinamento correto afetará a qualidade da malha.

A densidade de refinamento dependerá de cada nó utilizado e gerado pela análise, e a densidade deve ter uma razão menor que 1, caso contrário ocorrerá um erro de estimativa inicial (MUTHUKRISHNAN; NAMBIAR; LAWRENCE, 1995).

Portanto, vale ressaltar que a adaptação da malha afeta a precisão e a complexidade do refinamento. Seu desempenho pode ser verificado por uma curva que analisa a taxa de convergência dos elementos finitos, estimada por erro (LO; LEE, 1997).

Depois que um refinamento é definido, suas subdivisões são estudadas, isso só é necessário se a razão de refinamento for maior que 1. Basicamente, ele vai pegar o elemento com a maior aresta, subdividi-lo e gerar um nó, depois pegar o elemento que agora tem a maior aresta, repetir o processo, e esse processo em sequência até que a taxa de refinamento seja menor ou igual a 1, com base nas necessidades (MUTHUKRISHNAN; NAMBIAR; LAWRENCE, 1995).

A Figura 5 apresenta a malha de elementos finitos que foi gerada em um software de MEF demonstrando formas conhecidas para estudos de cálculo.



Figura 5. Malha de elementos finitos do chassi de caminhão.

Fonte: STORCK, 2000.

A Figura 6 lustra a imagem contendo a magnitude do deslocamento modal de uma treliça.

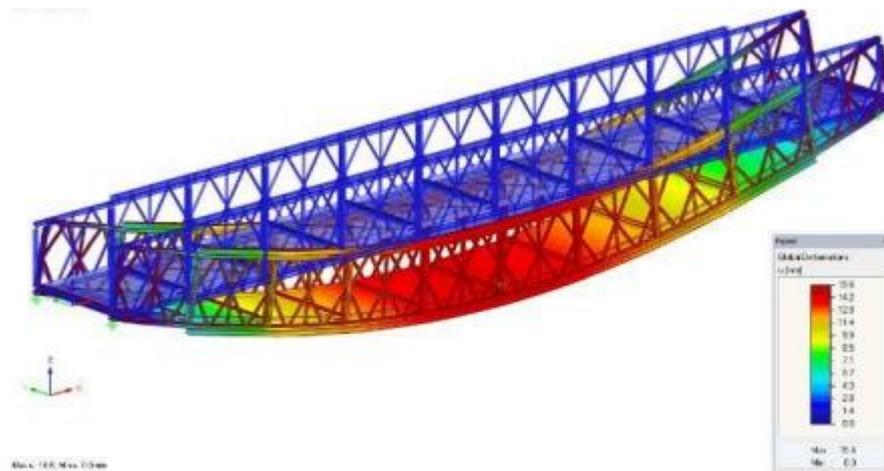


Figura 6. Representação da deformação de uma ponte no refinamento.

Fonte: HANK, 2001.

3 OBJETIVOS

3.1 Geral

Estudo do refinamento de malha de MEF usando o elemento Q4 – Isoparamétrico Linear.

3.2 Específicos

- Analisar três diferentes geometrias (viga, pórtico e torus 2D);
- Analisar o deslocamento dos sólidos através do refinamento da malha;
- Executar o programa Método dos Elementos Finitos seguindo as seguintes funções: Leitura da estrutura, graus de liberdade, matriz rigidez da estrutura, montagem do vetor de forças externas da estrutura, determinação dos deslocamentos nodais e esforços ao longo da estrutura;
- Verificar a diferença dos deslocamentos resultantes através da comparação dos resultados analíticos e do programa MEF (Metodo dos Elementos Finitos);
- Analisar a convergência dos resultados.

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. São Paulo: Editora Érica, 2000.

ANSYS. **About Ansys**. 2020. Disponível em: <https://www.ansys.com/about-ansys>.

ASSAN, A.E. **Método dos elementos finitos - primeiros passos**. São Paulo: Unicamp, 2003.

BECKER, E.B.; CAREY, G.F.; ODEN, J.T. **Finite elements: an introduction**. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.

BORGES, A. B.; SILVA, S. S.; BEZERRA, A. B. B. **Estudo de treliças planas e espaciais utilizando a linguagem de programação python e o software vtk** In. XXXVII Iberian LatinAmerican Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, Brasília, DF. Anais... Brasil. 2016.

CHAPMAN, S. J., 2003. **Programação em MATLAB para Engenheiros**. 2 ed. São Paulo: Cengage Learning.

DE TROYA, M. A. S., TORTORELLI, D. A. “Adaptive mesh refinement in stress-constrained topology optimization”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 58, n. 6, pp. 2369–2386, out. 2018. doi: 10.1007/s00158-018-2084-2.

FARIA, A. **Uma nova abordagem na utilização de ferramentas computacionais no ensino de conteúdos da disciplina estruturas de concreto em cursos de engenharia civil**. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

FISH, J. J; BELYTSCHKO, T. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. Rio de Janeiro. Editora LTC, 2009.

FOUNDATION, P. S. **About Python**. 2020. Disponível em: <https://www.python.org/about/>.

LEITE, M.; ROCHA, C. R. M. Aplicações práticas com Scilab – Uma abordagem didática. **Revista Profissão Docente online**, v.17, n.36, p. 66-74, Uberaba, 2017.

LO*, S. H.; LEE, C. K... Selective regional refinement procedure for adaptive finite element analysis. *Comput Struct, Hong Kong*, v. 68, p.325-341, 8 Jan. 1997. Disponível em: http://ac.els-cdn.com.ez48.periodicos.capes.gov.br/S0045794998000868/1-s2.0-S0045794998000868-main.pdf?_tid=e8865e08-eca3-11e3-b6d8-00000aacb361&acdnat=1401967627_628a87fbaef8b63816b4215b81be7f5. Acesso em: 31 març. 2022.

MARTHA, L. F. (ed.). **Análise de estruturas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017. 600 p. v. 1.

MUTHUKRISHNAN*, S N; NAMBIAR+, R V; LAWRENCE, K L. Applications Refinement of 3D meshes at surface intersections. *Comput Aided Design*, Great Britain, v. 27, n. 8, p.637-645, 1995. Disponível em:

[http://ac.els-cdn.com.ez48.periodicos.capes.gov.br/001044859599800N/1-s2.0-001044859599800N-main.pdf?_tid=729af65e-eca3-11e3-a7d4-](http://ac.els-cdn.com.ez48.periodicos.capes.gov.br/001044859599800N/1-s2.0-001044859599800N-main.pdf?_tid=729af65e-eca3-11e3-a7d4-00000aacb362&acdnat=1401967429_3f102ebe482b51dfc4ce620908dab767)

[00000aacb362&acdnat=1401967429_3f102ebe482b51dfc4ce620908dab767](http://ac.els-cdn.com.ez48.periodicos.capes.gov.br/001044859599800N/1-s2.0-001044859599800N-main.pdf?_tid=729af65e-eca3-11e3-a7d4-00000aacb362&acdnat=1401967429_3f102ebe482b51dfc4ce620908dab767). Acesso em: 31 mar. 2022.

OWEN, S.J., A survey of unstructured mesh generation technology, in: *Proc. 7th Internat. Meshing Roundtable*, Dearborn, MI, USA, October 1998.

SOUTO FILHO, M. V. **Modelagem Numérica de Reforço Estrutural em Vigas de Concreto Armado**. 2002. 124 f. Dissertação (Mestrado em estruturas). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2002.

VERUZ, E. G. **Método dos elementos finitos utilizando funções de forma de alta ordem aplicadas em estruturas em estado plano de tensão**. 87f. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Guarapuava.

CAPÍTULO ÚNICO

(Normas de acordo com a Revista Ambiente Construído)

Estudo do refinamento de malhas de elementos finitos com elemento finito q4-isoparamétrico linear

Study of finite element mesh refinement with linear finite element q4-isoparametric

Resumo

Este artigo teve como foco mostrar o refinamento de malha de métodos dos elementos finitos (MEF) usando o elemento Q4 – Isoparamétrico. Assim, foi utilizado o programa Método dos Elementos Finitos, dividido em 5 funções, sendo, função de leitura da estrutura, função de graus de liberdade da estrutura toda, criação da matriz de rigidez da estrutura, função para montagem do vetor de forças externas da estrutura e função para determinação de deslocamentos nodais. Em seguida, realizou-se o refinamento de forma gradual, no qual, o valor do deslocamento foi calculado através do MEF e comparado com sua solução analítica, quando possível. Como resultado, observando os três casos estudados, viga, pórtico e torus 2D, mostra que quanto melhor for o refinamento da malha, em termos de quantidade e principalmente do posicionamento dos elementos finitos na malha, mais o valor do deslocamento se aproxima da solução exata. Dessa maneira, com o MEF, apesar de ter uma porcentagem de erro, pode-se obter resultados bem próximos da solução exata.

Palavras-chave: Deslocamento. Discretização. Análise Numérica.

Abstract

This article focused on showing the mesh refinement of finite element methods (FEM) using the Q4 – Isoparametric element. Thus, the program Finite Element Method, divided into 5 functions, being, function of reading the structure, function of degrees of freedom of the whole structure, creation of the matrix of rigidity of the structure, function for assembling the vector of external forces of the structure and function for the determination of nodal displacements. Then, the refinement was carried out gradually, in which the displacement value was calculated using the FEM and compared with its analytical solution, when possible. As a result, observing the three cases studied, beam, frame and 2D torus, shows that the better the mesh refinement, in terms of quantity and especially the positioning of finite elements in the mesh, the closer the displacement value is to the exact solution. In this way, it is expected that with the FEM, despite having an error percentage, it is possible to obtain results very close to the exact solution.

Keywords: Displacement. Discretization. Numerical Analysis.

Introdução

Engenheiros e projetistas são frequentemente desafiados a resolver uma variedade de problemas, dos mais simples aos mais complexos. É de responsabilidade do profissional, principalmente na área de cálculos estruturais, utilizar todos os equipamentos matemáticos,

teóricos e práticos necessários para garantir o sucesso da análise e prevenir possíveis falhas no projeto (FILHO, 2013).

