INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO-CAMPUS URUTAÍ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GEOVANA MAGALHÃES DE MELO

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS

Urutaí
2022

GEOVANA MAGALHÃES DE MELO

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano-Campus Urutaí, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Dassael Fabrício dos Reis Santos

Urutaí
2022

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano

MM528m
Melo, Geovana Magalhães de
Métodos para Solução de Equações Polinomiais do Terceiro e Quarto Graus / Geovana Magalhães de Melo; orientador Dassael Fabrício dos Reis Santos. -- Urutaí, 2022.
57 p.

TCC (Graduação em Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal Goiano, Campus Urutaí, 2022.

1. Equações. 2. Métodos. 3. Solução. 4. Polinomial. I. Santos, Dassael Fabrício dos Reis, orient. II. Título.

Responsável: Johnathan Pereira Alves Diniz - Bibliotecário-Documentalista CRB-1 nº2376

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO
PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano a disponibilizar gratuitamente o documento em formato digital no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

IDENTIFICAÇÃO DA PRODUÇÃO TÉCNICO-CIENTÍFICA

- ☐ Tese (doutorado)
- ☐ Dissertação (mestrado)
- ☐ Monografia (especialização)
- ☑ TCC (graduação)
- ☐ Artigo científico
- ☐ Capítulo de livro
- ☐ Livro
- ☐ Trabalho apresentado em evento

☐ Produto técnico e educacional - Tipo:

Nome completo do autor:
Geovana Magalhães de Melo

Matrícula:
2017101221230060

Título do trabalho:
MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS

RESTRIÇÕES DE ACESSO AO DOCUMENTO

Documento confidencial: ☑ Não ☐ Sim, justifique:

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: 01 / 05 / 2022

O documento está sujeito a registro de patente? ☐ Sim ☑ Não

O documento pode vir a ser publicado como livro? ☐ Sim ☑ Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O(a) referido(a) autor(a) declara:

• Que o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;

• Que obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autoria, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;

• Que cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Urutaí — 24 / 03 / 2022
Local — Data

Geovana Magalhães de Melo
Assinatura do autor e/ou detentor dos direitos autorais

Ciente e de acordo: Dassael Fabrício dos Reis Santos
Assinatura do(a) orientador(a)

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Ata nº 17/2022 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO

Aos 23 dias do mês de Março de 2022, às 14 horas, reuniu-se, em seção pública realizada de forma remota através do Google Meet, a banca examinadora composta pelos docentes: Dassael Fabrício dos Reis Santos (Presidente), Aderval Alves dos Santos, Jucelino Cardoso Marciano dos Santos, sob a presidência do primeiro, com a finalidade de avaliar o Trabalho de Curso em nível de graduação intitulado **Métodos Para Solução de Equações Polinomiais do Terceiro e Quarto Graus** de autoria de **Geovana Magalhães de Melo**, Matrícula nº 2017101221230060, do Curso de Licenciatura Plena em Matemática do IF Goiano – Campus Urutaí. A seção foi aberta quando o presidente formalmente apresentou a estudante e os avaliadores, passando então a palavra a estudante autora do trabalho para a apresentação oral do TC. A apresentação se estendeu pelos 20 minutos seguintes e, depois, houve arguição da candidata pelos membros da banca examinadora. Após tal etapa, a banca examinadora decidiu por unanimidade pela **APROVAÇÃO** da estudante com **Nota: 8,0**, considerando-se cumprido este requisito parcial para obtenção do título de **Licenciada em Matemática**. Depois de atender as considerações da banca, e respeitando o disposto no calendário acadêmico, a estudante deverá fazer o depósito da versão final corrigida em pdf no Repositório Institucional do IF Goiano - RIIF, acompanhado do Termo de Ciência e Autorização Eletrônica (TCAE) devidamente assinado pela autora e orientador. Às 15 horas, cumpridas todas as formalidades de pauta, o presidente da banca encerrou a sessão pública de defesa e foi lavrada a presente ata que, depois de lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Banca Examinadora da defesa.

(Assinado eletronicamente)
Dassael Fabrício dos Reis Santos
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

(Assinado eletronicamente)
Aderval Alves dos Santos
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

(Assinado eletronicamente)
Jucelino Cardoso Marciano dos Santos
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

INSTITUTO FEDERAL GOIANO
Campus Urutaí
Rodovia Geraldo Silva Nascimento, Km 2,5, Zona Rural, None, URUTAI / GO, CEP 75790-000
(64) 3465-1900

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Formulário 175/2022 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

GEOVANA MAGALHÃES DE MELO

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano–Campus Urutaí como requisito parcial para obtenção do titulo de Licenciada em Matemática, aprovado em 23 de Março de 2022 pela Banca Examinadora constituída pelos professores

(Assinado eletronicamente)
Prof. Dr. Dassael Fabrício dos Reis Santos
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

(Assinado eletronicamente)
Prof. Me. Aderval Alves dos Santos
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

(Assinado eletronicamente)
Prof. Dr. Jucelino Cardoso Marciano dos Santos
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

Dedico este trabalho aos meus pais Patrícia e Weder, aos meus irmãos José Henrique e Josiane e ao meu namorado Rafael pelo apoio, pela força e confiança depositados em mim.

Agradecimentos

AGRADEÇO DO FUNDO DO MEU CORAÇÃO...

A Deus por tudo que tem me proporcionado ao longo dessa jornada, sempre guiando meus passos e abrindo novos caminhos.

A minha família e ao meu namorado, por todo amor, carinho; por sempre estarem presentes ao meu lado, me apoiando, me dando forças e aconselhamentos para nunca desistir, por mais difícil que seja.

Ao meu orientador, Dr. Dassael Fabrício dos Reis Santos por todas as contribuições, ensinamentos, paciência, apoio e confiança depositada em mim.

Aos professores Aderval Alves dos Santos e Jucelino Cardoso Marciano dos Santos, por terem aceitado o convite de participarem da banca examinadora e pelas contribuições feitas.

Aos demais professores, por todo conhecimento compartilhado que foi essencial para minha formação acadêmica e profissional, contribuindo, assim, para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos e colegas por confiarem em mim, com isso, destaco minha amiga Jaqueline que esteve presente ao meu lado compartilhando choros e alegrias.

Por fim, a todos que me ajudaram de forma direta e indiretamente.

Hoje posso dizer: EU VENCI ESSA BATALHA!

[...]

Basta dar um passo, mais perto
Um passo de cada vez
Você vai vencer
Siga a luz na escuridão
Tudo vai ficar bem

Sei que seu coração está ferido
Apenas lembre que você é um guerreiro, guerreiro
Você não sabe o que o amanhã te espera
Você é mais forte do que pensa
Mais forte do que pensa

[...]

Mesmo em meio à escuridão
Não desista, não se renda
Isso tudo vai passar
Não é o fim
Tudo vai ficar bem

Trechos da música Tudo Vai Ficar Bem / Ministério Viva Adoração

Resumo

Neste trabalho, serão apresentados os principais métodos de solução de equações polinomiais do terceiro e do quarto graus. Dentre os principais métodos que serão abordados neste trabalho destacam-se: o Método de Cardano-Tartaglia, as relações de Girard, o algoritmo de Briot-Ruffini, o isolamento de raízes via Teorema do Valor Intermediário e o Método de Newton.

Palavras-chave: Equações; Métodos; Solução; Polinomial.

Abstract

In this work, will be presented the main methods of solving polynomial equations of the third and fourth degrees. Among the main methods that will be addressed in this work, the following stand out: the Cardano-Tartaglia Method, the Girard relations, the Briot-Ruffini algorithm, the isolation of roots via the Intermediate Value Theorem and the Newton's Method.

Keywords: Equations, Methods, Solution, Polynomial.

Sumário

INTRODUÇÃO **9**

1 EQUAÇÕES POLINOMIAIS: CONCEITOS, PROPRIEDADES E ALGUNS TEOREMAS **11**

2 EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO TERCEIRO GRAU: MÉTODOS DE SOLUBILIDADE **19**

2.1 Localização de Raízes 19

2.2 As Relações de Girard 22

2.3 O Dispositivo de Briot-Ruffini 25

2.4 O Método de Cardano-Tartaglia 27

2.5 O Método de Newton 37

3 EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO QUARTO GRAU: MÉTODOS DE SOLUBILIDADE **44**

3.1 O Método de Cardano-Tartaglia 44

3.2 O Método de Newton 48

CONCLUSÃO **52**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **53**

INTRODUÇÃO

A procura por soluções de equações polinomiais é um problema bastante antigo e de grande importância em Matemática. Diversos problemas advindos de quase todas as áreas do conhecimento podem ser modelados e resolvidos por meio do estudo de equações polinomiais, dentre as quais destacam-se as equações que envolvem polinômios de grau mais baixo como, por exemplo, os polinômios de primeiro, segundo, terceiro e quarto graus. Isto devido a praticidade de se contar com fórmulas explícitas para encontrar a solução.

Neste trabalho, daremos foco ao estudo da solubilidade de equações envolvendo polinômios de terceiro e quarto graus (também denominadas equações cúbicas e quárticas, respectivamente) devido a pouca quantidade de material concreto existente nos tópicos de matemática sobre o assunto.

De acordo com EVES (2011, p. 302), "o feito matemático mais extraordinário do século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas".

Os primeiros registros de solução de uma equação cúbica data por volta de 1515 quando Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, conseguiu encontrar, por meio de métodos algébricos, uma solução para a equação $x^3 + mx - n = 0$. Em um primeiro momento, Ferro decidiu não divulgar seu resultado, mas compartilhou o achado com Antônio Fior, que na época era seu aluno. Anos depois, em torno de 1535, Tartaglia, como era conhecido Nicolo Fontana de Brescia, divulgou que havia desenvolvido um método algébrico para obter uma solução para a equação $x^3 + px^2 - n = 0$. Fior, duvidando que o resultado obtido por Tartaglia fosse verdadeiro, o provoca desafiando-o para uma competição cujo objetivo era encontrar solução para a equação do terceiro grau. Tartaglia aceita o convite e, mesmo com os dias contados para a competição, consegue o trunfo de também resolver a equação cúbica resolvida por Ferro sem a presença do termo quadrático. No dia combinado para a disputa, por saber resolver dois tipos de cúbicas enquanto Fior somente sabia resolver um tipo, Tartaglia foi declarado vencedor da disputa.

Tempos depois, o médico e professor Girolamo Cardano consegue extrair de Tartaglia a essência da solução da equação do terceiro grau, após uma promessa de manter segredo sobre o assunto, que não foi cumprido quando, em 1545, Cardano publica um tratado de álgebra denominado Ars Magna que continha a solução proposta por Tartaglia para equação cúbica. Tartaglia protestou, mas Ludovico Ferrari debateu justificando que seu mestre Cardano recebeu notícias de Ferro, por meio de uma terceira pessoa, ao mesmo período que incriminava Tartaglia de ter copiado a mesma origem. A partir disto, houve uma grande discussão a respeito da autoria de Tartaglia. Nos dias de hoje ainda encontram-se muitas variações em relação aos detalhes da trama, pois segundo a história, não se sabe quem de fato dissera a verdade.

Tempos depois, em 1540, o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi desafiou Cardano a resolver o problema de encontrar um método para solução de equações do quarto grau na forma geral. Cardano foi incapaz de resolver tal problema, porém seu discípulo Ferrari o resolveu e esse resultado também consta na Ars Magna de Cardano.

Com o passar dos anos encontraram-se outras soluções algébricas das equações cúbicas e quárticas gerais. Outros matemáticos, como Vietè, Descartes, Euler e Lagrange, também trabalharam em técnicas para resolver equações cúbicas e quárticas. De forma mais precisa, a resolução de uma equação quártica se reduz à resolução de uma equação cúbica associada a ela. Outras histórias sobre o surgimento dos métodos para solução de equações cúbicas e quárticas constam nos livros de história da matemática, porém, neste trabalho, optou-se por descrever de maneira resumida a apresentada acima, que foi descrita de maneira fascimante no livro de Eves ([3], 2011)

Neste sentido, este trabalho tem por objetivo estudar e desenvolver, de maneira formal, diversos métodos de solubilidade de equações polinomiais do terceiro e do quarto graus com coeficiente real. A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho fundamentou-se no estudo, pesquisa e análise das bibliografias listadas nas referências bibliográficas com intuito de dar embasamento e fundamentação teórica ao trabalho. Com isso, este trabalho será dividido em três capítulos, como será apresentado a seguir:

No primeiro capítulo, será apresentado um breve estudo teórico sobre equações polinomiais, seus conceitos, propriedades e alguns teoremas.

No segundo capítulo, serão abordados os métodos de solubilidade de equações do terceiro grau por meio das principais técnicas para obtenção de solução. Para isso, serão utilizadas as relações de Girard, o dispositivo prático de Briot-Ruffini, o Método de Cardano-Tartaglia e o Método de Newton. Mas antes, será mostrado um método para isolamento e localização de raízes de equações do terceiro grau.

No terceiro capítulo serão apresentados os métodos de solubilidade de equações do quarto grau. Para isso, serão utilizados o Método de Cardano-Tartaglia e o Método de Newton.

