

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA GOIANO - CAMPUS URUTAÍ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LAURIENNY GONDIM SILVA

**CURVAS E SUPERFÍCIES  
REGULARES:**

**Um estudo sobre curvaturas**

Urutaí  
2022

LAURIENNY GONDIM SILVA

# **CURVAS E SUPERFÍCIES REGULARES:**

**Um estudo sobre curvaturas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Urutaí, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Dassael Fabricio dos Reis Santos

Urutaí  
2022

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP  
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
**Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano**

SSI586      Silva, Laurienny Gondim  
c      Curvas e Superfícies Regulares: Um estudo sobre  
curvaturas / Laurienny Gondim Silva; orientador Dr.  
Dassael Fabrício dos Reis Santos. -- Urutaí, 2022.  
75 p.

TCC (Graduação em Licenciatura em Matemática) --  
Instituto Federal Goiano, Campus Urutaí, 2022.

1. Geometria. 2. Curvas. 3. Superfícies. 4.  
Curvatura. 5. Classificação. I. Santos, Dr. Dassael  
Fabrício dos Reis, orient. II. Título.

# TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO

## PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS

### NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano a disponibilizar gratuitamente o documento em formato digital no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

#### IDENTIFICAÇÃO DA PRODUÇÃO TÉCNICO-CIENTÍFICA

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Tese (doutorado)            | <input type="checkbox"/> Artigo científico              |
| <input type="checkbox"/> Dissertação (mestrado)      | <input type="checkbox"/> Capítulo de livro              |
| <input type="checkbox"/> Monografia (especialização) | <input type="checkbox"/> Livro                          |
| <input checked="" type="checkbox"/> TCC (graduação)  | <input type="checkbox"/> Trabalho apresentado em evento |

Produto técnico e educacional - Tipo:

Nome completo do autor:

Laurienny Gondim Silva

Matrícula:

2018101221230120

Título do trabalho:

CURVAS E SUPERFÍCIES REGULARES: Um estudo sobre curvaturas

#### RESTRIÇÕES DE ACESSO AO DOCUMENTO

Documento confidencial:  Não  Sim, justifique:

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano:  /  /

O documento está sujeito a registro de patente?  Sim  Não

O documento pode vir a ser publicado como livro?  Sim  Não

#### DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O(a) referido(a) autor(a) declara:

- Que o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- Que obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autoria, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- Que cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Urutaí

Local

07 / 03 / 2022

Data

*Laurienny Gondim Silva*

Assinatura do autor e/ou detentor dos direitos autorais

Ciente e de acordo:

*Dassael Fabrício dos Reis Santos*

Assinatura do(a) orientador(a)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Ata nº 7/2022 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

### **ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO**

Aos 03 dias do mês de Março de 2022, às 10 horas, reuniu-se, em seção pública realizada de forma remota através do Google Meet, a banca examinadora composta pelos docentes: Dassael Fabrício dos Reis Santos (orientador), Aderval Alves dos Santos, Marcos Túlio Alves de Carvalho, sob a presidência do primeiro, com a finalidade de avaliar o Trabalho de Curso em nível de graduação intitulado **“Curvas e Superfícies Regulares: Um estudo sobre curvaturas”** de autoria de **Laurienny Gondim Silva**, Matrícula nº 2018101221230120, do Curso de Licenciatura Plena em Matemática do IF Goiano - Campus Urutaí. A seção foi aberta quando o presidente formalmente apresentou a estudante e os avaliadores, passando então a palavra a estudante autora do trabalho para a apresentação oral do TC. A apresentação se estendeu pelos 20 minutos seguintes e, depois, houve arguição da candidata pelos membros da banca examinadora. Após tal etapa, a banca examinadora decidiu por unanimidade pela **APROVAÇÃO** da estudante com **Nota: 10,0**, considerando-se cumprido este requisito parcial para obtenção do título de **Licenciada em Matemática**. Depois de atender as considerações da banca, e respeitando o disposto no calendário acadêmico, a estudante deverá fazer o depósito da versão final corrigida em pdf no Repositório Institucional do IF Goiano - RIF, acompanhado do Termo de Ciência e Autorização Eletrônica (TCAE) devidamente assinado pela autora e orientador. Às 11 horas, cumpridas todas as formalidades de pauta, o presidente da banca encerrou a sessão pública de defesa e foi lavrada a presente ata que, depois de lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Banca Examinadora da defesa.