Para os engenheiros desenvolverem com sucesso o cálculo estrutural, eles precisam ter conhecimento de tudo o que envolve a análise, ou seja, parte matemática (equações diferenciais), parte teórica (resistência do material, teoria da elasticidade, etc.), inclusive, que entendam o comportamento das estruturas. Em geral, soluções exatas para os problemas mais simples podem ser obtidas por métodos analíticos clássicos, porém, a maioria dos casos requer métodos mais sofisticados (BUDYNAS; MISCHKE; SHIGLEY, 2005).

É aí que entra o Método dos Elementos Finitos ou MEF, que pode gerar resultados aproximados de tensão, deslocamento e deformação estrutural, levando a uma aplicação mais ampla na engenharia e produzindo resultados satisfatórios (FILHO, 2013).

A ideia básica do MEF é subdividir o domínio a ser analisado (contínuo) em subdomínios de dimensões finitas, chamados elementos, conectados entre si em pontos chamados nós (ALVES, 2007). Cada elemento exibe as mesmas propriedades de um meio contínuo e é analisado separadamente, e seus resultados são combinados para obter um resultado de domínio global.

Este método pode ser muito preciso, dependendo das dimensões do domínio e do número de nós e elementos. Quanto menor o tamanho do domínio e quanto maior o número de elementos que ele subdivide, mais preciso será o resultado. Além disso, existe um conceito muito importante sobre graus de liberdade, que se refere a possíveis movimentos translacionais e rotacionais relativos a um ponto ou corpo rígido. O número de graus de liberdade em cada nó afeta o comportamento de cada elemento (SOUZA, 2003).

É importante notar que o método de elementos finitos fornece soluções aproximadas usando equações polinomiais simples, geralmente lineares, quando mais quadráticas, dentro de cada elemento (subdomínio) (SOLIANO; LIMA, 2003).

A precisão dessa aproximação é dada diretamente pela proporção de seus elementos, quanto maior o elemento, maior o erro de correlação, portanto, quanto menor o elemento e, portanto, quanto maior o número de elementos (subcampos), mais próximo do resultado analítico, atingirá sua aproximação, convergindo assim para a solução exata (BORGES; MADONA, 2019).

Malhas de elementos finitos são processadas em uma variedade de aplicações usando o método de elementos finitos, uma técnica amplamente utilizada para resolver computacionalmente equações diferenciais parciais (HUGHES, 2012). A grade corresponde à discretização geométrica do domínio, subdividindo-o em pequenas partes, denominadas elementos, que representam um domínio contínuo do problema de interesse. Devido à repetida necessidade de resultados mais precisos, grades mais finas, ou seja, grades com maior discretização espacial, são essenciais. No entanto, o processamento dessas grades no tempo requer o uso de técnicas de otimização na definição da estrutura de armazenamento e dos algoritmos que nela operam. Diante desse contexto, este artigo trata do refinamento de malha de MEF usando o elemento Q4 – Isoparamétrico.

Referencial teórico

Método dos Elementos Finitos

Para Moraes (2015), o MEF baseia-se na discretização de domínios, que podem ter geometrias irregulares arbitrárias, resultando em elementos polinomiais elementares cujo comportamento

aproximado da estrutura pode ser alcançado resolvendo aproximações em seus nós, como um todo.

Para representar a deformação da estrutura, o MEF é baseado no método RayleighRitz. Segundo Assan (1996), o método determina expressões conhecidas para representar a forma deformada da estrutura. Geralmente são funções polinomiais ou trigonométricas chamadas aproximações de deslocamento ou funções de forma.

Então, se tratando de uma estrutura mais complexa, é necessário fazer uma discretização maior dessa estrutura para obter resultados mais realistas, no entanto, é mais demorado a resolução do problema.

Segundo Moraes (2015), ao utilizar o método dos elementos finitos, sempre que possível, dependendo da natureza dos elementos, uma solução aproximada satisfatória deve ser alcançada com o menor número de elementos possível. Isso deve ser feito para economizar recursos computacionais e ainda obter resultados realistas. Por esta razão, estudos de convergência de malhas são essenciais para análise com MEF.

Técnicas de alto desempenho voltadas ao Método de Elementos Finitos

Com o método dos elementos finitos (MEF), vários problemas físicos de interesse modelados por equações diferenciais parciais podem ser resolvidos. Como em qualquer método numérico, a precisão do MEF também está relacionada à resolução da malha usada na discretização do domínio real. (SILVA; CAMATA, 2021).

Em aplicações típicas de elementos finitos, percorrer uma lista de elementos para montar um sistema de equações algébricas e suas soluções subsequentes é a operação mais comum. Essas etapas precisam ser otimizadas. Em malhas com alta resolução espacial, o uso do poder dos supercomputadores e o desenvolvimento de algoritmos paralelos escaláveis tornaram-se necessários para manter os tempos de execução dos métodos em níveis razoáveis. Nesse sentido, devem ser consideradas as técnicas de computação de alto desempenho que empregam abordagens destinadas a melhorar a localidade de dados dentro de hierarquias de memória e processamento em sistemas *multithread* e distribuídos (SILVA; CAMATA, 2021).

Materiais e Métodos

Geometrias

Neste artigo foi feito o estudo com 03 elementos estruturais com diferentes geometrias, sendo eles: viga, pórtico e torus 2D. Todas as geometrias foram consideradas compostas por concreto, portanto os valores do módulo de elasticidade (ϵ), coeficiente de Poisson (ν) e alpha (α) foram, respectivamente, $\epsilon= 200000$ Mpa, $\nu= 0,2$ e $\alpha= 0,00010/^\circ\text{C}$. Todo o refinamento das malhas está demonstrado no Apêndice A.

Elemento viga

A primeira geometria estudada foi a viga de concreto com comprimento de 1000 mm, altura de 200 mm e largura de 50 mm. Esta viga possui travamento de dois apoios de segundo gênero, cujas coordenadas são (0.0;0.0) – nó 2 e (0.0;200) – nó 1. Além disso, na extremidade da viga,

está aplicada uma força na direção Y de 10000 N, na coordenada (1000;200) – nó 4 como mostrado na Figura 1.

O valor de deslocamento será retirado na extremidade oposta à força aplicada, ou seja, na coordenada (1000;0.0) – nó 3.

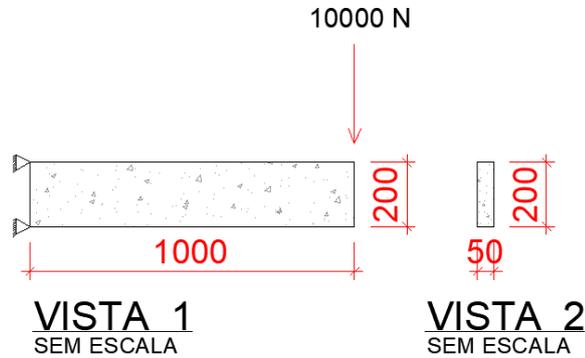


Figura 1- Geometria do elemento viga

Fonte: Autoria própria.

Elemento pórtico

O elemento pórtico apresenta as seguintes dimensões: comprimento de 2000 mm, altura de 2000 mm e largura de 500 mm. Possui travamento de 4 apoios de 2 gênero cujas coordenadas são (0.0;0.0) – nó 1, (200;0.0) – nó 2, (1800;0.0) – nó 15 e (2000;0.0) – nó 16. Por fim, no canto superior esquerdo está aplicada uma força de 10000 N na direção X, coordenada (0.0;1900) – nó 5, como é mostrado na Figura 2.

O valor de deslocamento será retirado na extremidade oposta à força aplicada, ou seja, na coordenada (2000;1900) – nó 12.

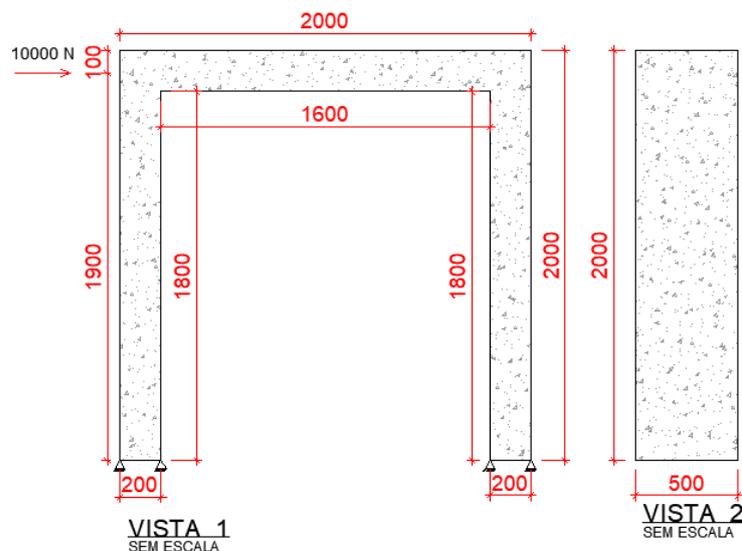


Figura 2 - Geometria do elemento pórtico

Fonte: Autoria própria

Elemento torus 2d

O elemento torus 2D apresenta as seguintes dimensões: diâmetro externo de 1600 mm, diâmetro interno de 800 mm e largura de 200 mm. Possui travamento de 3 apoios de 2 gênero, cujas coordenadas são (0.0;800) – nó 8, (235;235) – nó 7 e (235;1370) – nó 1 e uma força de 10000 N aplicada na direção Y na coordenada (1360;1360) – nó 3, conforme Figura 3.

O valor de deslocamento será retirado na extremidade oposta à força aplicada, ou seja, na coordenada (1360;235) – nó 5.

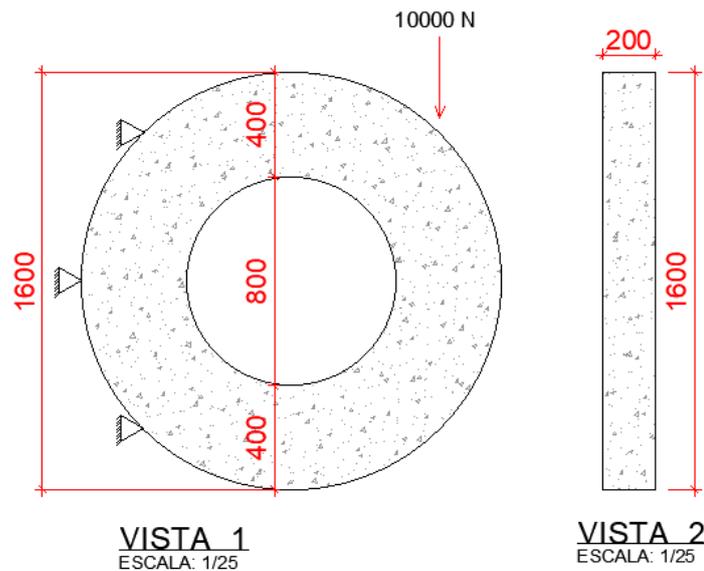


Figura 3- Geometria do elemento pórtico torus 2D

Fonte: Autoria própria

Programa

Para o estudo deste artigo, foi utilizado o programa Método dos Elementos Finitos.