CAPÍTULO 1

EQUAÇÕES POLINOMIAIS: CONCEITOS, PROPRIEDADES E ALGUNS TEOREMAS

Neste capítulo, será apresentado um breve estudo teórico sobre equações polinomiais com objetivo de dar base e fundamento para o estudo de solubilidade de equações polinomiais de terceiro e quarto graus. Os principais resultados deste capítulo se baseiam nos trabalhos de Fernandez e Santos ([5], 2010), Neto ([12], 2016), Novaes ([13], 2018) e Rechtschaffen ([14], 2009).

Primeiro, será definido o que se entende por polinômio. Em seguida serão estabelecidos resultados de existência de solução de uma equação polinomial real.

Definição 1.1 *Um* **polinômio** *na variável x é uma função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \;\; a_i \in \mathbb{R}, \;\; 0 \leq i \leq n. \tag{1-1}$$

Na definição acima, as constantes reais $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são chamadas de coeficientes e n é o grau do polinômio p. É importante destacar que os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ podem ser números complexos, porém, por uma questão de simplicidade, neste trabalho optou-se por estudar somente polinômios cujos coeficientes são reais. A seguir, será definido o que se entende por uma equação polinomial.

Definição 1.2 *Sejam p_1 e p_2 polinômios na variável x. Denomina-se* **equação polinomial** *a toda igualdade da forma*

$$p_1(x) = p_2(x), \;\; x \in \mathbb{C}. \tag{1-2}$$

Neste caso, $x \in \mathbb{C}$ é uma solução de uma equação polinomial se a igualdade em (1-2) for verdadeira. As soluções de uma equação polinomial são denominadas **raízes** da equação e o conjunto solução S é o conjunto de todas as raízes desta equação. Neste caso, denota-se $S = \{x \in \mathbb{C}; p_1(x) = p_2(x)\}$.

Além disso, se duas equações polinomiais tem conjunto solução iguais, então estas equações são ditas equivalentes. Pode-se obter equações polinomiais equivalentes modificando uma equação polinomial por meio de operações elementares[1]. Por exemplo,

1. Se h é um polinômio na variável x, então as equações $p_1(x) = p_2(x)$ e $p_1(x) + h(x) = p_2(x) + h(x)$ são equivalentes, ou seja, tem o mesmo conjunto solução;
2. Se $k \in \mathbb{R}$ é uma constante não nula, então as equações polinomiais $p_1(x) = p_2(x)$ e $kp_1(x) = kp_2(x)$ são equivalentes, ou seja, tem o mesmo conjunto solução.

Conhecendo-se as operações acima, pode-se transformar a equação (1-2) na forma irredutível

$$p(x) = 0, \tag{1-3}$$

onde p é um polinômio cujo grau é o maior grau entre os graus de p_1 e p_2. Com efeito, somando $-p_2(x)$ de ambos os lados de (1-2), tem-se

$$p_1(x) - p_2(x) = p_2(x) - p_2(x) \tag{1-4}$$

e, consequentemente, $p_1(x) - p_2(x) = 0$. Definindo $p(x) = p_1(x) - p_2(x)$, tem-se (1-3).

Manipulações algébricas em equações polinomiais (como a manipulação realizada acima) são feitas para simplificar a equação a ser resolvida. Um método prático que é comumente utilizado é fazer uma mudança de variável com objetivo de transformar a equação $p(x) = 0$ em uma equação mais simples $q(y) = 0$, de forma que as raízes das duas equações se relacionam por meio de uma lei $y = f(x)$.

A definição a seguir conceitua o que se entende por uma raiz (ou solução) de uma equação polinomial da forma $p(x) = 0$.

Definição 1.3 *Seja p um polinômio de grau $n \geq 1$. Diz-se que x_0 é uma raiz da equação $p(x) = 0$ se $p(x_0) = 0$.*

O teorema que será apresentado a seguir é um dos mais importantes resultados da teoria das equações polinomiais e, em essência, garante existência de soluções de uma equação polinomial.

Teorema 1.4 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio de grau $n \geq 0$ com coeficientes reais possui, no máximo, n raízes distintas.*

Demonstração: Seja p um polinômio com coeficientes reais e de grau n. A prova será feita por indução sobre n. Com efeito, para $n = 0$, o polinômio p é constante e, por isso,

[1]Operações elementares são operações realizadas em uma equação polinomial que não alteram o resultado desta equação.

não tem raiz. Suponha agora que a hipótese seja verdadeira para todo polinômio de grau n, isto é, suponha que todo polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas. Seja p um polinômio de grau $n+1$ e suponha que x_0 é uma raiz de p. Consequentemente, existe um polinômio q, de grau n, tal que, $p(x) = (x-x_0)q(x)$ (veja Teorema 1.5). Pela hipótese de indução segue que p tem, no máximo $n+1$ raízes distintas (x_0 e as n raízes de q), provando assim o teorema.

□

Um fato importante a se observar, é que existem diversas versões do Teorema Fundamental da Álgebra apresentadas nos livros de Matemática. Porém, todas elas convergem para o mesmo resultado: a existência de raízes para uma equação polinomial. Neste trabalho, optou-se apresentar a versão mais simples e de melhor entendimento para o leitor. Outras versões deste teorema podem ser encontrados nos livros de matemática básica e álgebra do ensino superior.

Uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra é a garantia de que todo polinômio de grau $n \geq 1$ que possui n raízes distintas pode ser fatorado como produto de fatores lineares. Isto é, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \;\; a_i \in \mathbb{R}, \;\; n \geq 1, \tag{1-5}$$

e $x_1, \cdots, x_n$ são raízes da equação $p(x) = 0$, então p pode ser decomposto como o seguinte produto:

$$p(x) = a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_2)(x-x_1). \tag{1-6}$$

Além disso, a fatoração acima é única a menos da ordem dos fatores. No caso particular em que o polinômio p tem pelo menos uma raiz x_0, o Teorema Fundamental da Álgebra garante que p é divisível pelo polinômio $g(x) = x - x_0$. Este resultado é conhecido como **Teorema de D'Alembert** ou **Teste da Raiz**.

Teorema 1.5 (D'Alembert) *Seja p um polinômio de grau $n \geq 1$. Então, x_0 é raiz de $p(x) = 0$ se, e somente se, p é divisível por $x - x_0$.*

Demonstração: Primeiro, suponha que p tenha a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \;\; a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}, \tag{1-7}$$

e que x_0 é uma raiz da equação $p(x) = 0$, ou seja, $p(x_0) = 0$. Assim,

$$p(x) \;\; = \;\; p(x) - p(x_0) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - a_n x_0^n - \cdots - a_2 x_0^2 - a_1 x_0 - a_0$$

$$
\begin{aligned}
&= a_n(x^n - x_0^n) + \cdots + a_2(x^2 - x_0^2) + a_1(x - x_0) \\
&= a_n(x - x_0)\sum_{i=0}^{n-1} x^{(n-1)-i}x_0^i + \cdots + a_2(x - x_0)(x + x_0) + a_1(x - x_0) \\
&= (x - x_0)\Big(a_n\sum_{i=0}^{n-1} x^{(n-1)-i}x_0^i + \cdots + a_2(x + x_0) + a_1\Big), \qquad (1\text{-}8)
\end{aligned}
$$

e, definindo $q(x) = a_n\sum_{i=0}^{n-1} x^{(n-1)-i}x_0^i + \cdots + a_2(x + x_0) + a_1$, tem-se $p(x) = (x - x_0)q(x)$.

A igualdade acima implica que p é divisível por $x - x_0$. Reciprocamente, se p é divisível por $x - x_0$, então existe um polinômio $q(x)$ de grau $n - 1$, tal que, $p(x) = (x - x_0)q(x)$. Assim, $p(x_0) = (x_0 - x_0)q(x_0) = 0$ e, consequentemente, x_0 é uma raiz da equação $p(x) = 0$.

$\square$

Além disso, se $r_1, r_2, \cdots, r_k$ são raízes distintas de um polinômio p de grau n, com multiplicidades $m_1, m_2, \cdots, m_k$, respectivamente, então p pode ser fatorado como

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}\cdots(x - r_k)^{m_k}, \qquad (1\text{-}9)$$

onde $m_j \geq 1$, com $j = 1, \cdots, k$ e $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Neste caso, diz-se que a raiz r_j possui multiplicidade m_j.

Considerando o polinômio do quarto grau $p(x) = 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 6$, por exemplo, tem-se, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, que p tem no máximo quatro raízes distintas, à saber, $x_1 = -i$, $x_2 = i$, $x_3 = -1$ e $x_4 = 2$. Consequentemente, p pode ser decomposto como um produto de fatores dado por

$$p(x) = 3(x + i)(x - i)(x + 1)(x - 2). \qquad (1\text{-}10)$$

Observe que as raízes do polinômio acima têm multiplicidade 1.

O teorema a seguir garante que o resto da divisão euclidiana de um polinômio p pelo polinômio $x - x_1$ é igual ao valor numérico de p em x_1, para $x_1 \in \mathbb{R}$. Este resultado é denominado **Teorema do Resto** e a demonstração apresentada se baseia nos resultados de Novaes ([13], 2018).

Teorema 1.6 (do Resto) *Seja p um polinômio de grau $n \geq 1$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Então, o resto da divisão de p por $x - x_0$ é $p(x_0)$.*

Demonstração: Pelo algoritmo da divisão, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$, tais que,

$$p(x) = (x - x_0)q(x) + r(x), \qquad (1\text{-}11)$$

onde o grau de r é menor que o grau de $x-x_0$. Como $x-x_0$ tem grau 1, segue que r é um polinômio constante. Logo, $r(x)=r(x_0)$, para todo x. Defina $r=r(x)$. Assim,

$$p(x_0)=(x_0-x_0)q(x_0)+r=r. \tag{1-12}$$

□

O teorema que será apresentado a seguir caracteriza as raízes complexas de um polinômio p. Em essência, esse resultado garante que se p tem raiz complexa, então esse polinômio admite pelo menos duas raízes complexas: a raiz e seu conjugado.

Teorema 1.7 (Teorema das raízes complexas conjugadas) *Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem raiz complexa $z=a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$ e $b\neq 0$, então o número complexo conjugado $\overline{z}=a-bi$ também é raiz desta equação. Além disso, se $z=a+bi$ é raiz de multiplicidade k, então $\overline{z}=a-bi$ também é raiz de multiplicidade k.*

Demonstração: Sejam $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, onde $a_0,a_1,\cdots,\ a_n\in\mathbb{R}$, e $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$, uma raiz da equação polinomial $p(x)=0$. Então,

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_2z^2+a_1z+a_0=0. \tag{1-13}$$

Sendo $\overline{z}$ o conjugado complexo de z e sabendo que $\overline{z}^k=\overline{z^k}$, para todo $k\in\mathbb{N}$, tem-se que,

$$\begin{aligned}
p(\overline{z}) &= a_n\overline{z}^n+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_2\overline{z}^2+a_1\overline{z}+a_0\\
&= a_n\overline{z^n}+a_{n-1}\overline{z^{n-1}}+\cdots+a_2\overline{z^2}+a_1\overline{z}+a_0\\
&= \overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_2z^2}+\overline{a_1z}+a_0\\
&= \overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_2z^2+a_1z+a_0}\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1-14}$$

Portanto, $\overline{z}=a-bi$ é raiz da equação polinomial $p(x)=0$. Além disso, se o conjugado de cada raiz complexa é também uma raiz complexa, segue, deste fato, que se z é uma raiz de multiplicidade k, então seu conjugado também tem multiplicidade k.

□

Considere, por exemplo, o polinômio do quarto grau

$$p(x)=3x^4-3x^3-3x^2-3x-6 \tag{1-15}$$

e suponha que se conheça um zero complexo e um zero real deste polinômio, à saber, $x_0=i$ e $x_1=-1$. Deseja-se determinar os demais zeros deste polinômio. Para isto, primeiro observe que p é um polinômio que têm coeficientes reais. Assim, pelo Teorema das Raízes Complexas Conjugadas se i é um zero de p, então $-i$ também será. Como tem-se dois zeros complexos e um zero real, pelo Teorema das Raizes Complexas Conjungadas, tem-se que o zero que falta encontrar é, necessariamente, um número real. Utilizando o Teorema de D'Alembert, tem-se que p é divisível por $g(x) = (x-i)(x+i)(x+1) = x^3+x^2+x+1$. Pelo método da chave, tem-se

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4-3x^3-3x^2-3x-6 & x^3+x^2+x+1 \\
\cline{2-2}
-3x^4-3x^3-3x^2-3x & 3x-6 \\
\cline{1-1}
-6x^3-6x^2-6x-6 & \\
6x^3+6x^2+6x+6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Logo,

$$p(x) = 3x^4-3x^3-3x^2-3x-6 = (x^3+x^2+x+1)(3x-6). \tag{1-16}$$

Resolvendo a equação $p(x) = 0$, tem-se $(x^3+x^2+x+1)(3x-6) = 0$ e, consequentemente, $3x-6 = 0$. Disto, segue que $x = 2$ é, também, um zero de p. Portanto, $x_0 = i$, $x_1 = -1$, $x_2 = -i$ e $x_3 = 2$ são todos os zeros do polinômio p.

O teorema[2] que será apresentado a seguir relaciona os coeficientes de um polinômio com suas raízes racionais.