*(Assinado Eletronicamente)*

Dassael Fabrício dos Reis Santos  
IF Goiano - Campus Urutaí (Orientador)

*(Assinado Eletronicamente)*

Aderval Alves dos Santos  
IF Goiano - Campus Urutaí (Membro)

*(Assinado Eletronicamente)*

Marcos Túlio Alves de Carvalho  
IF Goiano - Campus Trindade (Membro)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Aderval Alves dos Santos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 03/03/2022 11:25:30.
- **Marcos Tulio Alves de Carvalho**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 03/03/2022 11:25:17.
- **Dassael Fabricio dos Reis Santos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 03/03/2022 11:23:06.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 15/02/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 358459

Código de Autenticação: 9d13804656



INSTITUTO FEDERAL GOIANO  
Campus Urutaí  
Rodovia Geraldo Silva Nascimento, Km 2,5, Zona Rural, None, URUTAI / GO, CEP 75790-000  
(64) 3465-1900



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Formulário 151/2022 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

LAURIENNY GONDIM SILVA

## **CURVAS E SUPERFÍCIES REGULARES: Um estudo sobre curvaturas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano–Campus Urutaí como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, aprovado em 03 de Março de 2022, pela Banca Examinadora constituída pelos professores

*(Assinado eletronicamente)*

**Prof. Dr. Dassael Fabrício dos Reis Santos**  
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí  
Presidente da Banca (Orientador)

*(Assinado eletronicamente)*

**Prof. Me. Aderval Alves dos Santos**  
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

*(Assinado eletronicamente)*

**Prof. Dr. Marcos Túlio Alves de Carvalho**  
Instituto Federal Goiano - Campus Trindade

Documento assinado eletronicamente por:

- Dassael Fabrício dos Reis Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 04/03/2022 15:15:46.
- Aderval Alves dos Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 04/03/2022 15:14:23.
- Marcos Tulio Alves de Carvalho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 04/03/2022 15:10:01.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 04/03/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 363426  
Código de Autenticação: 98f3f69505



---

## Agradecimentos

---

### GRATIDÃO...

A Deus por todas as maravilhas que tem feito em minha vida e por estar comigo em todos os momentos, abrindo portas e guiando os meus passos para percorrer todos os obstáculos com sabedoria e dedicação.

A minha família amada que está sempre ao meu lado, me apoiando e me ensinando a acreditar que por mais difícil que seja a caminhada nunca podemos perder a fé, seguindo sempre persistentes em nossos objetivos.

Ao meu orientador, Dassael Fabricio dos Reis Santos, pelo apoio, pela disponibilidade e excelente orientação durante todo este percurso, no qual acreditou na minha capacidade desde o início e me concedeu a oportunidade de aprimorar meus conhecimentos por meio de projetos de pesquisas, que foram fundamentais para a composição deste trabalho.

Aos professores Aderval Alves dos Santos e Marcos Túlio Alves de Carvalho por terem aceitado participar da banca examinadora e por terem contribuído com ricas observações e sugestões, que com certeza fez toda a diferença para este trabalho.

A todos os professores do curso, que contribuíram significativamente com a minha formação acadêmica e profissional, além da dedicação que tiveram em compartilhar seus conhecimentos, os quais foram essenciais para agregar este trabalho.

Aos meus colegas e amigos que compartilharam choros e alegrias, e que enfrentaram todos os desafios junto a mim, acreditando que por mais árdua que fosse a luta, no final tudo iria dar certo.

Enfim, sou muito grata e feliz por ter pessoas tão especiais ao meu lado em mais uma conquista na minha vida.

[...]

*Muitos medos vão tentar te segurar muitas vezes vão dizer que não vai dar!*

*Sempre persista, não importa o que vão dizer!  
Só nunca desista do sonho que existe em você!*

*Então mire as estrelas e salte o mais alto que der!  
Tome distância, e faça o melhor que puder!  
Só não se permita viver na sombra do talvez...*

*Aqui só se vive uma vez!*

*Vença seus medos! Você é capaz de voar por cima das vozes*

*Que gritam pra você parar!*

*Não há nesta vida algo que não se possa alcançar...*

*Você só precisa ir buscar!*

[...]