Este programa é dividido em cinco funções principais, são elas: função de leitura da estrutura (L.D.), função de graus de liberdade da estrutura toda (G.D.L.), criação da matriz de rigidez da estrutura, função para montagem do vetor de forças externas da estrutura e função para determinação de deslocamentos nodais.

Na primeira função é feita toda a entrada de dados da estrutura, ou seja, é feita a definição das propriedades básicas do elemento, definição do tipo de estrutura, quantidade de nós, coordenadas dos nós, propriedades do material (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e valor de alpha), condições de contorno e forças externas.

Na segunda função ocorre a definição dos graus de liberdade da estrutura, onde utiliza a matriz de restrições de apoio, para definir quantos graus de liberdade existem na estrutura e quais nós estão restringidos, dessa forma, calcula quantas equações terá o cálculo.

Na terceira função é criada a matriz de rigidez sem as restrições, de acordo com o número de equações descobertas na função de definição dos graus de liberdade e com os dados fornecidos na entrada de dados.

Na quarta função é definido a montagem do vetor de forças externas da estrutura baseado nas informações obtidas nos três passos anteriores.

Por fim, na quinta função, encontra-se o vetor deslocamento nodal através da multiplicação da inversão da matriz da rigidez pelo vetor de forças. O programa pode ser encontrado no seguinte endereço: <https://github.com/marcelwillianreis/Programa-MEF-python-estruturado>.



Figura 4- Fluxograma das funções do programa

Fonte: Autoria própria

Análise de deslocamento a partir do refinamento de malhas

A análise do deslocamento consiste basicamente em calcular os valores dos deslocamentos resultantes da força aplicada em cada um dos elementos estruturais e comparar esses resultados com os valores analíticos da viga e do pórtico. No caso da torus 2D, não existe equação analítica para cálculo do deslocamento, portanto comparou-se os deslocamentos entre si.

Inicialmente foi feito o refinamento da malha, ou seja, as geometrias foram divididas em elementos menores, no caso deste artigo, em vários elementos isoparamétricos Q4.

O refinamento de todas as geometrias foi feito de forma gradual, ou seja, iniciou-se com a divisão do sólido em poucos elementos e aumentou-se o número de elementos de acordo com a necessidade. Este refinamento pode ser melhor analisado no fim do artigo, no APÊNDICE A.

No caso da viga e do pórtico, o refinamento foi feito de forma gradual, portanto a cada refinamento, o valor do deslocamento foi calculado através do método dos elementos finitos e comparado com o valor analítico, de forma que foi possível encontrar um valor de erro com a diferença entre esses dois valores. Sendo assim, para provar que a eficiência do método de estudo neste artigo, a ideia foi que o refinamento da malha fosse feito até atingir um valor de erro menor que 5%.

Já no caso da torus 2D, como citado anteriormente, não existe um valor analítico para que seja comparado com os valores de deslocamento encontrados através do método dos elementos finitos, portanto, o refinamento foi feito também de forma gradual, porém a comparação foi entre os valores de deslocamento retirados do mesmo programa, a fim de encontrar um valor de erro menor que 5% e para confirmar o funcionamento do código utilizado até aqui.

Resultados e discussões

Elemento viga

No Apêndice A é possível ver todo o refinamento que foi feito na viga para o cálculo do deslocamento. No total foram feitos onze refinamentos diferentes de forma gradual. Os resultados podem ser vistos na Tabela 1. O referencial analítico foi de 0,5 mm.

Referência (analítico) (mm)			
0,5			
MODELO 1 - VIGA			
Quantidade de elementos	Deslocamento via MEF (mm)	Erro (mm)	Erro (%)
1	0,0445	0,4554	91,08%
2	0,1402	0,3598	71,95%
3	0,2347	0,2653	53,06%
4	0,3022	0,1978	39,57%
5	0,3507	0,1493	29,86%
6	0,3839	0,1161	23,22%
7	0,4076	0,0924	18,49%
8	0,4246	0,0754	15,09%
10	0,4462	0,05378	10,76%
15	0,4797	0,02031	4,06%

Tabela 1- Resultados elemento viga

Fonte: Autoria própria

Nos resultados obtidos através do método dos elementos finitos é possível observar que ao aumentar o refinamento da malha, ou seja, aumentar o número de elementos isoparamétricos Q4 o deslocamento vai se aproximando do valor analítico. No gráfico número de elementos x deslocamento é possível enxergar melhor esta situação (Figura 5).

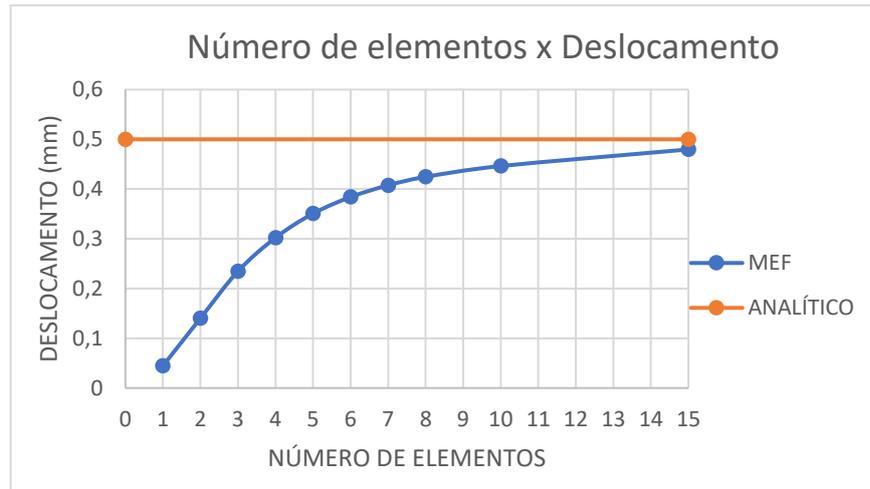


Figura 5- Número de elementos x deslocamento do elemento viga

Fonte: Autoria própria

Já no gráfico Número de elementos x erro, pode-se observar que com o aumento do número de elementos, ou seja, com o aumento do refinamento da malha, a porcentagem do erro diminui e segue gradativamente se aproximando de zero (Figura 6).

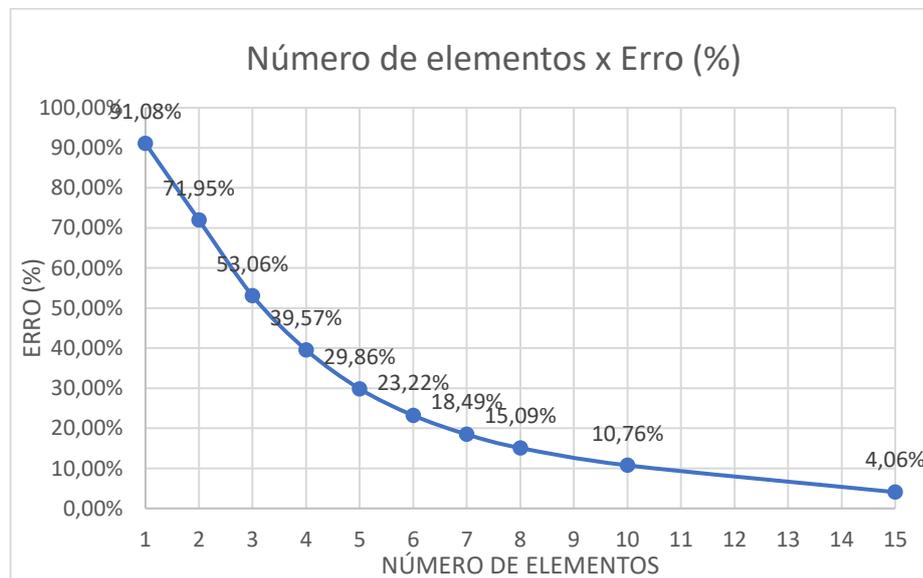


Figura 6- Número de elementos x erro do elemento viga

Fonte: Autoria própria

Neste caso específico, o refinamento das malhas foi encerrado com 15 elementos e 32 nós, onde o deslocamento encontrado foi de 0,47968543 e o erro de 4,06%. Considerando que o erro aceitável neste estudo é de 5%, considera-se que o gráfico convergiu.

É possível observar no refinamento das malhas da viga que ela foi dividida apenas em elementos na direção vertical. Porém também foi feito um estudo com divisões na horizontal como mostrado na Figura 7.

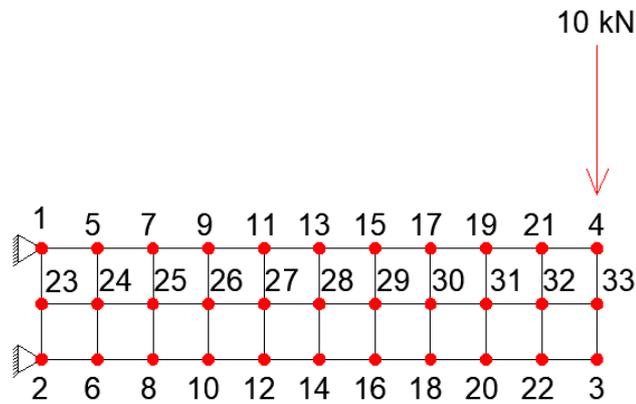


Figura 7- Refinamento do elemento viga com 20 elementos

Fonte: Autoria própria

Com esse modelo de refinamento, foi possível observar que mesmo aumentando 5 elementos comparado com o último modelo que utilizamos, que atingiu 4,06%, neste caso, por conta da forma que foi feito o refinamento dessa malha, o deslocamento encontrado não foi satisfatório, porque não atingiu os 5% considerados aceitáveis para este estudo. Portanto, é visto que além de aumentar o número de elementos é necessário observar de que forma os mesmos ficarão dispostos na malha.