Teorema 1.8 (Teorema das raízes racionais) *Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$ primos entre si. Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.*

Demonstração: Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$ primos entre si e suponha que $\frac{p}{q}$ seja uma raiz racional de $p(x) = 0$, ou seja,

$$a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \tag{1-17}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (1-17) por q^n, obtém-se

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \tag{1-18}$$

[2]É importante ressaltar que a aplicabilidade deste teorema se dá somente para polinômios com coeficientes inteiros.

Isolando o termo $a_n p^n$ do lado esquerdo da equação (1-18) e colocando q em evidência do lado direito desta mesma equação, segue que

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}). \tag{1-19}$$

Por outro lado, isolando o termo $a_0 q^n$ do lado esquerdo da equação (1-18) e colocando p em evidência do lado direito desta mesma equação, segue que

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}) \tag{1-20}$$

Defina

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}) & \text{(1-21)} \\ \beta &= (a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}). & \text{(1-22)} \end{aligned}$$

Disto, e das equações (1-19) e (1-20), resulta que

$$\begin{aligned} a_n p^n &= -q\alpha & \text{(1-23)} \\ a_0 q^n &= -p\beta. & \text{(1-24)} \end{aligned}$$

Como $a_0, a_1, \cdots, a_n, p$ e q são todos inteiros, segue que α e β também são inteiros e, consequentemente, $\frac{a_n p^n}{q}$ e $\frac{a_0 q^n}{p}$ são inteiros. Assim, $a_n p^n$ é divisível por q e $a_0 q^n$ é divisível por p. Disto, e do fato de p e q serem primos entre si, segue que a_n é divisível por q e a_0 é divisível por p. Isto prova o teorema.

□

O teorema acima fornece informações importantes para encontrar soluções racionais de equações polinomiais com coeficientes inteiros. Mais precisamente, para encontrar tais soluções é suficiente encontrar os divisores dos termos a_n e a_0, formar números racionais com estes divisores e verificar quais destes números são soluções da equação. O exemplo a seguir ilustra este argumento.

Considere a equação polinomial $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$, por exemplo. Veja que os coeficientes de p são inteiros e, por isto, pode-se encontrar soluções racionais para esta equação. Pelo Teorema das Raízes Racionais tem-se que as possíveis soluções são da forma $\dfrac{p}{q}$, onde p é divisor de $a_0 = 3$ e q é divisor positivo de $a_n = 2$. Assim,

$$p \in \{-1, 1, -3, 3\} \text{ e } q \in \{1, 2\}. \tag{1-25}$$

Com isto, os candidatos as raízes racionais da equação $p(x) = 0$ são

$$\left\{-1, 1, 3, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}. \tag{1-26}$$

Verificando cada termo desse conjunto, tem-se:

• para $x = -1$,

$$P(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 8(-1) + 3 = 12, \tag{1-27}$$

e, por isso, $x = -1$ não é raiz da equação $p(x) = 0$.

• para $x = 1$,

$$p(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 0 \tag{1-28}$$

Com isso, $x = 1$ é raiz da equação $p(x) = 0$. Pelo Teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $x-1$. Procedendo com a divisão de $p(x)$ por $x-1$ por meio do método da chave, encontramos que

$$p(x) = (x-1)(2x^2 + 5x - 3). \tag{1-29}$$

Assim, o problema de resolver a equação $p(x) = 0$ se reduz a conhecer as raízes da equação do segundo grau $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Pela Fórmula de Bháskara segue que as raízes desta equação do segundo grau são $x = -3$ e $x = \frac{1}{2}$. Como estas raízes são também raízes da equação $p(x) = 0$, segue que as soluções de $p(x) = 0$ são dadas por

$$x_0 = -3, \;\; x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_2 = 1. \tag{1-30}$$

No capítulo seguinte estudaremos métodos de solubilidade de equações do terceiro grau por meio de métodos álgebricos e numéricos.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO TERCEIRO GRAU: MÉTODOS DE SOLUBILIDADE

Neste capítulo, serão apresentadas as principais técnicas para obtenção de solução de equações do tipo

$$f(x) = 0, \tag{2-1}$$

onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial cúbica da forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{2-2}$$

Os resultados apresentados neste capítulo se baseiam nos trabalhos de Barroso *et al* ([2], 1987), Filho ([7], 2019), Lima ([9], 1987), Lima ([10], 2006), Moreira ([11], 1994), Novaes ([13], 2018) e Ruggiero ([15], 1996).

Dentre as técnicas de solubilidade da equação do terceiro grau que serão abordadas neste trabalho destacam-se: As relações de Girard, o dispositivo prático de Briot-Ruffini, o Método de Cardano-Tartaglia e o Método de Newton.

Um passo importante no estudo de raízes de equações é a localização desta raiz. Na seção a seguir será apresentada uma técnica para localização (ou isolamento) de raízes de equações do terceiro grau.

2.1 Localização de Raízes

Nesta seção, será apresentado um método para isolamento e localização das raízes da função polinomial cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Mais precisamente, será mostrado um resultado que garante existência de um intervalo real que contém as raízes desta função. Este resultado é conhecido como Teorema do Valor Intermediário e será enunciado a seguir. A demonstração que será apresentada se baseia nas ideias de Lima ([10], 2006) e Stewart ([16], 2013).

Segundo Lima (2006, p. 77), o teorema do valor intermediário "é do tipo dos chamados "teoremas de existência". Sob certas condições, ele assegura a existência de uma raiz para a equação $f(x) = c$".

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Intermediário) *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$, tal que, $f(a) < c < f(b)$. Então, existe $x_0 \in (a,b)$, tal que, $f(x_0) = c$.*

Demonstração: Defina $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - c$. Observe que g é uma função contínua, pois é a diferença entre duas funções contínuas. Além disso, $g(a) = f(a) - c$ e $g(b) = f(b) - c$. Logo, $g(a) < 0 < g(b)$. Seja

$$x_0 = \frac{a+b}{2}. \tag{2-3}$$

Se $g(x_0) = 0$, então $f(x_0) = c$. Caso contrário, tem-se duas possibilidades: $g(x_0) < 0$ ou $g(x_0) > 0$. Considere o caso $g(x_0) < 0$ e defina $a_1 = x_0$ e $b_1 = b$. Neste caso, tem-se $g(a_1) < 0 < g(b_1)$. Seja

$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}. \tag{2-4}$$

Se $g(x_1) = 0$, então $f(x_1) = c$. Caso contrário, tem-se duas possibilidades: $g(x_1) < 0$ ou $g(x_1) > 0$. Considere o caso $g(x_1) < 0$ e defina $a_2 = x_1$ e $b_2 = b$. Neste caso, tem-se $g(a_2) < 0 < g(b_2)$. Seja

$$x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}. \tag{2-5}$$

Se $g(x_2) = 0$, então $f(x_2) = c$. Novamente, caso contrário, tem-se duas possibilidades: $g(x_2) < 0$ ou $g(x_2) \geq 0$. Depois de n iterações, definindo

$$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}, \tag{2-6}$$

tem-se duas possibilidades: $g(x_n) < 0$ ou $g(x_n) \geq 0$. Seguindo este argumento sucessivamente, pode-se construir uma sequência de intervalos $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, para $i \in \mathbb{N}$, que satisfazem $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots$.

Assim, $\{a, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ é uma sequência crescente de números reais e $\{b, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$ é uma sequência decrescente de números reais, tais que, $g(a_n) < 0 \leq g(b_n)$. Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados[1], existe pelo menos um $x_0 \in [a_n, b_n]$.

[1]**Teorema (Intervalos Encaixados) [Lima (2006, p. 17)]** Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c, tal que, $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que, $\lim a_n = x_0 = \lim b_n$. Pela continuidade da função g,

$$0 \leq \lim g(b_n) = g(x_0) = \lim g(a_n) \leq 0. \tag{2-7}$$

Portanto, $g(x_0) = 0$. Assim, $f(x_0) = c$. O caso em que $g(x_n) \geq 0$ segue por analogia.

□

De acordo com Stewart (2013, p. 115), "o Teorema do Valor Intermediário afirma que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre os valores de $f(a)$ e $f(b)$".

O caso particular em que $c = 0$ será de fundamental importância para mostrar existência de solução para equação cúbica. Este caso é denominado **Teorema de Bolzano** e será enunciado a seguir.

Teorema 2.2 (Bolzano) *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $x_0 \in (a,b)$, tal que, $f(x_0) = 0$, isto é, x_0 é uma raiz da função f.*

Demonstração: A prova é consequência direta do Teorema do Valor Intermediário tomando $c = 0$.

□

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. O resultado a seguir mostra que a função f admite pelo menos uma raiz real e fornece um intervalo que contém esta raiz. A prova dada segue as ideias em Lima ([10], 2006).

Teorema 2.3 *Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então existe pelo menos um $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que, $f(x_0) = 0$.*

Demonstração: Primeiro, note que f é uma função contínua, pois toda função polinomial é contínua. Ainda,

$$f(x) = ax^3 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}\right). \tag{2-8}$$

Sem perda de generalidade, considere o caso $a > 0$. Assim, por (2-8), tem-se,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^3 = -\infty \text{ e } \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^3 = \infty. \tag{2-9}$$

Logo, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que, $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$. Pelo Teorema de Bolzano, existe $x_0 \in (\alpha, \beta)$, tal que, $f(x_0) = 0$ e x_0 é uma raiz real de f.

□

Em geral, equações polinomiais do grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real. De fato, como as raízes não reais ocorrem aos pares e tais equações possuem um número ímpar de raízes, então ao menos uma dessas raízes precisa ser real.

Note que, o teorema acima garante que toda equação do terceiro grau admite pelo menos uma solução real, mas não garante unicidade da solução no intervalo considerado. Com isto, pode ocorrer de existir mais que uma solução neste intervalo. Para garantir unicidade de solução é necessário conhecer informações adicionais sobre a função. O resultado apresentado a seguir mostra como garantir unicidade da raiz da função cúbica no intervalo encontrado pelo Teorema anterior.

Teorema 2.4 *Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e suponha que $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$), para todo $x \in [a,b]$. Então existe um único $x_0 \in [a,b]$, tal que, $f(x_0) = 0$.*

Demonstração: Suponha que $f'(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$. Com isto, pelo teste da primeira derivada, f é estritamente crescente em $[a,b]$. Consequentemente, $f(x) < f(y)$, para $x < y$. Suponha, por absurdo, que existam $x_0, x_1 \in [a,b]$, tais que, $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Logo, tem-se dois casos,
(i) Se $x_0 < x_1$, então $0 = f(x_0) < f(x_1) = 0$.
(ii) Se $x_1 < x_0$, então $0 = f(x_1) < f(x_0) = 0$.

Em ambos os casos tem-se um absurdo. Portanto, $x_0 = x_1$ e x_0 é a única raiz de f em $[a,b]$. O caso $f'(x) < 0$, para todo $x \in [a,b]$, é análogo.

□

2.2 As Relações de Girard

As relações de Girard são um conjunto de equações que relacionam as raízes e os coeficientes de uma equação polinomial. Basicamente, este conjunto de equações fornecem uma importante ferramenta para determinação das raízes da equação. A quantidade de equações deste conjunto depende do grau do polinômio em estudo. O Teorema a seguir mostra como determinar as relações de Girard para uma equação polinomial do grau n.

Teorema 2.5 (Relações de Girard) *Se $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ são as soluções da equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, então, para $i \neq j \neq k$,*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n & = & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + \cdots + x_ix_j + \cdots + x_{n-1}x_n & = & \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + \cdots + x_ix_jx_k + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n & = & -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ & \vdots & \\ x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n & = & (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{array}\right. \tag{2-10}$$

Demonstração: Como $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ são as raízes da função

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{2-11}$$

então f pode ser escrita da forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n). \tag{2-12}$$

Assim, dividindo os lados da equação anterior por $a_n \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{a_n} &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n) \\
&= (x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n) \\
&= (x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x+x_1x_2x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n) \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
&= x^n - \sum_{i=1}^{n} x_i x^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i x_j.
\end{aligned} \tag{2-13}$$

Disto e de (2-12), segue

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x^{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \cdots, \quad \prod_{i=1}^{n} x_i x_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}, \tag{2-14}$$

o que é equivalente as equações dadas em (2-10), provando assim o teorema.

□

No caso $n = 3$, sendo x_1, x_2 e x_3 raízes de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, então pode-se escrever $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, de onde

$$\begin{aligned}
x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\
&= (x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)(x-x_3) \\
&= x^3 - x_3x^2 - (x_1+x_2)x^2 + (x_1+x_2)x_3x + x_1x_2x - x_1x_2x_3 \\
&= x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

Assim, as **Relações de Girard** para equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ se reduzem a

$$\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a}, \\
x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}.
\end{cases} \tag{2-15}$$

Para encontrar as soluções da equação do terceiro grau $x^3-9x^2+23x-15=0$, por exemplo, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 9, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= 23, \\ x_1x_2x_3 &= 15. \end{cases} \tag{2-16}$$

Observe que o sistema acima é muito complicado de resolver por métodos usuais de matemática. Vale ressaltar que, para utilização das equações de Girard, é necessário conhecer alguma característica das raízes da função. Suponha, neste caso, que as raízes x_1, x_2 e x_3 formam uma progressão aritmética de razão R. Assim, suponha

$$x_1 = x_2 - R \text{ e } x_3 = x_2 + R. \tag{2-17}$$

Substituindo estas igualdades na primeira das equações de Girard, tem-se,

$$(x_2-R)+x_2+(x_2+R)=9, \tag{2-18}$$

donde $x_2=3$. Com isto, $x^3-9x^2+23x-15$ é divisível por $x-3$. Logo, pode-se escrever,

$$x^3-9x^2+23x-15=p(x)(x-3), \tag{2-19}$$

onde $p(x)$ é um polinômio do grau 2. Procedendo com a divisão euclidiana acima para obtenção de $p(x)$, tem-se $p(x)=x^2-6x+5$ e, consequentemente,

$$x^3-9x^2+23x-15=(x-3)(x^2-6x+5). \tag{2-20}$$

Note que, as raízes da equação $x^2-6x+5=0$ são também raízes de

$$x^3-9x^2+23x-15=0. \tag{2-21}$$

Portanto, $x_1=1$, $x_2=3$ e $x_3=5$ são as soluções da equação do terceiro grau dada.