**(Trechos da música Mire as Estrelas / Bruno Fagioni)**

---

## Resumo

---

Neste trabalho, será realizado um estudo teórico sobre a Geometria Diferencial das curvas e das superfícies parametrizadas regulares, com objetivo de mostrar resultados de classificação de curvas por meio de informações conhecidas, à priori, sobre a curvatura e a torção destas curvas e obter um resultado de classificação de superfícies por meio do conhecimento prévio do sinal da curvatura gaussiana e das características dos pontos dessa superfície. Além disso, será realizado um estudo geral sobre algumas superfícies de curvaturas gaussiana e/ou média constantes. Para alcançar os objetivos do trabalho utilizou-se de pesquisas bibliográficas e, como ferramentas principais, de técnicas de derivação e integração, além de resultados clássicos do Cálculo Diferencial e Integral e da Geometria Analítica.

**Palavras-chave:** Geometria; Curvas; Superfícies; Curvatura; Classificação.

---

## **Abstract**

---

In this work, a theoretical study will be carried out on the Differential Geometry of the regular parameterized curves and surfaces, with the objective of show results of classification of curves through known information, a priori, on the curvature and twist of these curves and obtain a result of classification of surfaces through the prior knowledge of the gaussian curvature signal and the characteristics of the points of this surface. In addition, a general study will be carried on some surfaces of gaussian and/or average constant curvatures. To achieve the objectives of the work, we used bibliographic research and, as main tools, derivation and integration techniques, as well as classic results Differential and Integral Calculus and Analytic Geometry.

**Keywords:** Geometry; Curves; Surfaces; Curvature; Classification.

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Circunferência de centro $(x_0, y_0)$ e raio $R$	14
1.2	Hélice Circular	15
1.3	Curvas de Bertrand	19
2.1	Vetores tangentes às curvas coordenadas	30
2.2	Esfera de centro na origem e raio $r$	30
2.3	Catenóide	33
2.4	Elipsóide	34
2.5	Vetor Tangente e Plano Tangente de uma Superfície	36
2.6	Isometria entre um plano e um cilindro	45
3.1	Vetores Normais de uma Superfície	48
3.2	Seção Normal de uma Superfície	49
3.3	Sela de Macaco	51
3.4	Helicóide	67
3.5	Pseudo-Esfera	68

---

# Sumário

---

INTRODUÇÃO	11
1 CURVAS DIFERENCIÁVEIS	14
2 SUPERFÍCIES DIFERENCIÁVEIS	28
2.1 Superfície Parametrizada Regular	28
2.2 Plano Tangente	35
2.3 A Primeira Forma Quadrática	39
3 CURVATURAS GAUSSIANA E MÉDIA DE UMA SUPERFÍCIE	46
3.1 A Segunda Forma Quadrática	46
3.2 Curvatura Gaussiana e Curvatura Média	51
3.3 Superfícies de Curvaturas Constantes	62
3.3.1 A Esfera	62
3.3.2 O Plano	63
3.3.3 O Cilindro	64
3.3.4 O Helicóide e o Catenóide	65
3.3.5 A Pseudo-esfera	68
3.4 Caso Geral	70
CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75

---

# INTRODUÇÃO

---

A Geometria Diferencial é a parte da Matemática que estuda as propriedades das curvas e superfícies por meio das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. Informalmente, a Geometria Diferencial se desenvolveu em paralelo com o Cálculo Diferencial e Integral, mas tomou forma e conhecimento no século XVIII nos trabalhos de Carl Friedrich Gauss para superfícies.

Para Do Carmo (2005), a Geometria Diferencial Clássica é o estudo das propriedades locais de curvas e superfícies. Por propriedades locais entendemos aquelas que dependem unicamente do comportamento da curva ou superfície em torno de um ponto. Os métodos adequados para o estudo de tais propriedades são os do Cálculo (Cálculo Infinitesimal). Por esta razão, as curvas e superfícies consideradas em Geometria Diferencial estão definidas por funções que podem ser diferenciáveis um certo número de vezes.

Basicamente, a Geometria Diferencial tem por objetivo produzir aplicações dos métodos e regras estudados no Cálculo em problemas de Geometria. De modo mais preciso, a Geometria Diferencial consiste no estudo de objetos geométricos, denominados curvas e superfícies, que possuem como conceito fundamental a existência de uma reta ou plano tangente nas imediações de cada um de seus pontos.