Elemento pórtico

No Apêndice A é possível ver todo o refinamento que foi feito no elemento pórtico para o cálculo do deslocamento. No total foram feitos sete refinamentos diferentes de forma gradual. Os resultados podem ser vistos na Tabela 2. O referencial analítico foi de 0,06212 mm.

Referência (analítico) (mm)	MODELO 2 - PÓRTICO			
0,06212	Quantidade de elementos	Deslocamento via MEF (mm)	Erro (mm)	Erro (%)
	8	0,0029	0,0593	95,38%
	14	0,0129	0,0492	79,21%
	24	0,0283	0,0338	54,47%
	44	0,0439	0,0182	29,34%
	84	0,0598	0,0023	3,69%

Tabela 2- Resultados elemento pórtico

Fonte: Autoria própria

Nos resultados obtidos através do método dos elementos finitos é possível observar que ao aumentar o refinamento da malha, ou seja, aumentar o número de elementos isoparamétricos Q4 o deslocamento vai se aproximando do valor analítico.

No gráfico número de elementos x deslocamento nota-se que o valor do deslocamento através do método dos elementos finitos vai se aproximando do valor analítico de acordo com o aumento e posicionamento dos elementos no refinamento da malha (Figura 8)

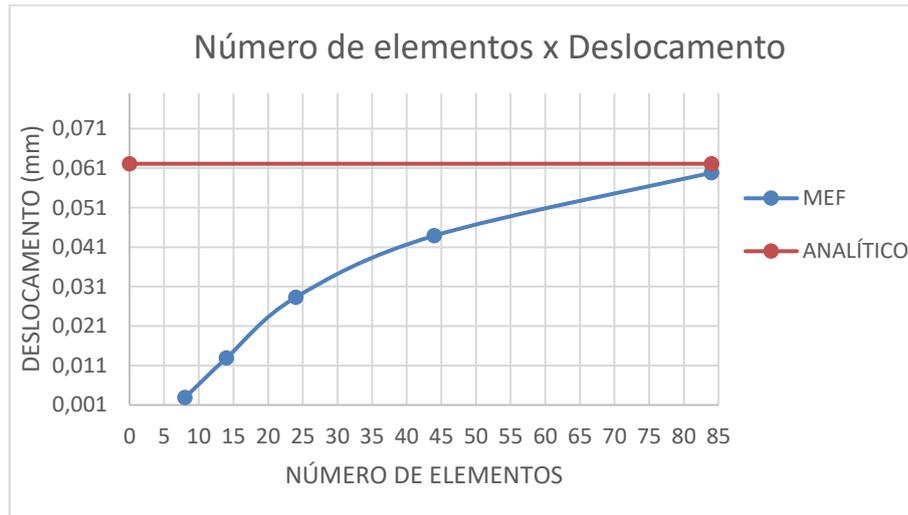


Figura 8- Número de elementos x deslocamento do elemento pórtico

Fonte: Autoria própria

Já no gráfico Número de elementos x erro, pode-se observar que com o aumento do número de elementos, ou seja, com o aumento e posicionamento do refinamento da malha, a porcentagem do erro diminui e segue gradativamente se aproximando de zero (Figura 9)

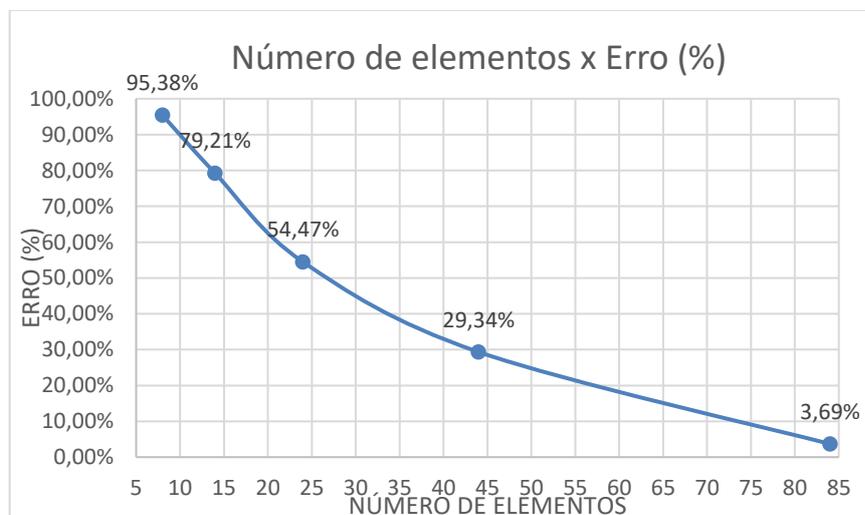


Figura 9- Número de elementos x erro do elemento pórtico

Fonte: Autoria própria

Neste caso específico, o refinamento das malhas foi encerrado com 84 elementos e 155 nós, onde o deslocamento encontrado foi de 0,05982548 e o erro de 3,69 %. Considerando que o erro aceitável neste estudo é de 5%, considera-se que o gráfico convergiu.

Elemento torus 2D

No Apêndice A é possível ver todo o refinamento que foi feito no elemento pórtico para o cálculo do deslocamento. No total foram feitos sete refinamentos diferentes de forma gradual.

No caso da Torus 2D, não existe uma solução analítica para comparar o resultado, então para encontrar o erro, comparou-se o deslocamento com o valor do deslocamento anterior. Portanto, no primeiro refinamento, com 8 elementos, não foi possível obter um valor de erro por não ter outro valor para realizar a comparação. Os resultados podem ser vistos na Tabela 3.

MODELO 3 - TORUS 2D			
Quantidade de elementos	Deslocamento via MEF (mm)	Erro (mm)	Erro (%)
8	0,00253	-	-
16	0,00345	0,00092	36,39%
32	0,00368	0,00022	6,47%
64	0,00385	0,00017	4,74%

Tabela 3- Resultados elemento torus 2D

Fonte: Autoria própria.

Nos resultados obtidos através do método dos elementos finitos é possível observar também que com o aumento do refinamento das malhas, o valor de erro vai diminuindo e se aproximando de 0. Pode-se observar melhor a situação nos gráficos número de elementos x deslocamento e número de elementos x erro, como mostrado na Figura 10 e 11.

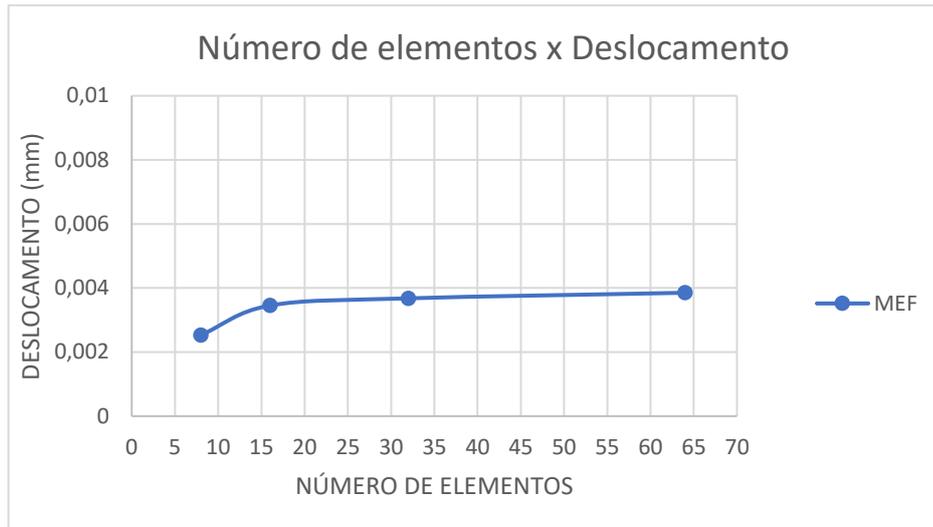


Figura 10- Número de elementos x deslocamento do elemento torus 2D

Fonte: Autoria própria

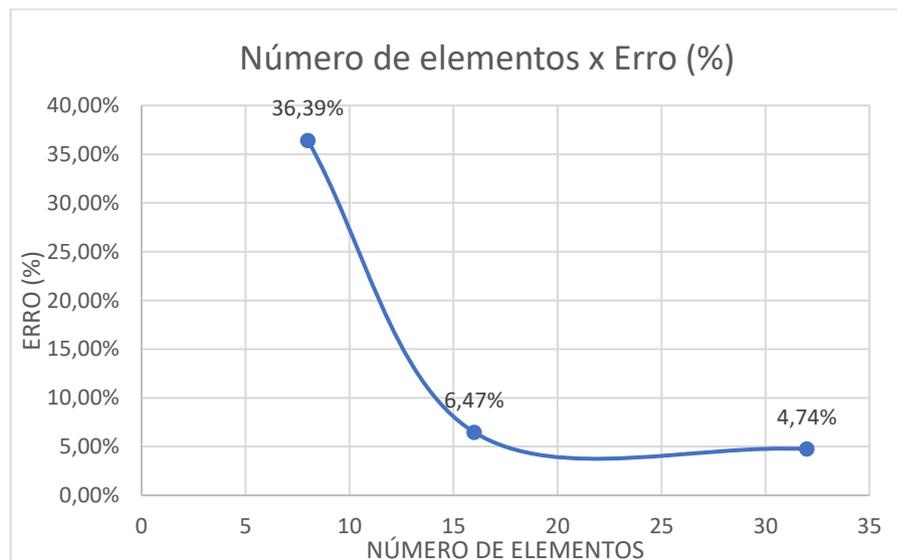


Figura 11- Número de elementos x erro do elemento torus 2D

Fonte: Autoria própria

Conclusão

Ao se observar os três casos, viga, pórtico e torus 2D, conclui-se, no método de elementos finitos, que com o aumento do refinamento da malha, o valor do deslocamento se aproxima do valor analítico, ou seja, quanto mais refinada a malha está, mais próximo da solução analítica será o valor de deslocamento. Porém, não significa que a quantidade de elementos finitos seja o primordial. Outro fator importante para a eficiência do resultado, é o posicionamento dos elementos finitos na malha refinada. Isso ocorre pois quando é feita a divisão de um elemento estrutural em elementos menores, no cálculo de deslocamento por exemplo, é feito o comportamento de cada elemento finito para só então obter o resultado do elemento como um todo. Nos casos dos elementos estudados neste artigo, por exemplo, os resultados de

deslocamento foram mais satisfatórios ao refinar a malha com os elementos seu maior lado contrário ao maior lado do elemento como um todo.