Note que a utilização das relações de Girard somente é eficaz quando se conhece alguma informação adicional sobre as raízes da função. Caso contrário, o sistema dado em (2-10) torna-se de difícil solução. Por isto, há a necessidade de conhecer métodos mais eficazes para obtenção de solução de equações do terceiro grau. Nas seções a seguir serão apresentados métodos alternativos para resolver equações polinomiais do terceiro grau sem o conhecimento prévio de informações sobre as raízes destas equações.

2.3 O Dispositivo de Briot-Ruffini

Nesta seção, será apresentada a forma geral do algoritmo de Briot-Ruffini para obtenção de solução para equações polinomiais do terceiro grau. De modo geral, o dispositivo de Briot-Ruffini é utilizado como algoritmo para o processo de divisão do polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ por polinômios do primeiro grau da forma $g(x) = x - x_0$. No caso particular em que $n = 3$ e x_0 é uma raiz de $f(x)$, então o dispositivo de Briot-Ruffini se torna eficiente para resolver equações do terceiro grau, uma vez que o polinômio resultante da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é um polinômio do segundo grau que pode ser resolvido pela fórmula de Bháskara. Mais precisamente, se x_0 é uma raiz de $f(x)$, então pode-se decompor $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ como

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_0)(a_3x^2 + (a_3x_0 + a_2)x + (a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1)). \quad (2\text{-}22)$$

Consequentemente, as raízes da equação $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ são $x = x_0$ e

$$x = \frac{-(a_3x_0 + a_2) \pm \sqrt{(a_3x_0 + a_2)^2 - 4a_3(a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1)}}{2a_3}. \quad (2\text{-}23)$$

A seguir, será descrito o algoritmo de Briot-Ruffini para solução de equações polinomiais. A ideia central é decompor o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ como um produto de polinômios da forma $f(x) = (x - x_0)g(x)$ onde $g(x) = b_n x^{n-1} + \cdots + b_2x + b_1$ é uma função polinomial do grau $n - 1$, x_0 é uma raiz de $f(x)$ e $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$. Para isto, considere o polinômio $f(x)$, de grau n, na forma geral

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x(x(x(x(\cdots x(xa_n + a_{n-1}) + \cdots a_4) + a_3) + a_2) + a_1) + a_0. \end{aligned} \quad (2\text{-}24)$$

Defina

$$b_n = a_n,\ \ b_{n-1} = xb_n + a_{n-1},\ \ \cdots, b_2 = xb_3 + a_2,\ \ b_1 = xb_2 + a_1,\ \ b_0 = xb_1 + a_0. \quad (2\text{-}25)$$

Então, a equação (2-24) se reduz a

$$f(x) = b_0. \quad (2\text{-}26)$$

Mais geralmente, o algoritmo de Briot-Ruffini pode ser escrito de forma compacta como

$$b_n = a_n,\ \ b_i = xb_{i+1} + a_i,\ \ 0 \le i \le n - 1. \quad (2\text{-}27)$$

O Dispositivo é comumente escrito na forma geral dada pela tabela a seguir:

Coeficientes de $f \longrightarrow$		a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
Operações$\longrightarrow$	x_0	$\downarrow$	$b_n x_0 + a_{n-1}$	$\cdots$	$b_3 x_0 + a_2$	$b_2 x_0 + a_1$	$b_1 x_0 + a_0$
Coeficientes de $g \longrightarrow$		b_n	b_{n-1}	$\cdots$	b_2	b_1	b_0

Disto, segue

$$f(x) = (x - x_0)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x_1 + b_1). \tag{2-28}$$

No caso particular em que $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e x_0 é uma raiz de f, o dispositivo de Briot-Ruffini para resolução da equação $f(x) = 0$ se reduz a decompor o polinômio cúbico utilizando o seguinte algoritmo:

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0	$\downarrow$	$b_3 x_0 + a_2$	$b_2 x_0 + a_1$	$b_1 x_0 + a_0$
	$b_3 = a_3$	b_2	b_1	0

Desta forma:

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_0)(b_3 x^2 + b_2 x + b_1).$$

Em resumo, para resolver a equação cúbica $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, conhecendo uma solução x_0 para esta equação, é suficiente utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para decompor a equação na forma $(x - x_0)(b_3 x^2 + b_2 x + b_1) = 0$ e resolver a equação do segundo grau $b_3 x^2 + b_2 x + b_1 = 0$ pelos métodos clássicos.

Para encontrar os zeros do polinômio do terceiro grau $f(x) = 5x^3 - 45x^2 + 130x - 120$, por exemplo, basta observar que $x_0 = 2$ é um zero de f e utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para decompor este polinômio. De fato, veja que

$$f(2) = 5 \cdot 2^3 - 45 \cdot 2^2 + 130 \cdot 2 - 120 = 0.$$

Assim, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini para decompor o polinômio f, tem-se

	5	-45	130	-120
2	$\downarrow$	$5 \cdot 2 - 45$	$-35 \cdot 2 + 130$	$-60 \cdot 2 + 120$
	5	-35	60	0

Consequentemente,

$$f(x) = (x - 2)(5x^2 - 35x + 60). \tag{2-29}$$

Com isto, $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = 2$ ou $5x^2 - 35x + 60 = 0$. Resolvendo esta equação quadrática pela fórmula de Bháskara, obtém-se:

$$x = \frac{-(-35) \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 60}}{2 \cdot 5} = \frac{35 \pm 5}{10}$$

e, com isto, $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$. Assim, as raízes da equação do terceiro grau $5x^3 - 45x^2 + 130x - 120 = 0$ são $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.

2.4 O Método de Cardano-Tartaglia

Nesta seção, será apresentado o Método de Cardano-Tartaglia para obtenção de uma solução da equação polinomial do 3° grau da forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2-30}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, o objetivo desta seção é estabelecer resultados de existência de soluções para equação (2-30) e determinar como são estas soluções.

> As raízes da equação do terceiro grau podem ser obtidas através das fórmulas de Cardano-Tartaglia, publicadas por Girolamo Cardano (1501-1576) no livro *Ars Magna* em 1545. Por muito tempo, tais fórmulas ficaram conhecidas simplesmente como "Fórmulas de Cardano", embora tenham sido descobertas por Scipione Del Ferro (1465-1526) e redescobertas por Tartaglia (1500-1557). A contribuição de Cardano foi desenvolver um método que reduz a equação geral a um caso particular, no qual um dos coeficientes é nulo. (Filho e Pereira, 2019, p. 205).

Os resultados desta seção são consequências dos trabalhos de Filho e Pereira ([7], 2019), Lima ([9], 1987), Moreira ([11], 1994) e Rechtschaffen ([14], 2009). Primeiro, será provado um teorema que fornece uma expressão para solução da equação (2-30).

Teorema 2.6 (Fórmula de Cardano-Tartaglia) *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e defina*

$$\alpha = \frac{b}{a}, \ \ \beta = \frac{c}{a} \ \ e \ \ \gamma = \frac{d}{a}. \tag{2-31}$$

Então,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{\alpha}{3} \tag{2-32}$$

é uma raiz da equação cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde

$$p = \beta - \frac{\alpha^2}{3} \ \ e \ \ q = \frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha\beta}{3} + \gamma. \tag{2-33}$$

Demonstração: Dividindo ambos os lados da equação cúbica $ax^3+bx^2+cx+d=0$ por a e utilizando (2-31), tem-se

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0. \tag{2-34}$$

Assim, x é solução de (2-30) se, e somente se, x é solução de (2-31). Com isto, o problema de encontrar uma solução de (2-30) se transforma no problema de determinar os valores de x para os quais a equação (2-34) é satisfeita. Para isto, defina

$$y=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}, \tag{2-35}$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da equação quadrática $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

Para simplificar os cálculos, defina $S=x_1+x_2$ e $P=x_1x_2$. Elevando ambos os lados da equação (2-35) ao cubo, tem-se

$$\begin{aligned} y^3 &= (\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})^3 \\ &= x_1+3(\sqrt[3]{x_1})^2\sqrt[3]{x_2}+3\sqrt[3]{x_1}(\sqrt[3]{x_2})^2+x_2 \\ &= x_1+3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}+3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}\sqrt[3]{x_2}+x_2 \\ &= x_1+3\sqrt[3]{x_1x_1x_2}+3\sqrt[3]{x_1x_2x_2}+x_2. \end{aligned} \tag{2-36}$$

Colocando em evidência o termo $3\sqrt[3]{x_1x_2}$, segue que

$$y^3=x_1+x_2+3\sqrt[3]{x_1x_2}(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}). \tag{2-37}$$

Substituindo $x_1+x_2=S$, $x_1x_2=P$ e $y=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$, em (2-37),

$$y^3-3\sqrt[3]{P}y-S=0. \tag{2-38}$$

Assim, tem-se que para encontrar o valor de y, é necessário resolver uma equação cúbica que não tem a presença do termo quadrático. Neste ponto, será necessário fazer uma mudança de variável na equação (2-34) de forma que o coeficiente do termo y^2 da equação resultante seja zero. Para isso, defina

$$x=y+t. \tag{2-39}$$

Disto, e de (2-34),

$$(y+t)^3+\alpha(y+t)^2+\beta(y+t)+\gamma=0. \tag{2-40}$$

Resolvendo o cubo e o quadrado na equação anterior, e agrupando os termos comuns, segue que

$$y^3+(3t+\alpha)y^2+3yt^2+t^3+2yt\alpha+\alpha t^2+\beta y+\beta t+\gamma=0. \tag{2-41}$$

Veja, neste caso, que para anular o coeficiente do termo quadrático é preciso tomar $t=-\dfrac{\alpha}{3}$. Substituindo este valor de t na equação (2-41), tem-se a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} y^3 &+ \left(3\left(-\frac{\alpha}{3}\right)+\alpha\right)y^2+3y\left(-\frac{\alpha}{3}\right)^2+\left(-\frac{\alpha}{3}\right)^3+ \\ &+ 2y\left(-\frac{\alpha}{3}\right)\alpha+\alpha\left(-\frac{\alpha}{3}\right)^2+\beta y+\beta\left(-\frac{\alpha}{3}\right)+\gamma=0. \end{aligned} \tag{2-42}$$

Assim,

$$y^3+\frac{3\alpha^2 y}{9}-\frac{\alpha^3}{27}-\frac{2y\alpha^2}{3}+\frac{\alpha^3}{9}+\beta y-\frac{\alpha\beta}{3}+\gamma=0. \tag{2-43}$$

e, disto,

$$y^3+\frac{\alpha^2 y}{3}-\frac{\alpha^3}{27}-\frac{2y\alpha^2}{3}+\frac{3\alpha^3}{27}+\beta y-\frac{\alpha\beta}{3}+\gamma=0. \tag{2-44}$$

Consequentemente,

$$y^3-\frac{\alpha^2 y}{3}+\frac{2\alpha^3}{27}+\beta y-\frac{\alpha\beta}{3}+\gamma=0. \tag{2-45}$$

Reduzindo os termos comuns, obtém-se a seguinte equação cúbica sem o termo quadrático

$$y^3+\left(\beta-\frac{\alpha^2}{3}\right)y+\left(\frac{2\alpha^3}{27}-\frac{\alpha\beta}{3}+\gamma\right)=0. \tag{2-46}$$

Como, por (2-33), $p=\beta-\dfrac{\alpha^2}{3}$ e $q=\dfrac{2\alpha^3}{27}-\dfrac{\alpha\beta}{3}+\gamma$, tem-se a equação simplificada,

$$y^3+py+q=0. \tag{2-47}$$

Comparando (2-38) e (2-47), pode-se afirmar que, $p=-3\sqrt[3]{P}$ e $q=-S$, onde $S=x_1+x_2$, $P=x_1x_2$ e x_1 e x_2 são raízes de $x^2-Sx+P=0$. Logo,

$$P=\frac{-p^3}{27} \;\; e \;\; S=-q. \tag{2-48}$$

Substituindo $P=x_1x_2$ e $S=x_1+x_2$ nas duas igualdades acima,

$$x_1x_2=\frac{-p^3}{27} \;\; \text{e} \;\; x_1+x_2=-q. \tag{2-49}$$

Da segunda das igualdades de (2-49), tem-se $x_2=-q-x_1$. Substituindo esta igualdade na primeira das igualdades de (2-49), tem-se

$$x_1(-q-x_1) = \frac{-p^3}{27}. \tag{2-50}$$

Note que a equação (2-50) é equivalente a equação do segundo grau

$$x_1^2 + qx_1 - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{2-51}$$

Resolvendo a equação (2-51) pela Fórmula de Bháskara, segue que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-q+\sqrt{q^2+4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2+4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2+\frac{4p^3}{27}}{4}} \\ &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \end{aligned} \tag{2-52}$$

Substituindo (2-52) em $x_2 = -q - x_1$ pode-se determinar o valor de x_2, ou seja,

$$x_2 = -q - \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right) = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{2-53}$$

Determinadas as raízes x_1 e x_2 da equação $x^2 - Sx + P = 0$, para encontrar o valor de y, basta substituir os valores de x_1 e x_2 em (2-35). Assim,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{2-54}$$

Então, para determinar o valor de x, basta substituir (2-54) em (2-39), isto é, em $x = y - \frac{\alpha}{3}$. Assim,

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{\alpha}{3} \tag{2-55}$$

é, de fato, uma raiz da equação (2-30).