Para Lima (2016, p. 1), “Este fundamento nos permite, então, introduzir o conceito mais fundamental da Geometria Diferencial, o de curvatura e, relativamente, ao mesmo tempo, estudar e classificar estes objetos”. Em pesquisas mais recentes, tais conceitos são utilizados para o estudo da curvatura de certas superfícies (ou variedades em um conceito mais geral) em espaços cuja estrutura e propriedades são alteradas pela mudança da métrica. Neste sentido, dentre as superfícies que se destacam pela relevância estão aquelas cuja curvatura gaussiana e/ou média são constantes.

Em uma visão geral, estudar Geometria Diferencial é de grande importância em matemática, devido ao grande número de aplicações desta teoria em outras áreas das ciências. Inúmeros problemas que surgem do estudo da Matemática, Física e Engenharias podem ser modelados e resolvidos em termos de equações diferenciais e surgem de maneira natural a partir de alguns problemas de Geometria Diferencial.

Os sistemas de equações diferenciais, por exemplo, são consequências diretas de alguns problemas de Geometria Diferencial; assim como, o problema de procurar por

superfícies mínimas e regradas no espaço tridimensional. Para problemas desta forma, podemos encontrar várias técnicas para obtenção de solução. De modo especial, pode-se garantir a existência de soluções destes problemas por meio de técnicas de solubilidade de equações diferenciais parciais.

Dentre os autores que mais se destacam em pesquisas relacionadas ao assunto podemos citar: Alencar, Santos e Neto ([1], 2020), Do Carmo ([7], 2005), Tenenblat ([14], 2008), Lima ([11], 2016), Araújo ([2], 1998) e suas referências.

Em 2005, no trabalho intitulado “Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies”, DO CARMO desenvolve resultados gerais referentes ao estudo das curvas e superfícies diferenciáveis. Mais precisamente, o autor faz um breve estudo sobre as curvas no espaço e, em seguida, utiliza estes conceitos para estudar e obter resultados relacionados ao estudo das superfícies, da Geometria da Aplicação de Gauss e da Geometria Intrínseca, além de fazer estudos sobre a Geometria Diferencial Global. Dentre os principais resultados obtidos por Do Carmo podemos citar: o Teorema de Gauss-Bonnet e o Teorema de Hopf-Rinow para superfícies diferenciáveis.

Já em 2008, TENENBLAT estuda, de maneira geral, os conceitos e propriedades da teoria das curvas e das superfícies parametrizadas. A autora faz um trabalho completo sobre curvas parametrizadas diferenciáveis estudando, através do Cálculo Diferencial e Integral, propriedades destas curvas e mostrando alguns resultados de classificação de curvas por meio de informações específicas sobre a curvatura e a torção da curva. Além de fazer um trabalho sobre as superfícies regulares no espaço tridimensional, estudando as propriedades destas superfícies e resultados de classificação de pontos de uma superfície por meio de informações prévias sobre suas curvaturas gaussiana e média. Dentre as principais superfícies estudadas neste trabalho estão as superfícies mínimas (aquelas cuja curvatura média é nula) e as superfícies regradas.

Por outro lado, em 2020, ALENCAR, SANTOS e NETO, em seu trabalho intitulado “Geometria Diferencial das Curvas no  $\mathbb{R}^2$ ”, estudam resultados e propriedades referentes ao estudo das curvas planas. Neste trabalho, os autores abordam conceitos fundamentais desta teoria, tais como: comprimento de arco, parametrização, curvatura, regularidade e suavidade. Além disso, eles provam um resultado de existência e unicidade de curvas planas e introduzem o conceito de índice de rotação.

Nessa perspectiva, e baseados nos autores acima, este trabalho tem por objetivo estudar conceitos e propriedades das curvas no plano e no espaço e obter resultados de classificação de curvas desde que sejam conhecidas certas informações a respeito da curvatura e torção da curva. Bem como, estudar conceitos e propriedades das superfícies regulares, tendo como foco o estudo das curvaturas gaussiana e média e obter resultados de classificação de superfícies, dadas certas informações a respeito do sinal da curvatura gaussiana e das características dos pontos dessa superfície.

Neste sentido, este estudo se justifica por ser um assunto de grande relevância teórica e prática em matemática, e devido à quantidade de aplicações destes conceitos em outras áreas das ciências. Para alcançar os objetivos do trabalho, utilizaremos como ferramentas principais os resultados estudados nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, isto é, os resultados relacionados ao estudo das derivadas, integrais e suas propriedades.