O programa Método dos Elementos Finitos, com linguagem Phyton utilizado neste artigo, ocasionou a obtenção de resultados satisfatórios para a pesquisa, porém ainda é necessário realizar mais estudos por conta da dificuldade de conversão encontrada em alguns casos estudados.

Por fim, conclui-se que o método dos elementos finitos é de grande valia para o cálculo de estruturas como um todo, pois não existem soluções analíticas para todas as equações que podem ser criadas, então com o método dos elementos finitos, apesar de ter uma porcentagem de erro, pode-se obter resultados bem próximos do resultado exato.

Agradecimentos

Quero agradecer ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Rio Verde que foi essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso. Agradecer pela confiança depositada na minha proposta de projeto pelo meu professor Marcel Willian Reis Sales, orientador do meu trabalho. Obrigado por me manter motivado durante todo o processo. E por fim, agradecer aos meus professores, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional ao longo do curso.

Referências

ALVES, L. M. **Métodos dos Elementos Finitos**. Março 2007. 438 f. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2007. Disponível em:

https://www.academia.edu/15457512/M%C3%A9todo_dos_Elementos_Finitos. Acesso em: 29 Març 2022.

ASSAN, A. E. **Métodos energéticos e análise estrutural**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1996.

BORGES, D. G; MADONA, E. F. **Aplicação do método dos elementos finitos em problemas de vigas considerando as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko**. 71f. Trabalho de Conclusão (Engenharia Civil) – Universidade de Taubaté. Taubaté. 2019.

BUDYNAS, R. G.; MISCHKE, C. R.; SHIGLEY, J. E. **Projeto de Engenharia Mecânica**. 7a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

FILHO, A. A. **Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE**. 6a. ed. São Paulo: Érica, 2013.

HUGHES, T. J. (2012). **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. Courier Corporation.

MORAES, A. J. O Método dos Elementos Finitos e a Engenharia Civil. **Revista Especialize On-line Ipog**, Goiânia, v. 01, n. 10, dez. 2015.

SILVA, G. M. F; CAMATA, J, J. **MeshTools: uma ferramenta de manipulação de malhas de elementos finitos com foco em alto desempenho.** DOI: [10.5753/wscad.2021.18508](https://doi.org/10.5753/wscad.2021.18508). 2021.

SOUZA, R. M. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor.** Belém. Maio 2003. 39 f. Disponível em:
<https://www.researchgate.net/publication/326331671_O_Metodo_dos_Elementos_Finitos_Aplicado_ao_Problema_de_Conducao_de_Calor>. Acesso em: 5 Jun, 2019.

ÂPENDICE A

1. Refinamento das malhas do elemento viga com 1 elemento.

- 4 nós;
- 1 elemento.

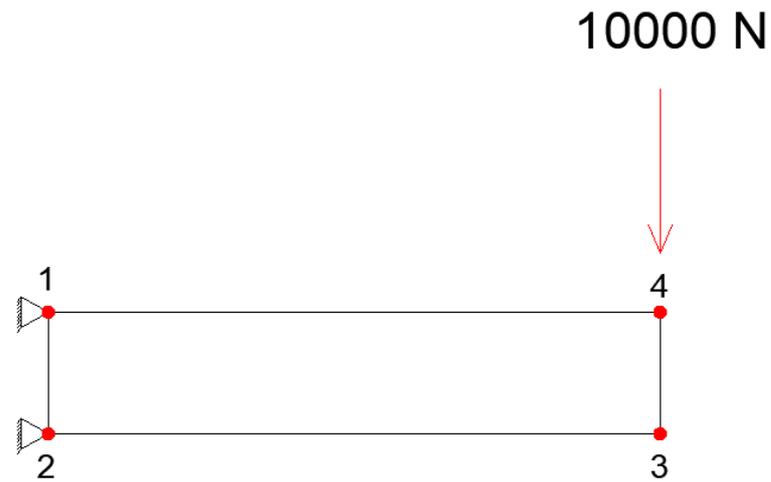


Figura 14: Refinamento viga com 1 elemento

Fonte: Autoria própria

2. Refinamento das malhas do elemento viga com 2 elementos.

- 6 nós;
- 2 elementos.

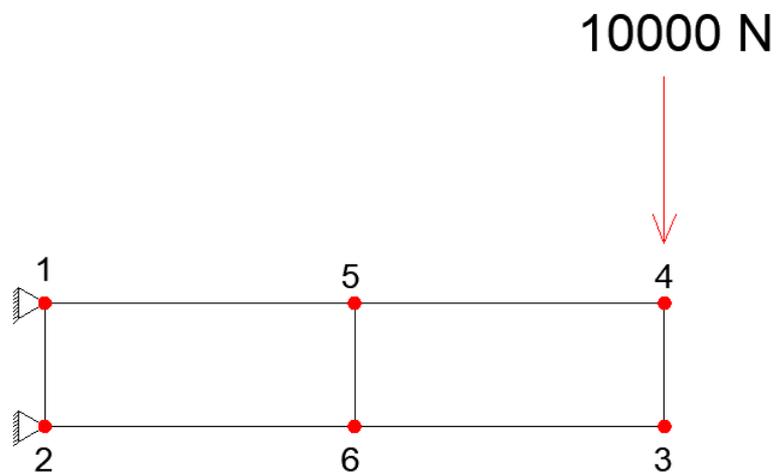


Figura 15: Refinamento viga com 2 elementos

Fonte: Autoria própria

3. Refinamento das malhas do elemento viga com 3 elementos.

- 8 nós;
- 3 elementos.

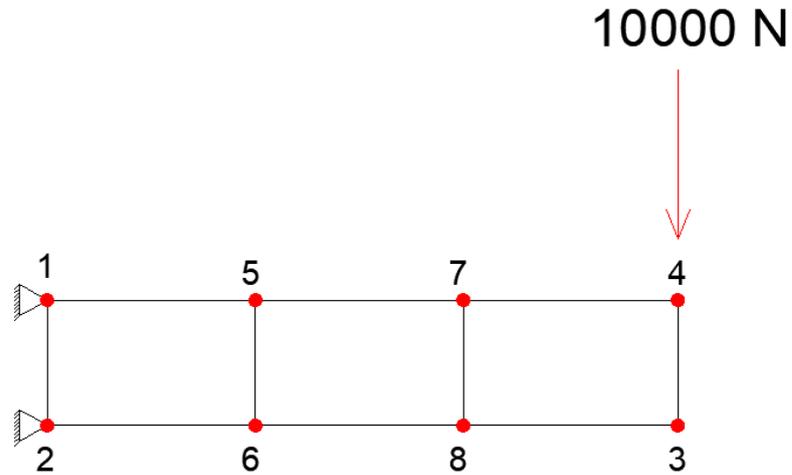


Figura 16: Refinamento viga com 3 elementos

Fonte: Autoria própria

4. Refinamento das malhas do elemento viga com 4 elementos.

- 10 nós;
- 4 elementos.

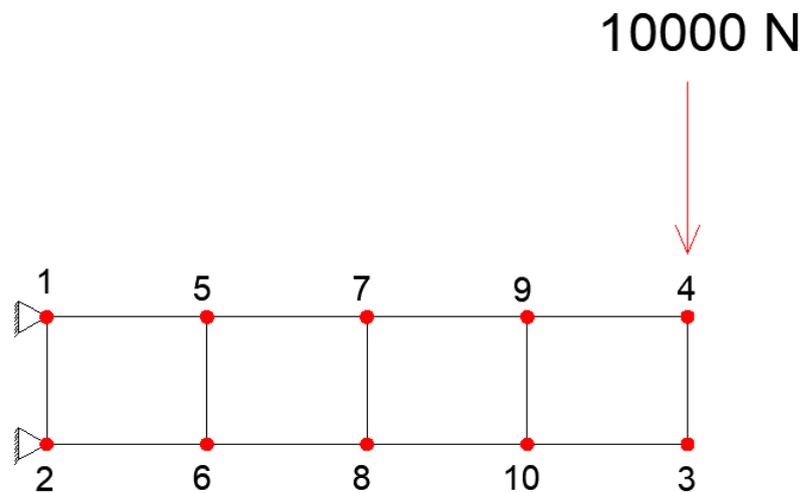


Figura 17: Refinamento viga com 4 elementos

Fonte: Autoria própria

5. Refinamento das malhas do elemento viga com 5 elementos.

- 12 nós;
- 5 elementos.

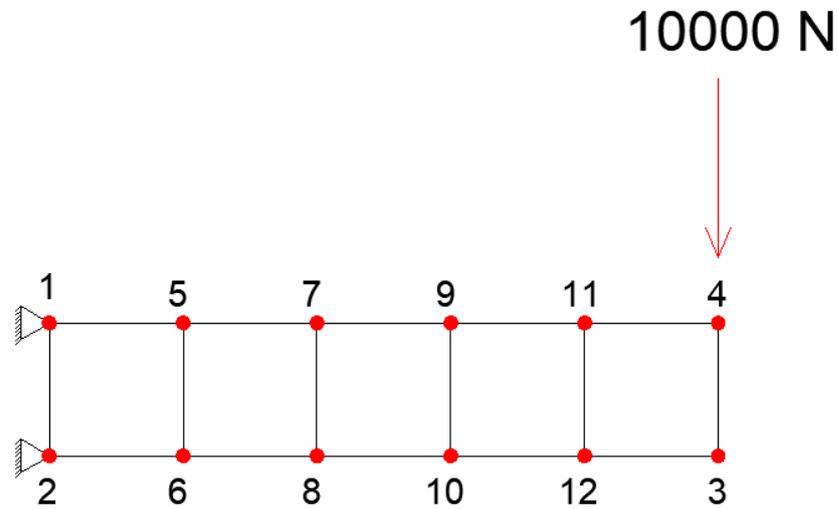


Figura 18: Refinamento viga com 5 elementos

Fonte: Autoria própria

6. Refinamento das malhas do elemento viga com 6 elementos.

- 14 nós;
- 6 elementos.