□

> As fórmulas de Cardano-Tartaglia foram uma importante motivação para a introdução dos números complexos, no entanto convém destacar que essas fórmulas não são muito práticas. Basta observar que aplicando-as às equações do terceiro grau que possuem três raízes reais, recaímos na necessidade de utilizar funções trigonométricas inversas para chegar em aproximações decimais de cada raiz. (Filho e Pereira, 2019, p. 205).

É importante destacar que o radicando $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ na equação (2-32) tem papel fundamental para determinação da quantidade de raízes reais para equação cúbica

$x^3 + px + q = 0$. Mais precisamente, se este radicando é positivo, zero ou negativo, a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ tem, respectivamente, uma raiz real, três raízes reais (com uma das raízes de multiplicidade dois) e três raízes reais distintas. Este resultado será provado à seguir no Teorema 2.7. O mais surpreendente é o caso onde o radicando Δ é negativo e, mesmo assim, as raízes são reais e distintas.

> Este é um aspecto paradoxal da fórmula de Cardano e Tartaglia. Quando $\Delta < 0$, a fórmula exprime x como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto, este é o caso em que a equação possui três raízes reais distintas. Este é chamado tradicionalmente o "caso irredutível"porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau. (Lima, 1987, p. 17).

O resultado que será apresentado a seguir determina condições para garantir existência de soluções reais da equação $x^3 + px + q = 0$. Neste teorema, para facilitar os cálculos, o discriminante Δ definido acima foi substituido pelo discriminante $\delta = 27q^2 + 4p^2$ pela seguinte relação

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^2}{108} = \frac{\delta}{108}. \tag{2-56}$$

A seguir está enunciado e provado este teorema:

Teorema 2.7 *Sejam* $f(x) = x^3 + px + q$ *e*

$$\delta = 27q^2 + 4p^3. \tag{2-57}$$

(i) Se $\delta > 0$*, então* $f(x)$ *admite uma raiz real;*

(ii) Se $\delta = 0$*, então* $f(x)$ *admite duas raízes reais, sendo uma raiz dupla;*

(iii) Se $\delta < 0$*, então* $f(x)$ *admite três raízes reais.*

Demonstração: A prova deste resultado será feita por meio de uma análise do gráfico de $f(x) = x^3 + px + q$. Note que se, x é um ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo$-x$, então x será uma raiz real da equação $f(x) = 0$. Primeiramente, veja que

$$f(x) = x^3 + px + q = x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right). \tag{2-58}$$

Definindo

$$g(x) = 1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}, \tag{2-59}$$

tem-se que $f(x) = x^3 g(x)$,

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 0. \tag{2-60}$$

Disto, para x suficientemente grande,

$$sign(g(x)) = sign(1) > 0 \text{ e } sign(f(x)) = sign(x^3) = sign(x). \tag{2-61}$$

Para Lima (1987, p. 20), isto significa que "o sinal[2] de $f(x)$, quando o valor absoluto de x é muito grande, é o mesmo sinal de x^3, isto é, de x. Em particular, o polinômio $f(x)$ é negativo para valores muito grandes negativos de x e é positivo se x é um número positivo muito grande". Assim,

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) < 0 < \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x), \tag{2-62}$$

de onde existem $x_1 \in (-\infty, 0)$ e $x_2 \in (0, +\infty)$, tais que, $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ e, como f é contínua, pelo Teorema de Bolzano, existe $x \in \mathbb{R}$, tal que, $f(x) = 0$.

Conclui-se com todo esse argumento que se f possui pelo menos uma raiz real, ou seja, o gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ intersecta o eixo$-x$ em pelo menos um ponto. Note que, as derivadas de primeira e segunda ordem de f são

$$f'(x) = 3x^2 + p \;\text{ e }\; f''(x) = 6x. \tag{2-63}$$

Com isto, pode-se considerar os seguintes casos:

Caso 1: p é positivo.

Neste caso, $f'(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, por estudos da teoria das derivadas, f é uma função crescente que intersecta o eixo$-x$ em um único ponto. Consequentemente, a equação $x^3 + px + q = 0$ terá uma única solução real (positiva, negativa ou nula) e duas soluções complexas conjugadas.

Caso 2: $p = q = 0$.

Neste caso, a função f pode ser escrita como $f(x) = x^3$. Assim, a equação $f(x) = 0$ tem uma raiz real tripla em $x = 0$.

Caso 3: $p = 0$ e $q \neq 0$.

Neste caso, a função f se reduz à $f(x) = x^3 + q$. Assim, a equação $f(x) = 0$ tem uma raiz real simples da forma $x = \sqrt[3]{-q}$ e duas raízes complexas conjugadas.

Caso 4: p é negativo.

[2] $sign(f(x)) =$ sinal da função $f(x)$.

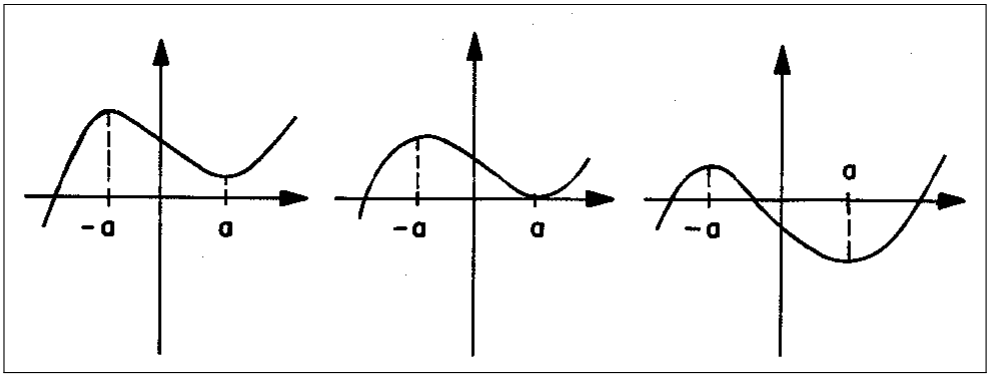
Neste caso, seja $p = -3a^2$, para $a < 0$. Assim, por (2-63), $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$. Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, tem-se que $x = -a$ e $x = a$ são os únicos pontos críticos de f. Novamente por (2-63), $f''(-a) < 0$ e $f''(a) > 0$. Com isto, $x = a$ e $x = -a$ são, respectivamente, um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local de f. Disto, pode-se ter,

$$f(\pm a) < 0,\ \ f(\pm a) > 0,\ \ f(-a) = 0 \ \text{ ou } \ f(a) = 0,\ \text{ ou } \ f(a) < 0 < f(-a). \qquad (2\text{-}64)$$

Assim,
(i) f tem uma única raiz real e duas complexas se $f(-a) < 0$ e $f(a) < 0$;
(ii) f tem uma única raiz real e duas complexas se $f(-a) > 0$ e $f(a) > 0$;
(iii) f tem uma raiz real simples e uma raiz real dupla se $f(-a) = 0$ ou $f(a) = 0$;
(iv) f tem três raízes reais distintas se $f(a) < 0 < f(-a)$.

A figura 2.1 a seguir representa as situações $(ii), (iii)$ e (iv) descritas acima:

Figura 2.1: *O gráfico de f*



Fonte: LIMA (1987, p. 22)

Ou seja, dos itens anteriores pode-se concluir que f tem uma raiz real se $f(-a)f(a) > 0$, f tem três raízes reais, sendo duas iguais, se $f(-a)f(a) = 0$ e f tem três raízes reais distintas se $f(-a)f(a) < 0$. Veja que,

$$\begin{aligned} f(a) &= a^3 - 3a^2a + q = a^3 - 3a^3 + q = q - 2a^3 & (2\text{-}65)\\ f(-a) &= -a^3 - 3a^2(-a) + q = -a^3 + 3a^3 + q = q + 2a^3. & (2\text{-}66)\end{aligned}$$

Com isso,

$$f(a)f(-a) = (q - 2a^3)(q + 2a^3) = q^2 + 2a^3q - 2a^3q - 4a^6 = q^2 - 4a^6. \qquad (2\text{-}67)$$

Lembrando que $p = -3a^2$, elevando os lados desta igualdade ao cubo e isolando o valor de a^6, tem-se $-a^6 = \dfrac{p^3}{27}$. Substituindo este resultado em (2-67) e utilizando (2-57), segue,

$$f(a)f(-a) = q^2 + 4a^6 = q^2 + 4\frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{27} = \frac{\delta}{27}. \tag{2-68}$$

Logo, o sinal de $f(a)f(-a)$ será o mesmo sinal do discriminante δ. Conclui-se que a função $f(x) = x^3 + px + q$ possui uma, duas ou três raízes reais distintas de acordo com o valor de δ.

$\square$

O teorema que será apresentado a seguir é um resultado de Filho e Pereira ([7], 2019) que relaciona duas raízes reais da equação cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com uma raiz real já calculada desta equação.

Teorema 2.8 (Relação Entre as Raízes) *Sejam $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e $x_1 \in \mathbb{R}$ uma raiz da equação $f(x) = 0$. Então, as outras raízes de $f(x) = 0$ são dadas por*

$$x_2 = -\frac{(ax_1 + b) - \sqrt{b^2 - 3ac - af'(x_1)}}{2a} \quad e \quad x_3 = -\frac{(ax_1 + b) + \sqrt{b^2 - 3ac - af'(x_1)}}{2a},$$

onde $f'(x_1)$ é a derivada de f em x_1.

Demonstração: Seja $x_1 \in \mathbb{R}$, tal que, $f(x_1) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &= ax^3 + bx^2 + cx + d - ax_1^3 - bx_1^2 - cx - d \\ &= a(x^3 - x_1^3) + b(x^2 - x_1^2) + c(x - x_1) \\ &= a(x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2) + b(x - x_1)(x + x_1) + c(x - x_1) \\ &= (x - x_1)(a(x^2 + xx_1 + x_1^2) + b(x + x_1) + c) \\ &= (x - x_1)(ax^2 + (ax_1 + b)x + (ax_1^2 + bx_1 + c)). \end{aligned} \tag{2-69}$$

Definindo $g(x) = ax^2 + (ax_1 + b)x + (ax_1^2 + bx_1 + c)$, escreve-se

$$f(x) = (x - x_1)g(x). \tag{2-70}$$

Assim, $f(x) = 0$ se, e somente se, $x - x_1 = 0$ ou $g(x) = 0$. Como a primeira condição já ocorre, resta analisar para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ tem-se $g(x) = 0$, ou seja,

$$ax^2 + (ax_1 + b)x + (ax_1^2 + bx_1 + c) = 0. \tag{2-71}$$

Resolvendo esta equação pela fórmula de Bháskara e observando que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, tem-se

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(ax_1+b) \pm \sqrt{(ax_1+b)^2 - 4a(ax_1^2+bx_1+c)}}{2a} \\
&= \frac{-(ax_1+b) \pm \sqrt{a^2x_1^2 + 2abx_1 + b^2 - 4a^2x_1^2 - 4abx_1 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(ax_1+b) \pm \sqrt{(b^2-3ac) - 3a^2x_1^2 - 2abx_1 - ac}}{2a} \\
&= \frac{-(ax_1+b) \pm \sqrt{(b^2-3ac) - a(3ax_1^2 - 2bx_1 - c)}}{2a} \\
&= \frac{-(ax_1+b) \pm \sqrt{b^2-3ac-af'(x_1)}}{2a} \qquad (2\text{-}72)
\end{aligned}
$$

Assim, as outras duas raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são

$$x_2 = -\frac{(ax_1+b) - \sqrt{b^2-3ac-af'(x_1)}}{2a} \quad \text{e} \quad x_3 = -\frac{(ax_1+b) + \sqrt{b^2-3ac-af'(x_1)}}{2a}.$$

□

Segundo Filho e Pereira (2019, p. 208), "se uma das raízes do polinômio $f(x)$ for previamente conhecida, podemos aplicar diretamente o Teorema para determinar as demais raízes".

Para encontrar as raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, por exemplo, basta observar que $x_1 = 1$ é raiz desta equação e, em seguida, utilizar o Teorema 2.8 para determinar as outras duas raízes. De fato, defina $x_1 = 1$ é raiz de $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, pois

$$1^3 - 7\cdot 1^2 + 14\cdot 1 - 8 = 1 - 7 + 14 - 8 = 0.$$

Defina $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Assim, $f'(x) = 3x^2 - 14x + 14$. Então, pelo Teorema 2.8, tem-se

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{(ax_1+b) \pm \sqrt{b^2-3ac-af'(x_1)}}{2a} \\
&= -\frac{(1\cdot 1 + (-7)) \pm \sqrt{(-7)^2 - 3\cdot 1\cdot 14 - 1\cdot(3\cdot 1^2 - 14\cdot 1 + 14)}}{2\cdot 1} \\
&= -\frac{-6 \pm \sqrt{49-42-3}}{2} \\
&= -\frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} \\
&= -\frac{-6 \pm 2}{2}
\end{aligned}
$$

Assim, as outras duas raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ são $x_2 = 2$ e $x_3 = 4$.