A metodologia se baseará em pesquisa bibliográfica, feita em artigos científicos, revistas especializadas e nos livros da bibliografia listada, onde coletaremos informações precisas que oriente a desenvolver este trabalho. Segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 158) “a pesquisa bibliográfica é um apanhado geral sobre os principais trabalhos já realizados, revestidos de importância, por serem capazes de fornecer dados atuais e relevantes relacionados com o tema”.

Assim, este trabalho estará dividido em três capítulos especificados a seguir:

No primeiro capítulo, faremos um estudo sobre a teoria básica das curvas parametrizadas diferenciáveis no plano e no espaço, estabelecendo conceito e propriedades de curvas no plano e no espaço. Em seguida, utilizando o teorema fundamental das curvas e as Fórmulas de Frenet-Serrat como principais ferramentas, estabeleceremos e provaremos resultados de classificação de curvas parametrizadas diferenciáveis, dado que são conhecidas certas informações à priori sobre a curvatura e a torção da curva. Dentre os resultados que serão expostos neste capítulo destacam-se: as curvas com curvatura nula, as curvas com curvatura constante, as curvas com torção nula, as curvas com torção constante e as curvas cuja curvatura e a torção se relacionam por certa condição.

No segundo capítulo, estudaremos a teoria básica das superfícies parametrizadas diferenciáveis, apresentando os conceitos de superfícies parametrizadas, plano tangente, vetor normal e primeira forma quadrática. Além disso, mostraremos resultados importantes para o estudo de superfícies, dentre eles proveremos que, sob certas condições, a imagem inversa de um valor regular é uma superfície diferenciável e abordaremos casos de isometria entre superfícies no espaço.

No terceiro capítulo, apresentaremos conceitos importantes para o estudo da curvatura gaussiana e curvatura média de uma superfície, tais como a segunda forma quadrática e a curvatura normal. Posteriormente, mostraremos um resultado de classificação de pontos de uma superfície e um resultado de classificação de superfícies de curvatura constante conhecendo, à priori, certas informações relacionadas a curvatura gaussiana e aos pontos dessas superfícies. Precisamente, provaremos que se uma superfície possuir todos os pontos umbílicos, então o traço da superfície estará contido em um plano (caso a curvatura gaussiana seja nula) ou estará contido em uma esfera (caso a curvatura gaussiana seja positiva).

# CURVAS DIFERENCIÁVEIS

Neste capítulo, será apresentado uma breve descrição da teoria local das curvas parametrizadas diferenciáveis e, em seguida, serão demonstrados dois teoremas de classificação de curvas por meio de informações previamente conhecidas sobre a curvatura e a torção da curva. Os principais resultados deste capítulo se baseiam em trabalhos de Do Carmo ([7], 2005) e Tenenblat ([14], 2008). Para iniciar, serão estabelecidos os conceitos e propriedades básicas do estudo das curvas, partindo da definição de curva regular.

**Definição 1.1 (Curva)** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$ .*

(i) *Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  que, a cada  $t \in I$ , associa um vetor  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , onde  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções de classe  $C^\infty$ .*

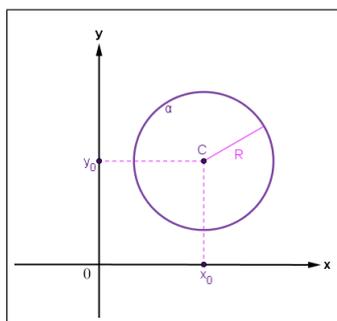
(ii) (Regularidade) *Uma curva  $\alpha$  é dita regular se  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ , onde  $\alpha'(t)$  é o vetor tangente à  $\alpha$  em  $t \in I$  dado por  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ .*

Por exemplo, a aplicação  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = \left( x_0 + R \cos\left(\frac{t}{R}\right), y_0 + R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \right), \quad R > 0, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (1-1)$$

é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma circunferência no plano de centro em  $(x_0, y_0)$  e raio  $R$ . A figura 1.1 a seguir representa essa curva.