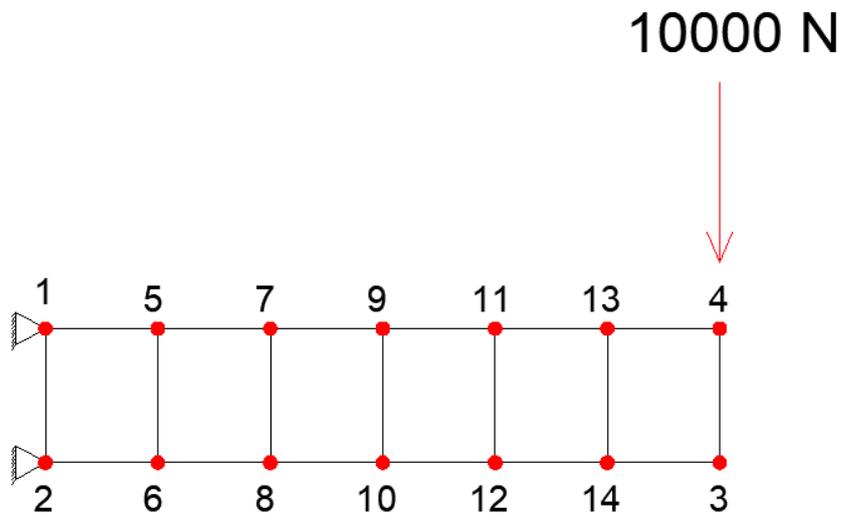


Figura 19: Refinamento viga com 6 elementos

Fonte: Autoria própria

7. Refinamento das malhas do elemento viga com 7 elementos.

- 16 nós;
- 7 elementos.

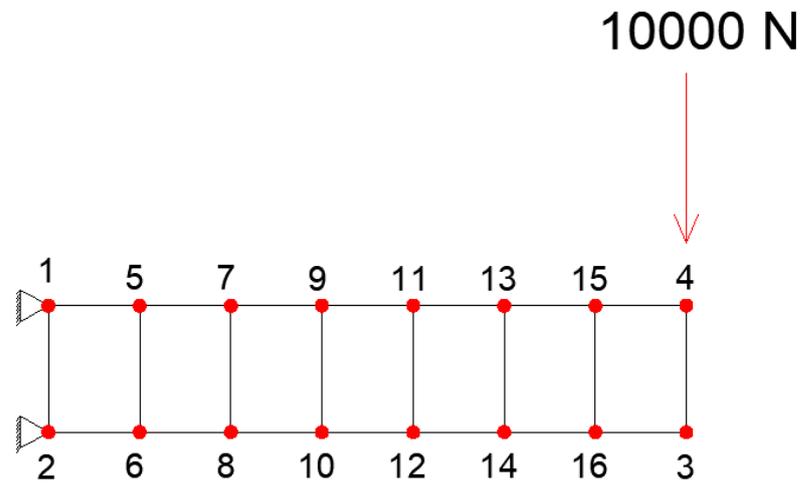


Figura 20: Refinamento viga com 7 elementos

Fonte: Autoria própria

8. Refinamento das malhas do elemento viga com 8 elementos.

- 18 nós;
- 8 elementos.

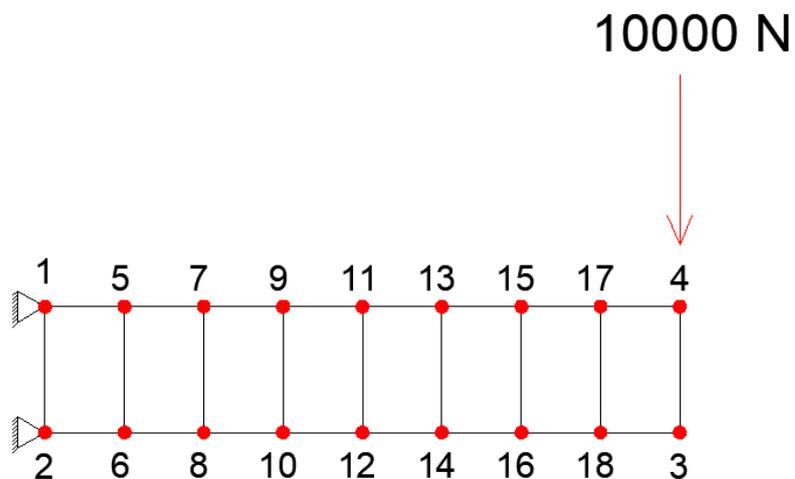


Figura 21: Refinamento viga com 8 elementos

Fonte: Autoria própria

9. Refinamento das malhas do elemento viga com 10 elementos.

- 22 nós;
- 10 elementos.

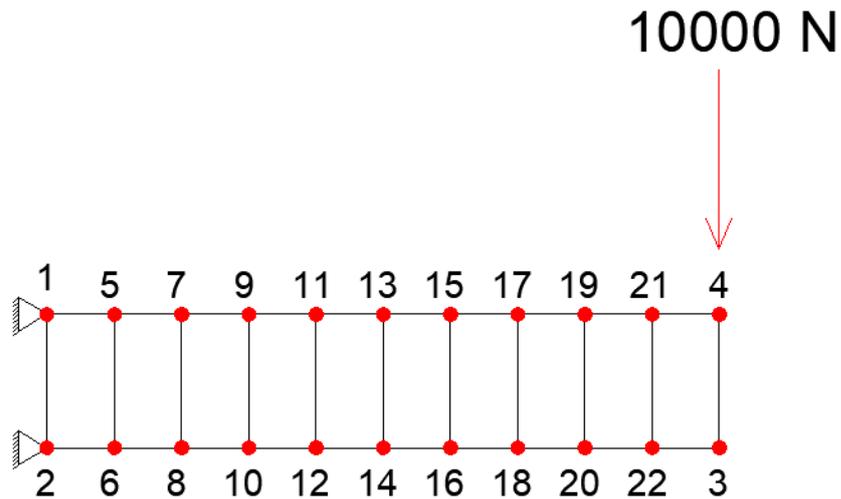


Figura 22: Refinamento viga com 10 elementos

Fonte: Autoria própria

10. Refinamento das malhas do elemento viga com 15 elementos.

- 32 nós;
- 15 elementos.

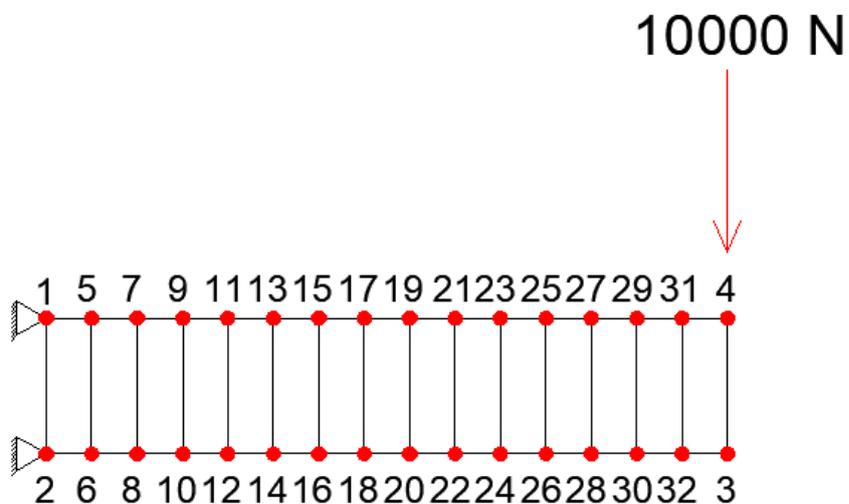


Figura 23: Refinamento viga com 15 elementos

Fonte: Autoria própria

11. Refinamento das malhas do elemento pórtico com 8 elementos.

- 16 nós;
- 8 elementos.

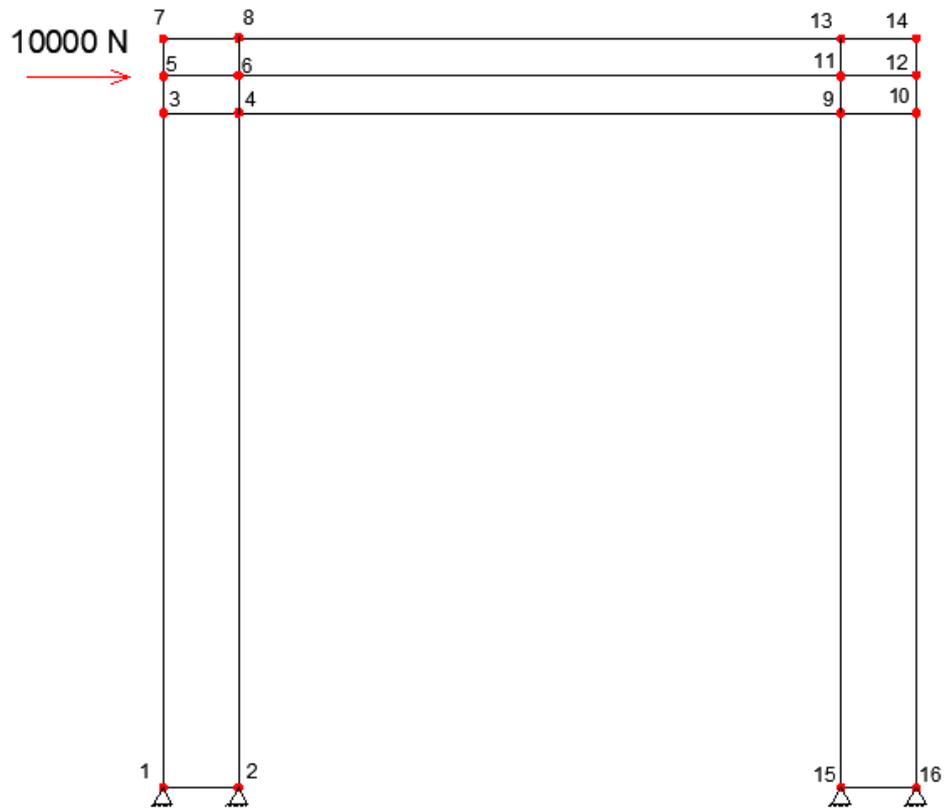


Figura 24: Refinamento pórtico com 8 elementos

Fonte: Autoria própria

12. Refinamento das malhas do elemento pórtico com 14 elementos.

- 22 nós;
- 14 elementos.