Observe que, para aplicação do Teorema 2.8, é necessário conhecer à priori uma raiz da equação cúbica. Quando não se conhece previamente nenhuma raiz, utiliza-se a fórmula de Cardano-Tartaglia dada no Teorema 2.6 para calcular a primeira raiz e, em seguida, utiliza-se o Teorema 2.8 para calcular as outras duas raízes desta equação.

Também, ainda segundo Filho e Pereira (2019, p. 209), "caso não conheçamos nenhuma raiz de $f(x)$, podemos aplicar um dos métodos numéricos para calcular aproximações decimais de uma raiz real. Na sequência, basta aplicar o Teorema 2.8 para deduzir as aproximações decimais das demais raízes".

O teorema apresentado a seguir determina condições para que uma equação cúbica admita somente soluções reais.

Teorema 2.9 *Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se $a > 0$ e existe $x_1 \in \mathbb{R}$, tal que, $f(x_1) = 0$ e $f'(x_1) \leq 0$, então a equação $f(x) = 0$ admite somente raízes reais.*

Demonstração: Note que, $af'(x_1) \leq 0$, onde $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Multiplicando $f'(x)$ por a, tem-se

$$af'(x) = 3a^2x^2 + 2abx + ac. \tag{2-73}$$

Calculando o discriminante Δ[3] da equação do segundo grau $af'(x) = 0$, segue que

$$\Delta = (2ab)^2 - 4(3a^2)(ac) = 4a^2b^2 - 12a^3c = 4a^2(b^2 - 3ac). \tag{2-74}$$

Veja que $\Delta \geq 0$. De fato, se fosse $\Delta < 0$, teria-se que $af'(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é impossível, pois $af'(x_1) \leq 0$. Assim,

$$4a^2(b^2 - 3ac) \geq 0 \tag{2-75}$$

e, consequentemente, $b^2 - 3ac \geq 0$. Disto, $(b^2 - 3ac) - af'(x_1) \geq 0$. Sabendo que as outras raízes x_2 e x_3 da equação $f(x) = 0$ são dadas pelo Teorema 2.8, segue que $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ e, portanto, são reais todas as raízes da equação $f(x) = 0$. Analogamente, se $a < 0$ e $f'(x_1) \geq 0$ então a equação $f(x) = 0$ admite somente raízes reais. Isto prova o Teorema.

□

Na próxima seção, será apresentado um modelo numérico para aproximação de uma solução de equações cúbicas. Este modelo é denominado **Método de Newton**.

[3]Neste teorema, Δ é o discriminante da equação do segundo grau geral $ax^2 + bx + c = 0$ dado por $\Delta = b^2 - 4ac$.

2.5 O Método de Newton

Nesta seção, será apresentado o Método de Newton para solução de equações da forma $f(x) = 0$, onde f é uma função cúbica da forma geral $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A teoria que será desenvolvida aqui se baseia em resultados de Análise Numérica adaptados das bibliografias aqui assumidas. Os principais resultados desta seção são baseados nos trabalhos de Barroso *et al* ([2], 1987) e Ruggiero ([15], 1996). Os pré requisitos para o bom entendimento desta seção são: o Teorema do Valor Intermediário e técnicas clássicas de derivação.

A ideia central do método de Newton é, a partir de uma aproximação inicial dada para a raiz da equação $f(x) = 0$, refinar tal aproximação por meio de um processo iterativo definido por este método. Para isto, primeiro é necessário localizar um intervalo que contenha a raiz exata da equação $f(x) = 0$ e, em seguida, melhorar a aproximação inicial até que se tenha uma solução aproximada com uma precisão ε desejada.

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e com derivadas contínuas até a segunda ordem e suponha que exista um único $\bar{x} \in [a,b]$, tal que, $f(\bar{x}) = 0$ e $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in [a,b]$. Sejam x_0 um ponto inicial e x_n uma sequência (ou aproximação) que converge para o zero $\bar{x}$ de f, ou seja,

$$\bar{x} = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n. \tag{2-76}$$

Como f tem derivadas contínuas de segunda ordem, a expansão em Série de Taylor de primeira ordem para f em torno de x_n é dada por

$$f(x) \simeq f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n). \tag{2-77}$$

Consequentemente, resolvendo a equação $f(x) = 0$, para $x = x_{n+1}$, tem-se

$$0 \;=\; f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \tag{2-78}$$

e, isolando x_{n+1}, segue que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2-79}$$

onde $n \geq 0$ e x_{n+1} é uma aproximação de x_0. A igualdade em (2-79) é denominada **Método de Newton** para aproximação da raiz $\bar{x}$ da equação $f(x) = 0$. A aplicação da igualdade (2-79), para cada $n \in \mathbb{N}$, denomina-se **iteração**.

Geometricamente, x_{n+1} é o ponto de intersecção da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = x_n$ com o eixo das abscissas. De fato, por resultados de Cálculo I, sabemos que a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_n é

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n). \tag{2-80}$$

Quando $y = 0$, esta reta intersecta o eixo das abscissas. Assim, para $y = 0$, tem-se que $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$, ou seja,

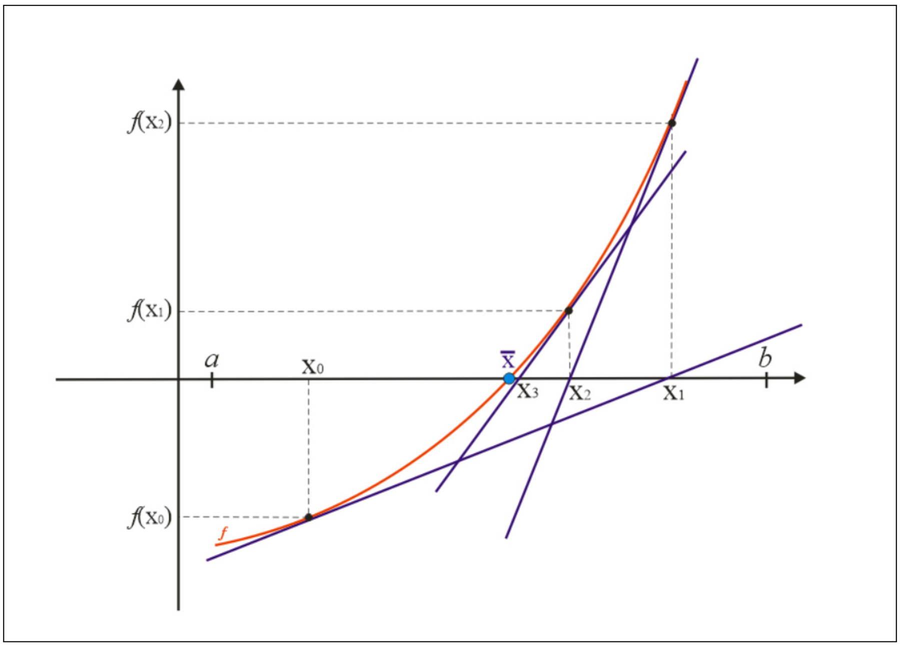
$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2-81}$$

Portanto, quando $x = x_{n+1}$, tem-se a equação (2-79), que é o método de Newton.

> Note que o método de Newton requer que $f'(x_n) \neq 0$, para todo n. No caso em que $f'(x_n) = 0$ (supondo $f(x_n) \neq 0$), a reta tangente à função no ponto x_n é paralela ao eixo das abscissas, e x_{n+1} é indefinido. Porém, se $f'(\overline{x}) = 0$ ($\overline{x}$ é tal que $f(\overline{x}) = 0$) e $f'(x_n) \neq 0$, o método de Newton está bem definido, embora a convergência seja mais lenta. (ARENALES e DAREZZO., 2008, p. 88).

A figura 2.2 a seguir dá uma interpretação geométrica do método de Newton descrito acima.

Figura 2.2: *O Método de Newton*



Fonte: *Adaptado de RUGGIERO (1996, p. 68)*

A curva em vermelho é o gráfico de f enquanto que as retas em azul são as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de aproximação da solução da equação $f(x) = 0$. Observe que as intersecções das retas tangentes ao gráfico de f com eixo das abscissas se aproximam do zero da função f.

A grosso modo, para encontrar a aproximação x_n da raiz $\overline{x}$ segue-se o seguinte procedimento: traça-se uma reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ cuja intersecção com o eixo das absissas é o ponto x_1. A partir do ponto $(x_1, f(x_1))$ traça-se outra reta tangente à curva que passa pelo eixo das absissas no ponto x_2, e este ponto é uma melhor aproximação de $\bar{x}$. Segue-se este passo a passo sucessivamente até que seja determinado $\bar{x} \simeq x_n$ com uma precisão desejada.

Segundo Barroso et al. (1987, p. 123), "o Método de Newton é equivalente a substituir um pequeno arco da curva $y = f(x)$ por uma reta tangente, traçada a partir de um ponto da curva".

Pode ocorrer, dependendo da escolha do ponto x_0, que o ponto x_1 esteja fora do intervalo $[a,b]$ e, com isto, o método não convirja para a raiz $\bar{x}$ da equação $f(x) = 0$. Por isto, é necessário fazer um estudo sobre a convergência do método. Este estudo será feito a seguir.

Para estudo da convergência do método de Newton devemos considerar todos os casos possíveis para o comportamento de f no intervalo $[a,b]$. As possibilidades são:

- **Caso 1:** f é estritamente crescente com concavidade para cima em $[a,b]$, ou seja, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$;

- **Caso 2:** f é estritamente decrescente com concavidade para cima em $[a,b]$, ou seja, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$;

- **Caso 3:** f é estritamente crescente com concavidade para baixo em $[a,b]$, ou seja, $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$;

- **Caso 4:** f é estritamente decrescente com concavidade para baixo em $[a,b]$, ou seja, $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$.

O estudo sobre a convergência do método de Newton será feito, sem perda de generalidades, com base no Caso 1 (cujo gráfico está esboçado na Figura 2.2), uma vez que todos os casos resultam na mesma equação. Veja que, neste caso, a sequência $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ de aproximações de $\bar{x}$ é monótona decrescente, limitada inferiormente por $\bar{x}$ e superiormente por b. Este fato será importante para garantir a convergência do método de Newton.

Segundo Ruggiero (1996, p. 70), "em geral, afirma-se que o método de Newton converge desde que a aproximação inicial x_0 seja escolhido "suficientemente próximo"da raiz $\bar{x}$".

De acordo com Barroso et al. (1987, p. 125), "é condição suficiente para convergência do Método de Newton que: $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam não nulas e preservem o sinal em (a,b) e x_0 seja tal que a $f'(x_0)f''(x_0) > 0$".

Como a sequência (x_n) é monótona e limitada, por resultados de análise[4], existe $\tilde{x} \in (a,b)$, tal que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}. \tag{2-82}$$

Portanto, o método de Newton é convergente. Resta mostrar que a sequência de interações (x_n) converge para o zero $\bar{x}$ da função f.

Passando ao limite quando n tende para infinito em ambos os lados da equação (2-79) e utilizando a continuidade das funções f e f', tem-se

$$\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}, \tag{2-83}$$

ou seja,

$$\tilde{x} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}. \tag{2-84}$$

Assim, $f(\tilde{x}) = 0$. Como a função f possui apenas uma raiz no intervalo $[a,b]$ então pode-se concluir que $\tilde{x} = \bar{x}$.

Segundo Fernandes (2015, p. 48), ”a vantagem do método de Newton é que sua convergência é quadrática. Isso porque à medida que os valores da sequência se aproximam de $\bar{x}$, a quantidade de dígitos significativos corretos é duplicada”.

Neste ponto, um fato importante a se considerar é saber o quão próximo a enésima iteração x_n está da raiz exata $\bar{x}$. A resposta desta questão depende da verificação de um teste que será definido a seguir:

Definição 2.10 (Critério de Parada) *Seja x_n a enésima iteração obtida pelo método de Newton. Então, x_n é a raiz aproximada da raiz exata $\bar{x}$ da equação $f(x) = 0$ com precisão ε se uma das seguintes condições ocorre:*
(i) $|\, x_n - \bar{x} \,| < \varepsilon$;
(ii) $|\, f(x_n) \,| < \varepsilon$.

Assim, quando uma das condições acima é verificada, o processo iterativo definido para o método de Newton se encerra e $x_n \simeq \bar{x}$ é raiz da equação $f(x) = 0$. Em termos de cálculos, é inviável utilizar a primeira condição da definição 2.10, uma vez que não se conhece a raiz exata $\bar{x}$. A alternativa é reduzir o intervalo que contém essa raiz até o ponto em que a precisão desejada seja atingida utilizando o seguinte critério de parada:

"x_{n+1} é raiz aproximada da equação $f(x) = 0$ com precisão ε se a seguinte condição se verifica:

$$|\, x_{n+1} - x_n \,| < \varepsilon.\text{”} \tag{2-85}$$

[4]Toda sequência monótona limitada é convergente. (Veja Lima ([10], 2006, p. 31, Teorema 4)

Geometricamente, a condição descrita acima significa que a cada iteração, o intervalo inicial $[a,b]$ que contém a raiz $\bar{x}$ é reduzido até que seu comprimento seja menor que a precisão ε.