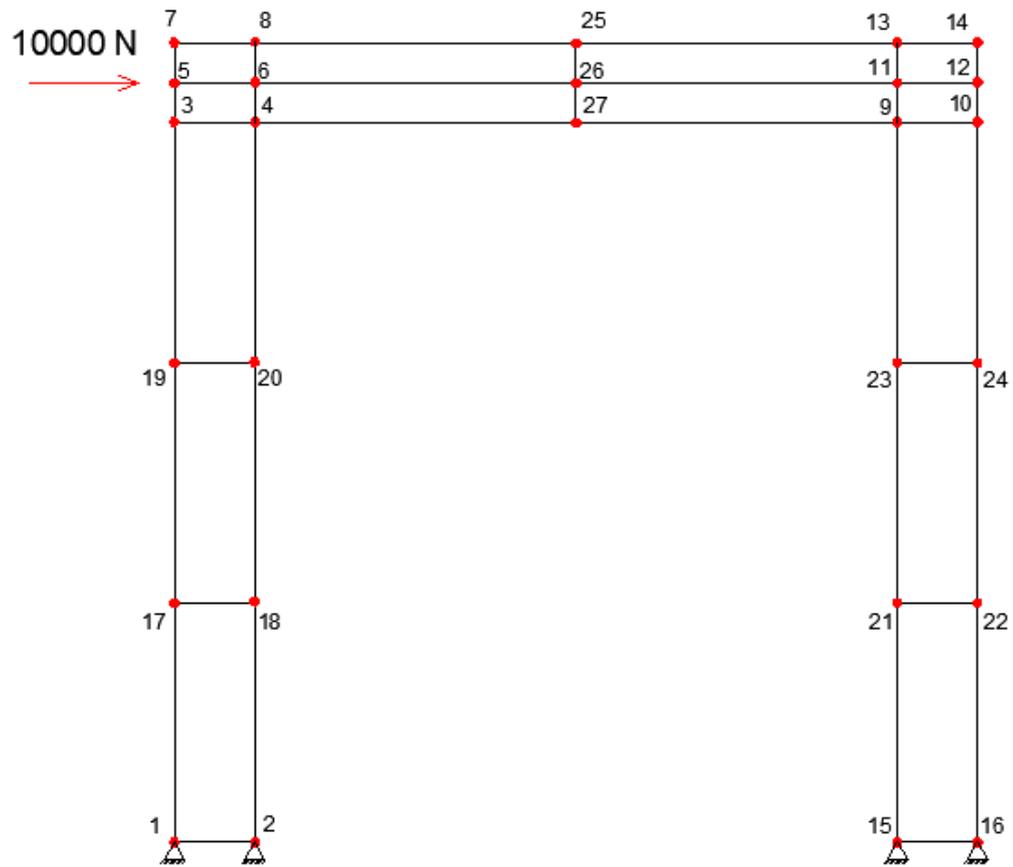


Figura 25: Refinamento pórtico com 14 elementos

Fonte: Autoria própria

13. Refinamento das malhas do elemento pórtico com 24 elementos.

- 45 nós;
- 24 elementos.

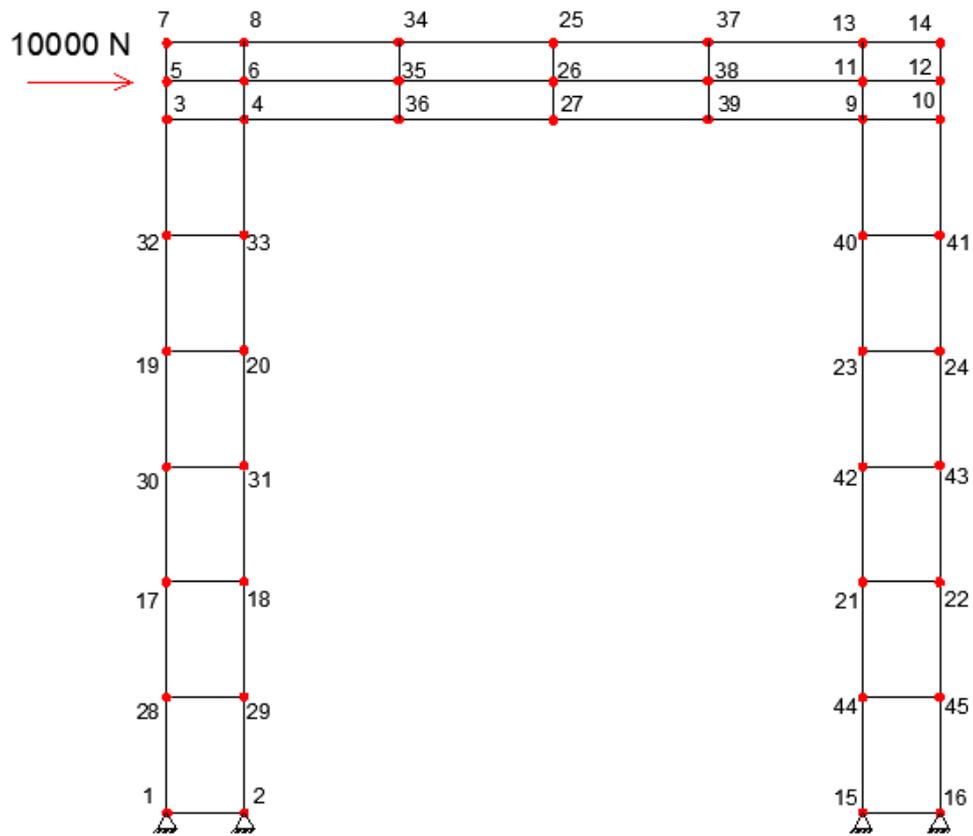


Figura 26: Refinamento pórtico com 24 elementos

Fonte: Autoria própria

14. Refinamento das malhas do elemento pórtico com 56 elementos.

- 105 nós;
- 56 elementos.

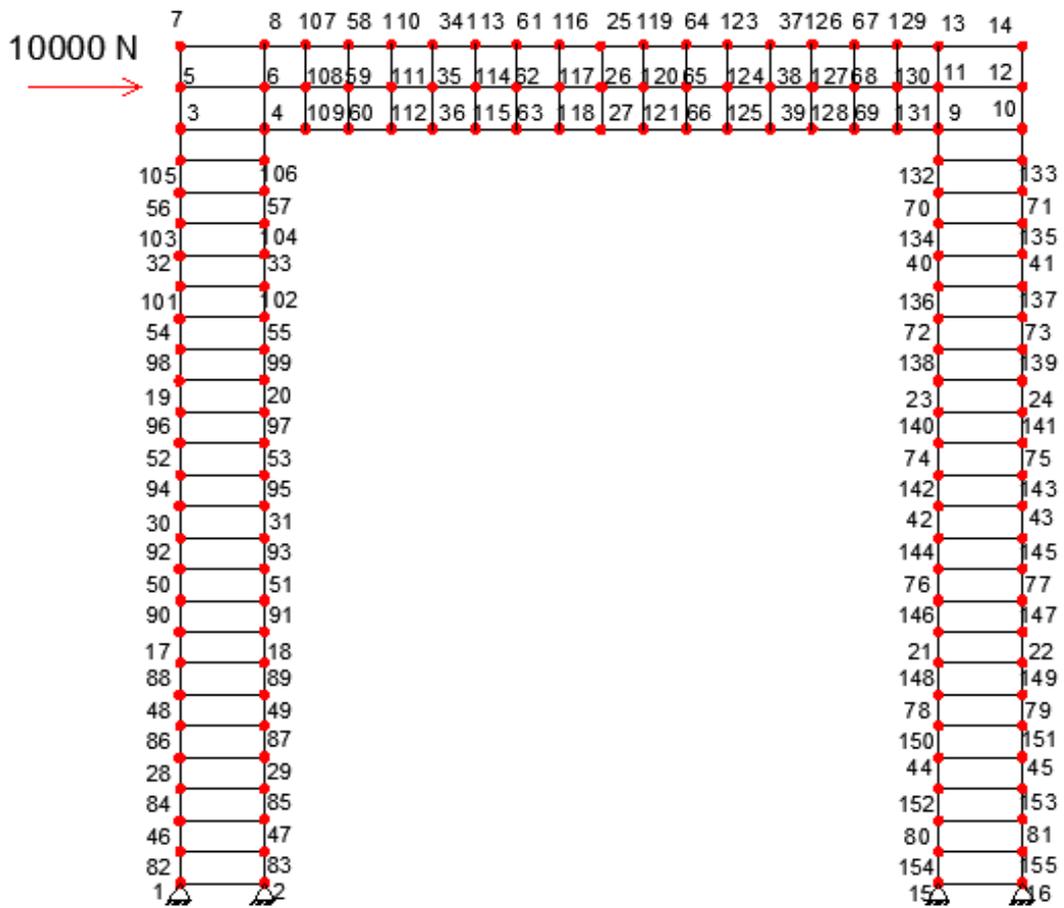


Figura 27: Refinamento p3rtico com 56 elementos

Fonte: Autoria pr3pria

15. Refinamento das malhas do elemento torus 2D com 8 elementos.

- 16 n3s;
- 8 elementos.

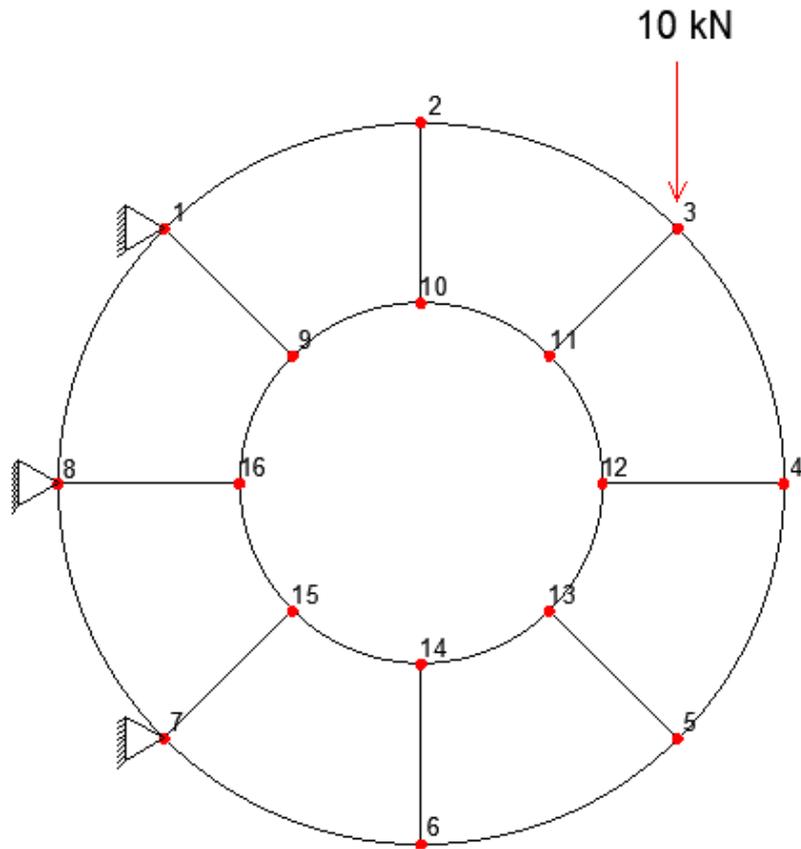


Figura 28: Refinamento torus 2D com 8 elementos

Fonte: Autoria própria

16. Refinamento das malhas do elemento torus 2D com 16 elementos.

- 32 nós;
- 16 elementos.

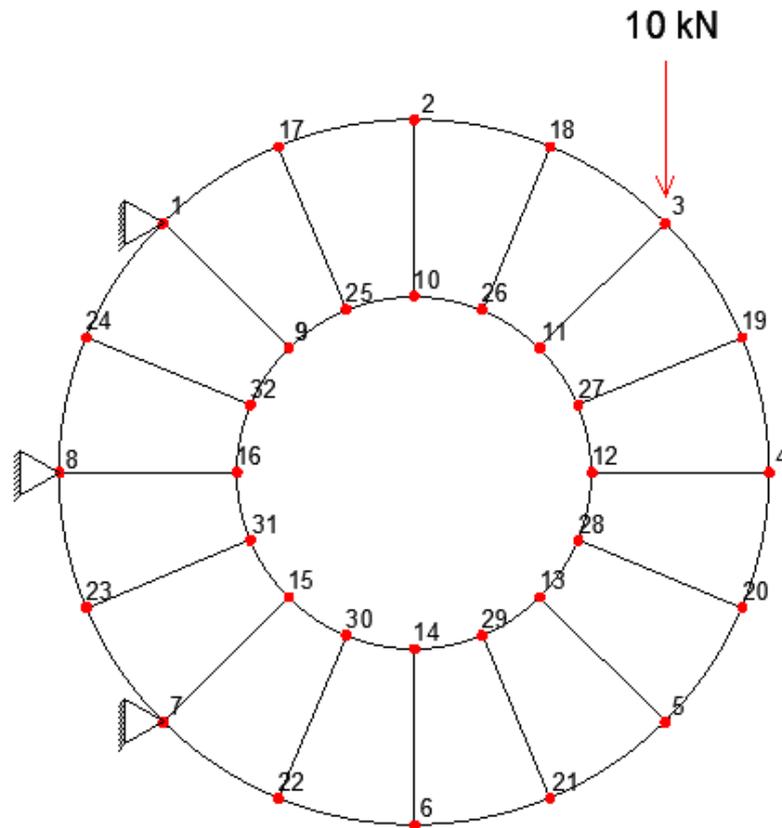


Figura 29: Refinamento torus 2D com 16 elementos

Fonte: Autoria própria

17. Refinamento das malhas do elemento torus 2D com 32 elementos.

- 64 nós;
- 32 elementos.

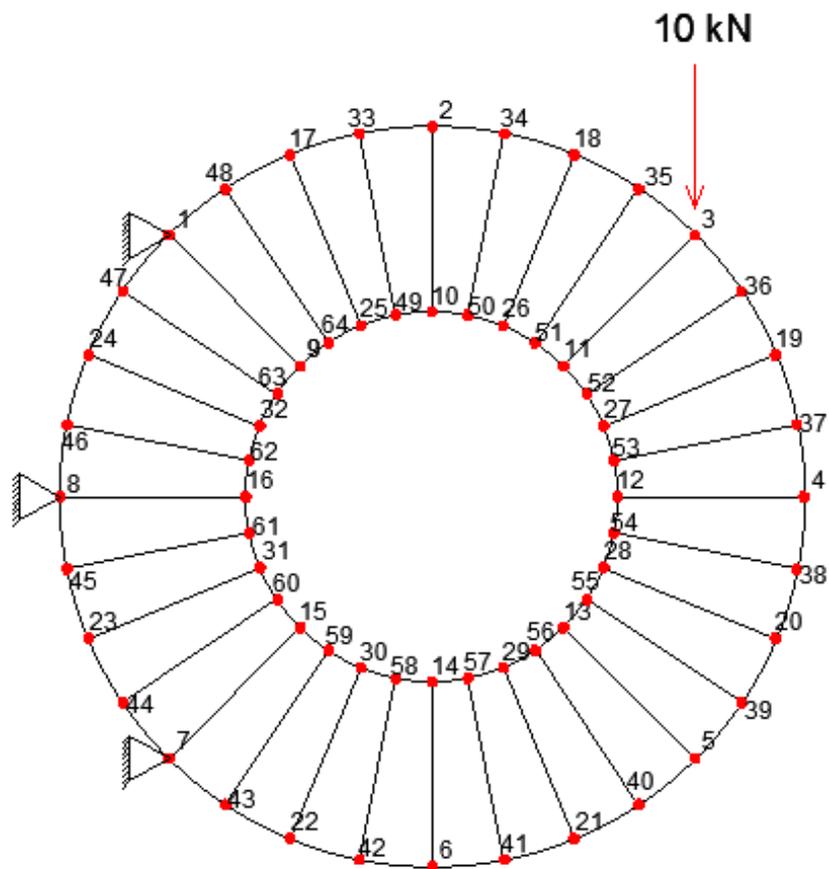


Figura 30: Refinamento torus 2D com 32 elementos

Fonte: Autoria própria

18. Refinamento das malhas do elemento torus 2D com 64 elementos.

- 128 nós;
- 64 elementos.

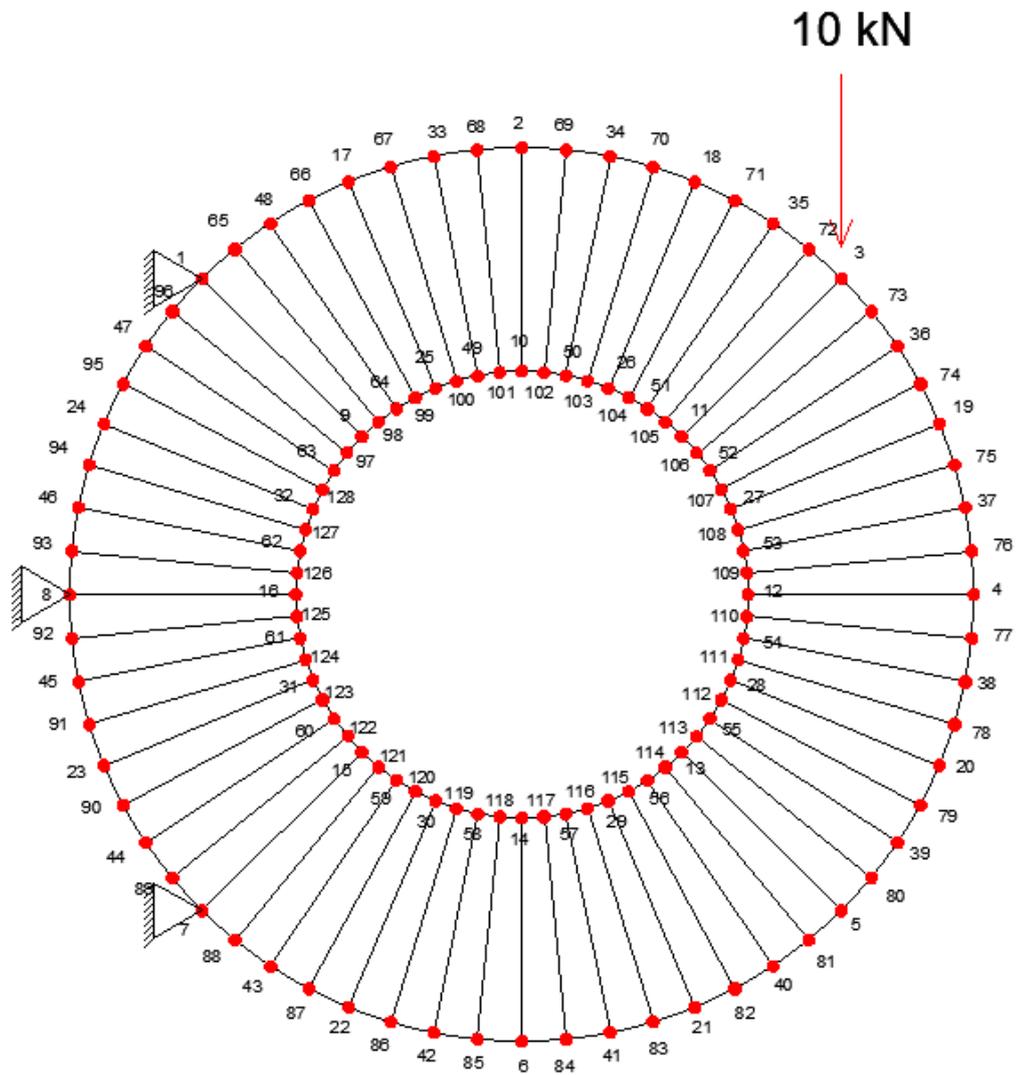


Figura 31: Refinamento torus 2D com 64 elementos

Fonte: Autoria própria