No caso particular em que f é a função cúbica da forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, tem-se $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Assim, o método de Newton passa a assumir a forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{ax_n^3 + bx_n^2 + cx_n + d}{3ax_n^2 + 2bx_n + c} \\ &= \frac{3ax_n^3 + 2bx_n^2 + cx_n - ax_n^3 - bx_n^2 - cx_n - d}{3ax_n^2 + 2bx_n + c} = \frac{2ax_n^3 + bx_n^2 - d}{3ax_n^2 + 2bx_n + c}. \end{aligned} \tag{2-86}$$

O estudo da convergência do método de Newton para a função cúbica é analogo ao caso geral feito anteriormente.

Considere o problema de uma encontrar solução para equação $f(x) = 0$, utilizando o método de Newton, onde $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$, e com precisão[5] $\varepsilon < 0,00001$.

Para resolver o problema acima é necessário, primeiro, encontrar um intervalo da reta que contenha uma solução desta equação. Para isto, veja que,

$$\begin{aligned} f(-2,44) &= (-2,44)^3 - 5(-2,44)^2 + (-2,44) + 3 = -43,73478 < 0, \\ f(-0,38) &= (-0,38)^3 - 5(-0,38)^2 + (-0,38) + 3 = 1,84313 > 0. \end{aligned} \tag{2-87}$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\bar{x} \in (-2,44;-0,38)$, tal que, $f(\bar{x}) = 0$. Note que, $f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$ e $f''(x) = 6x - 10$.

Tome $x_0 = -2,44$ como ponto inicial para aplicação do método de Newton. Veja que,

$$f(-2,44) = -43,73478 < 0, \tag{2-88}$$

$$f''(-2,44) = 6(-2,44) - 10 = -24,64 < 0. \tag{2-89}$$

Consequentemente, $f(-2,44)f''(-2,44) > 0$, e o método de Newton converge para solução da equação $f(x) = 0$, para este valor de x_0 tomado. Assim, a iteração do método de Newton dada pela equação (2-86) é dada por

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 5x_n^2 - 3}{3x_n^2 - 10x_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2-90}$$

A seguir tem-se os cálculos das aproximações dadas pela equação (2-90) com

[5] No método de Newton, a precisão ε é a medida de quão próxima a raiz aproximada encontrada pelo método de Newton está da raiz exata.

valor inicial $x_0 = -2,44$ e os erros cometidos em cada aproximação, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x_0^3 - 5x_0^2 - 3}{3x_0^2 - 10x_0 + 1} = \frac{2(-2,44)^3 - 5(-2,44)^2 - 3}{3(-2,44)^2 - 10(-2.44) + 1} = -1,42904 \\ \textbf{Erro: } \varepsilon &= |\, x_1 - x_0 \,| = |\, -1,42904 - (-2,44) \,| = 1,01096 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2x_1^3 - 5x_1^2 - 3}{3x_1^2 - 10x_1 + 1} = \frac{2(-1,42904)^3 - 5(-1,42904)^2 - 3}{3(-1,42904)^2 - 10(-1,42904) + 1} = -0,88937 \\ \textbf{Erro: } \varepsilon &= |\, x_2 - x_1 \,| = |\, -0,88937 - (-1,42904) \,| = 0,53967 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2x_2^3 - 5x_2^2 - 3}{3x_2^2 - 10x_2 + 1} = \frac{2(-0,88937)^3 - 5(-0,88937)^2 - 3}{3(-0,88937)^2 - 10(-0,88937) + 1} = -0,68167 \\ \textbf{Erro: } \varepsilon &= |\, x_3 - x_2 \,| = |\, -0,68167 - (-0,88937) \,| = 0,20770 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{2x_3^3 - 5x_3^2 - 3}{3x_3^2 - 10x_3 + 1} = \frac{2(-0,68167)^3 - 5(-0,68167)^2 - 3}{3(-0,68167)^2 - 10(-0,68167) + 1} = -0,64673 \\ \textbf{Erro: } \varepsilon &= |\, x_4 - x_3 \,| = |\, -0,64673 - (-0,68167) \,| = 0,03494 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{2x_4^3 - 5x_4^2 - 3}{3x_4^2 - 10x_4 + 1} = \frac{2(-0,64673)^3 - 5(-0,64673)^2 - 3}{3(-0,64673)^2 - 10(-0,64673) + 1} = -0,64575 \\ \textbf{Erro: } \varepsilon &= |\, x_5 - x_4 \,| = |\, -0,64575 - (-0,64673) \,| = 0,00098 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_6 &= \frac{2x_5^3 - 5x_5^2 - 3}{3x_5^2 - 10x_5 + 1} = \frac{2(-0,64575)^3 - 5(-0,64575)^2 - 3}{3(-0,64575)^2 - 10(-0,64575) + 1} = -0,64575. \\ \textbf{Erro: } \varepsilon &= |\, x_6 - x_5 \,| = |\, -0,64575 - (-0,64575) \,| = 0,00000 < \mathbf{0,00001}. \end{aligned}$$

Como a precisão ε foi atingida depois de seis iterações segue, portanto, que a raiz da equação $x^3 - 5x^2 + x + 3 = 0$ é $\bar{x} = x_6 = -0,64575$[6].

> Não se deve usar o Método de Newton para resolver equações cuja curva $y = f(x)$, próxima ao ponto de interseção com o eixo dos x, é quase horizontal, pois neste caso $f'(x) \doteq 0$ e $f(x)/f'(x)$ dará um número tão grande que pode não ser possível representá-lo em um instrumento de cálculo. (BARROSO et al., 1987, p. 131).

A maneira mais prática de resolver um problema utilizando o método de Newton, é construir uma tabela onde a cada iteração (ou em cada linha), calcula-se o termo x_n e o quão próximo esse termo está da raiz exata com a precisão ε desejada.

[6] Neste exercício foi utilizada uma aproximação de 5 casas decimais.

A tabela a seguir descreve a iteração obtida pelo método de Newton até a obtenção da raiz aproximada com a precisão desejada.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	$\varepsilon = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	- 2,44	-43,73478	43,26080	-1,01096	—-
1	- 1,42904	-11,55814	21,41687	-0,53967	1,01096
2	- 0,88937	-2,54774	12,26664	-0,20770	0,53967
3	- 0,68167	-0,32179	9,21072	-0,03494	0,20770
4	- 0,64673	-0,00853	8,72208	-0,00098	0,03494
5	- 0,64575	0,00001	8,70848	0,00000	0,00098
6	**- 0,64575**	—-	—-	—-	0,00000
	↑ **raiz**				↑ **< 0,00001**

Outros métodos numéricos podem também ser utilizados para resolver uma equação cúbica, como, por exemplo, os métodos da bissecção, das secantes, do ponto fixo ou da iteração linear. Optou-se por utilizar, neste trabalho, somente o método de Newton pois a convergência da sequência de aproximações é mais rápida neste método. Para o leitor interessado em conhecer mais sobre o método de Newton ou mais sobre outros métodos numéricos para o cálculo de raízes da função cúbica, sugere-se consultar Barroso et al. ([2], 1987), Ruggiero ([15], 1996) e suas referências bibliográficas que tratam sobre o assunto.

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO QUARTO GRAU: MÉTODOS DE SOLUBILIDADE

Equações polinomiais do quarto grau, ou equações quárticas, são equações de difícil resolução, pois os métodos existentes para solução deste tipo de equação são complexos e não muito conhecidos na literatura matemática. Poucos artigos tratam sobre o assunto em sua essência.

Neste capítulo, baseados nos estudos de Barroso et al. ([2], 1987) e Moreira ([11], 1994), será apresentado um método algébrico e um método numérico para obtenção de solução de equações do tipo

$$f(x) = 0, \tag{3-1}$$

onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial do quarto grau na forma geral

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \;\; a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \tag{3-2}$$

Dentre as técnicas de solubilidade da equação do quarto grau que serão abordadas neste trabalho estão: o Método de Cardano-Tartaglia e o Método de Newton. Outros métodos clássicos como, por exemplo, o método da mudança de variável para a equação biquadrada $ax^4 + cx^2 + e = 0$ e o dispositivo de Briot-Ruffini não serão abordados neste capítulo, já que esses são métodos comuns encontrados em diversos livros didáticos do ensino médio. A seguir, será apresentado o método de Cardano e Tartaglia para solução da equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \;\; a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

3.1 O Método de Cardano-Tartaglia

A técnica apresentada nesta seção é um resultado de Moreira ([11], 1994) que, em essência, determina um método para o cálculo de raízes de equações quárticas. A técnica para obtenção do Método de Cardano-Tartaglia para resolver a equação do quarto grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ é semelhante ao caso estudado para equação cúbica.

Assim, com objetivo de estabelecer este método, considere a equação do terceiro grau

$$x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0, \tag{3-3}$$

com raízes dadas por x_1, x_2 e x_3, satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= S, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= S_d, \\ x_1x_2x_3 &= P. \end{aligned} \tag{3-4}$$

Defina

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}. \tag{3-5}$$

Elevando ambos os lados de (3-5) ao quadrado, tem-se que

$$\begin{aligned} y^2 &= (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})^2 \\ &= (\sqrt{x_1})^2 + (\sqrt{x_2})^2 + (\sqrt{x_3})^2 + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_3} + 2\sqrt{x_2}\sqrt{x_3}. \end{aligned} \tag{3-6}$$

Eliminando os radicais nos três primeiros termos da igualdade e evidênciando o número 2 nos demais termos, segue que,

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}). \tag{3-7}$$

Subtraindo $(x_1 + x_2 + x_3)$ em ambos os lados de (3-7), obtém-se

$$y^2 - (x_1 + x_2 + x_3) = 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}). \tag{3-8}$$

Agora, substituindo a primeira igualdade de (3-4) em (3-8), dividindo ambos os lados da igualdade resultante por 2 e elevando ao quadrado, tem-se

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2. \tag{3-9}$$

Resolvendo o lado direito de (3-9) e eliminando os radicais possíveis

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 &= (\sqrt{x_1x_2})^2 + (\sqrt{x_1x_3})^2 + (\sqrt{x_2x_3})^2 + 2\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_1x_3} + \\ &+ 2\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_2x_3} + 2\sqrt{x_1x_3}\sqrt{x_2x_3} \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}). \end{aligned} \tag{3-10}$$

Substituindo a segunda e a terceira igualdades de (3-4) e a igualdade de (3-5) em

(3-10),

$$\left(\frac{y^2-S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}\,y, \tag{3-11}$$

que, depois de alguns cálculos, se transforma na equação do quarto grau em y dada pela igualdade

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}\,y + S^2 - 4S_d = 0. \tag{3-12}$$

Agora, dividindo os lados da equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ por a, e definindo

$$\alpha = \frac{b}{a},\ \ \beta = \frac{c}{a},\ \ \gamma = \frac{d}{a}\ \text{ e }\ \varepsilon = \frac{e}{a}, \tag{3-13}$$

obtém-se

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \varepsilon = 0. \tag{3-14}$$

Neste ponto, será necessário fazer uma mudança de variável na equação (3-14) para eliminar o termo cúbico e tornar a equação mais simples. Para isto, defina $x = y + t$. Substituindo este valor de x em (3-14), tem-se

$$(y+t)^4 + \alpha(y+t)^3 + \beta(y+t)^2 + \gamma(y+t) + \varepsilon = 0. \tag{3-15}$$

Resolvendo os produtos notáveis de (3-15) e agrupando os termos comuns, segue que

$$y^4 + (4t+\alpha)y^3 + (6t^2+3\alpha t+\beta)y^2 + (4t^3+3\alpha t^2+2\beta t+\gamma)y + (t^4+\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\varepsilon) = 0.$$

Tomando $t = -\dfrac{\alpha}{4}$ e substituindo em (2-49) para cancelamento do termo cúbido, obtém-se

$$\begin{aligned} y^4 \;&+\; \left[4\left(-\frac{\alpha}{4}\right)+\alpha\right]y^3 + \left[6\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^2 + 3\alpha\left(-\frac{\alpha}{4}\right)+\beta\right]y^2 + \\ &+\; \left[4\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^3 + 3\alpha\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^2 + 2\beta\left(-\frac{\alpha}{4}\right)+\gamma\right]y + \\ &+\; \left[\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^4 + \alpha\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^3 + \beta\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \gamma\left(-\frac{\alpha}{4}\right)+\varepsilon\right] = 0. \end{aligned} \tag{3-16}$$

Desenvolvendo as potências acima, tem-se

$$y^4 + \left(\frac{6\alpha^2}{16} - \frac{3\alpha^2}{4} + \beta\right)y^2 + \left(-\frac{4\alpha^3}{64} + \frac{3\alpha^3}{16} - \frac{2\alpha\beta}{4} + \gamma\right)y + \left(\frac{\alpha^4}{256} - \frac{\alpha^4}{64} + \frac{\alpha\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \varepsilon\right) = 0. \tag{3-17}$$

Assim, calculando o mínimo múltiplo comum e reduzindo os termos em (3-17),

$$y^4+\left(\frac{6\alpha^2-12\alpha^2}{16}+\beta\right)y^2+\left(\frac{-4\alpha^3+12\alpha^3}{64}-\frac{2\alpha\beta}{4}+\gamma\right)y+\left(\frac{\alpha^4-4\alpha^4}{256}+\frac{\alpha\beta}{16}-\frac{\alpha\gamma}{4}+\varepsilon\right)=0. \tag{3-18}$$

Assim,

$$y^4+\left(-\frac{6\alpha^2}{16}+\beta\right)y^2+\left(\frac{8\alpha^3}{64}-\frac{2\alpha\beta}{4}+\gamma\right)y+\left(-\frac{3\alpha^4}{256}+\frac{\alpha\beta}{16}-\frac{\alpha\gamma}{4}+\varepsilon\right)=0. \tag{3-19}$$

Definindo

$$k_1=-\frac{6\alpha^2}{16}+\beta,\ \ k_2=\frac{8\alpha^3}{64}-\frac{2\alpha\beta}{4}+\gamma \text{ e } k_3=-\frac{3\alpha^4}{256}+\frac{\alpha\beta}{16}-\frac{\alpha\gamma}{4}+\varepsilon. \tag{3-20}$$

segue uma equação do quarto grau da forma:

$$y^4+k_1y^2+k_2y+k_3=0. \tag{3-21}$$

Igualando os termos correspondentes de (3-12) e (3-21), tem-se

$$-2S=k_1,\ \ -8\sqrt{P}=k_2 \text{ e } S^2-4S_d=k_3. \tag{3-22}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{k_1}{2}, && (3\text{-}23)\\ P &= \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 \text{ e} && (3\text{-}24)\\ S_d &= \frac{S^2-k_3}{4}=\frac{\left(-\frac{k_1}{2}\right)^2-k_3}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{k_1^2}{4}-k_3\right)=\frac{k_1^2}{16}-\frac{k_3}{4}=\frac{k_1^2-4k_3}{16}. && (3\text{-}25)\end{aligned}$$

Substituindo os valores de S, P e S_d das igualdades acima em (3-3) tem-se a equação cúbica

$$x^3+\frac{k_1}{2}x^2+\left(\frac{k_1^2-4k_3}{16}\right)x-\left(\frac{k_2}{8}\right)^2=0. \tag{3-26}$$

Logo, resolvendo a equação do terceiro grau acima utilizando o Método de Cardano e Tartaglia estabelecido na Seção 2.4 do Capítulo 2, obtém-se raízes x_1, x_2 e x_3 tais que $y=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$ satisfaz $y^4+k_1y^2+k_2y+k_3=0$. Disto, para encontrar as soluções da equação $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\varepsilon=0$, basta subtrair $\frac{\alpha}{4}$ das raízes da equação $y^4+k_1y^2+k_2y+k_3=0$.

Note que, cada raiz quadrada pode admitir dois valores complexos, porém, a equação $\sqrt{P} = -\frac{k_2}{8}$ fala que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{k_2}{8}$. Entretanto, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ tem-se um único valor de $\sqrt{x_3}$. Assim, determina-se todas as quatro raízes da equação (3-14).

Considere, por exemplo, o problema de encontrar as raízes da equação do quarto grau $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$, utilizando o Método de Cardano e Tartaglia. Neste caso, de acordo com o que foi estabelecido anteriormente pelo método, tem-se que

$$k_1 = -12, \;\; k_2 = -16 \;\text{ e }\; k_3 = -4. \tag{3-27}$$

Com isso, a equação do terceiro grau auxiliar dada em (3-26) se reescreve como

$$x^3 + \left(\frac{-12}{2}\right)x^2 + \left(\frac{(-12)^2 - 4(-4)}{16}\right)x - \left(\frac{-16}{8}\right)^2 = 0, \tag{3-28}$$

ou seja,

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0. \tag{3-29}$$

Resolvendo a equação do terceiro grau acima pelo dispositivo de Briot-Ruffini, tem-se que as raízes desta equação são

$$x_1 = 2, \;\; x_2 = 2 + \sqrt{2} \;\text{ e }\; x_3 = 2 - \sqrt{2}. \tag{3-30}$$

Portanto, conclui-se que as raízes de $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$ são:

$$y_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}, \tag{3-31}$$

$$y_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}, \tag{3-32}$$

$$y_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}} \tag{3-33}$$

$$\text{e} \tag{3-34}$$

$$y_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}. \tag{3-35}$$

3.2 O Método de Newton

Nesta seção, será estabelecido o método de Newton para aproximação de uma raiz de uma equação do quarto grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \;\; a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \tag{3-36}$$

Lembre-se, da Seção 2.5 do Capítulo 2, que se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com derivadas contínuas e $\bar{x}$ é o único ponto em $[a,b]$, tal que, $f(\bar{x}) = 0$, então o Método de Newton para obtenção de uma sequência (x_n) que converge para o zero $\bar{x}$ de f, dado um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, com precisão ε é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{3-37}$$

desde que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in [a,b]$. No caso particular em que f é a função do quarto grau da forma

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad a,b,c,d,e \in \mathbb{R},$$

com $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, o método de Newton assume a forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{ax_n^4 + bx_n^3 + cx_n^2 + dx_n + e}{4ax_n^3 + 3bx_n^2 + 2cx_n + d} \\ &= \frac{4ax_n^4 + 3bx_n^3 + 2cx_n^2 + dx_n - ax_n^4 - bx_n^3 - cx_n^2 - dx_n - e}{4ax_n^3 + 3bx_n^2 + 2cx_n + d} \\ &= \frac{3ax_n^4 + 2bx_n^3 + cx_n^2 - e}{4ax_n^3 + 3bx_n^2 + 2cx_n + d}. \end{aligned} \tag{3-38}$$

Considere, por exemplo, o problema de uma encontrar uma solução positiva para equação $f(x) = 0$, utilizando o método de Newton, onde f é a função do quarto grau

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4, \tag{3-39}$$

com precisão $\varepsilon < 0,0008$.

Análogo ao caso estudado no Capítulo 2, para resolver o problema acima é necessário encontrar um intervalo da reta que contenha uma solução positiva desta equação. Porém, para este problema, é inviável a utilização do Teorema do Valor Intermediário, uma vez que não existem números reais α e β, tais que, $f(\alpha)f(\beta) < 0$. A figura 3.1 dada a seguir apresenta o gráfico da função quártica $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$:

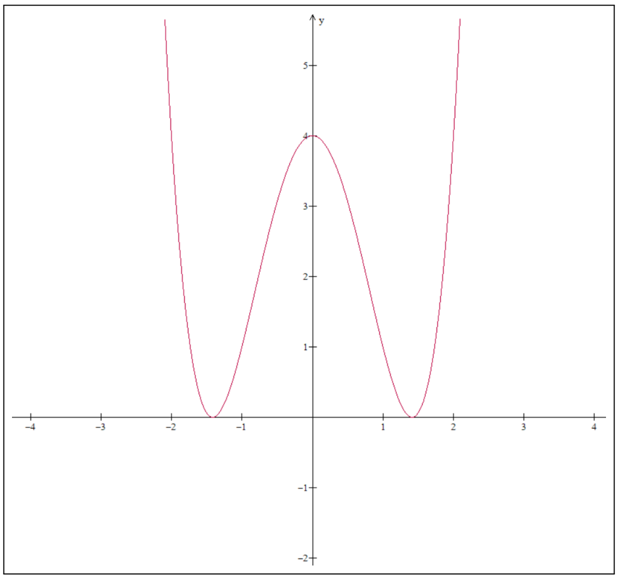
Por uma análise do gráfico acima, observa-se que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e que a solução positiva da equação $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ está no intervalo $[1,2]$. O método de Newton será aplicado para aproximar esta solução com valor inicial $x_0 = 1$. Veja, primeiro, que

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \;\text{ e }\; f''(x) = 12x^2 - 8 \tag{3-40}$$

Assim,

$$f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1^2 + 4 = 1 > 0 \;\text{ e }\; f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 8 = 4 > 0.$$

Figura 3.1: *Gráfico de* $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$



Fonte: *Plotado por Melo, G. M. utilizando Winplot em 21/04/2021*

Consequentemente, $f(1)f''(1) > 0$, e a sequência (x_n) de aproximações gerada pelo método de Newton converge para solução da equação $f(x) = 0$ para $x_0 = 1$. Assim, a iteração do método de Newton dada pela equação (3-38) é dada por

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^4 - 4x_n^2 - 4}{4x_n^3 - 8x_n}. \tag{3-41}$$

Os cálculos do processo iterativo para equação do quarto grau são análogos aos cálculos feitos na Seção 2.5 do Capítulo 2 para equação cúbica. Por isto, a seguir, será apresentado somente o tabelamento para aproximação da solução da equação $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ com precisão $\varepsilon < 0,0008$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	$\varepsilon = \mid x_{n+1} - x_n \mid$
0	1	1	-4	-0,25	—-
1	1,25	0,19141	-2,1875	-0,0875	0,25
2	1,3375	0,04456	-1,12935	-0,03946	0,0875
3	1,37696	0,01078	-0,57271	-0,01882	0,03946
4	1,39578	0,00268	-0,2892	-0,00927	0,01882
5	1,40505	0,00067	-0,1452	-0,00461	0,00927
6	1,40966	0,00017	-0,07251	-0,00234	0,00461
7	1,412	0,00004	-0,03533	-0,00113	0,00234
8	1,41313	0,00001	-0,01732	-0,00058	0,00113
9	$\boxed{\mathbf{1,41371}}$	0,00000	-0,00805	0,00000	0,00058
	↑ **raíz**				↑ **< 0,0008**

Outros detalhes sobre o método de Newton podem ser encontrados em Barroso et al. ([2], 1987), Ruggiero ([15], 1996) e em suas referências.

CONCLUSÃO

Ao se desenvolver um trabalho de conclusão de curso, procura-se um tema que motive a estudar, a ir em busca de conhecimentos e que direcione a alcançar resultados de relevância científica. E foi justamente isso que foi feito aqui, ou seja, buscou-se a possibilidade de se estudar e pesquisar mais sobre um tema de ampla importância, neste caso, a Álgebra.

Ao longo do progresso e produção deste trabalho, foi realizada uma revisão bibliográfica dos conceitos e propriedades das equações polinomiais e alguns teoremas, e, em seguida, foram apresentados os métodos de resolução de equações de terceiro e quarto graus.

Neste sentido, foi possível constatar o quão importante foi o desenvolvimento de métodos de solubilidade de equações do terceiro e quarto graus para o desenvolvimento da matemática e de diversas outras áreas das ciências, devido a aplicabilidade que estes métodos fornecem para solução de inúmeros problemas.

Portanto, entendo que a pesquisa realizada expandiu o entendimento em relação a Álgebra e favoreceu de forma relevante para a evolução do conhecimento e para a formação acadêmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARENALES, Selma, DAREZZO, Artur. **Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software**, São Paulo. Thonsom Learning. 2008.

[2] BARROSO, Leônidas C., BARROSO, Magali M. de A., FILHO, Frederico, F. C., CARVALHO, M. L. B. de, MAIA, Miriam L. **Cálculo Numérico (com aplicações)**, 2 ed. São Paulo. Editora Harbra. 1987.

[3] EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**, Campinas: Unicamp. 2011.

[4] FERNANDES, Daniella Barude. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo: 2015.

[5] FERNANDEZ, Cecília de Souza, SANTOS, Raphael Antunes dos. **O Teorema Fundamental da Álgebra**. V Bienal da SBM, UFPB, 2010.

[6] FERNANDEZ, Cecília de Souza, SANTOS, Raphael Antunes dos. **Uma nota sobre o Teorema Fundamental da Álgebra**. Revista Matemática Universitária, 45, 51–53, 2010.

[7] FILHO, José Francisco da Silva, PEREIRA, Odete Elana Sousa. **Revisitando as Equações do Terceiro Grau**. Revista Professor de Matemática, 7, n° 2, 205–2014, 2019.

[8] GARCIA, Ronaldo, SILVA, Kaye O. **Equações do Terceiro Grau e Dobraduras de Beloch**. Revista da Olimpíada, IME, UFG, 21–60, 2019.

[9] LIMA, Elon Lages. **A Equação do Terceiro Grau**. Revista Matemática Universitária, 5, 9–23, 1987.

[10] LIMA, Elon Lages. **Análise Real Volume 1: Funções de uma variável**. Rio de Janeiro, IMPA. 2006.

[11] MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. **Uma Solução das Equações do** 3° **e** 4° **Graus**. Revista Professor de Matemática, 25, 23–28, 1994.

[12] NETO, Antonio C. M. **Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios**. v.6. São Paulo. SBM. 2016.

[13] NOVAES, Livia. **Soluções Analíticas e Numéricas de Equações Polinomiais**, Dissertação de Mestrado. São Carlos. USP. 2018.

[14] RECHTSCHAFFEN, Edgar. **Sobre aproximações polinomiais de raízes reais de cúbicas**. Revista Matemática Universitária, 46, 12–16, 2009.

[15] RUGGIERO, Márcia A. G.; LOPES, Vera L. da R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2 ed. São Paulo. Makron Books. 1996.

[16] STEWART, James. **Cálculo: Volume 1**, São Paulo: Cengage Learning. 2013.