**Figura 1.1:** *Circunferência de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $R$*



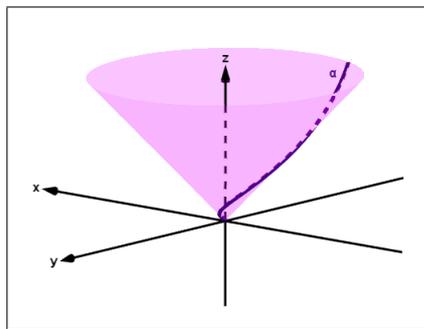
**Fonte:** *Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 22/01/2021.*

Já a aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ , é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma reta passando pelo ponto  $(c, d)$  e com direção do vetor  $(a, b)$ . Também, a aplicação

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1-2)$$

é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma curva que se desenrola sobre o cone  $z^2 = x^2 + y^2$  ( $z \geq 0$ ), conforme mostra a figura 1.2. Posteriormente, será mostrado que esta curva é denominada hélice circular.

**Figura 1.2:** Hélice Circular



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 22/01/2021.

Ao longo de todo este capítulo  $I$  denota um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $\alpha$  é uma curva parametrizada regular.

Um conceito importante no estudo das curvas diferenciáveis é a parametrização pelo comprimento de arco. Este conceito, junto com as Fórmulas de Frenet (definidas posteriormente), permitem fazer um estudo detalhado do comportamento local de uma curva regular. A definição a seguir estabelece o conceito de comprimento de arco.

**Definição 1.2** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada regular.

(i) A função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$s(t) = \int_a^t |\alpha'(t)| dt, \quad a, t \in I, \quad (1-3)$$

é denominada função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $a$ .

(ii)  $\alpha$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\int_a^b |\alpha'(t)| dt = b - a, \quad a, b \in I, \quad a \leq b. \quad (1-4)$$

É fácil provar que uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $|\alpha'(t)| = 1$ . Com efeito, se  $|\alpha'(t)| = 1$ , então,

$$\int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b dt = t \Big|_a^b = b - a, \quad (1-5)$$

e, pela definição 1.2,  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. A recíproca é imediata por derivação da função comprimento de arco. Para uma prova completa deste resultado veja Do Carmo ([7], 2005, p. 7).

A circunferência de equação paramétrica dada em (1-1), por exemplo, é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\alpha'(t) = \left( -\sin\left(\frac{t}{R}\right), \cos\left(\frac{t}{R}\right) \right) \text{ e } |\alpha'(t)| = \sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{R}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{R}\right)} = 1. \quad (1-6)$$

Ao longo deste trabalho, a menos que seja evidente ou se mencione o contrário, assume-se que todas as curvas  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Para mais detalhes sobre parametrização pelo comprimento de arco veja Tenenblat ([14], 2008) e Araújo ([2], 1998).

A definição a seguir estabelece um importante conceito no estudo do comportamento de uma curva regular, a saber, o conceito de curvatura.

**Definição 1.3 (Curvatura)** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada regular.*

(i) *Se  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, o número  $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$ , definido para  $s \in I$ , é denominado curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ .*

(ii) *Se  $\alpha$  não está parametrizada pelo comprimento de arco, a curvatura de  $\alpha$  é definida por*

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}. \quad (1-7)$$

(iii) *Se  $\alpha$  é uma curva regular plana (não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco), a curvatura de  $\alpha$  é dada<sup>1</sup> por*

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1-8)$$

Para Araújo (1998, p. 7), “a curvatura dá uma medida da variação da direção da curva, mas seu conhecimento não determina a forma da curva: tanto a circunferência como a hélice, por exemplo, têm curvatura constante”. A grosso modo, a curvatura de  $\alpha$  mede a velocidade com que as tangentes à  $\alpha$  mudam de direção, ou seja, o quanto a curva deixa de ser uma reta.

<sup>1</sup>As demonstrações das igualdades em (1-7) e (1-8) podem ser encontradas em Tenenblat ([14], 2008, p. 67 e p. 46).

Agora, para cada  $s \in I$ , sejam  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$  vetores ortogonais e unitários definidos por

$$t(s) = \alpha'(s), \quad n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}, \quad b(s) = t(s) \times n(s). \quad (1-9)$$

Os vetores  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$  são denominados, respectivamente, vetor tangente, normal e binormal à  $\alpha$  em  $s \in I$ , são fundamentais para o estudo do comportamento local de uma curva regular e o conjunto ortonormal  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  é denominado triedro móvel de Frenet. A definição a seguir estabelece o conceito de torção de uma curva.

**Definição 1.4 (Torção)** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. O número real  $\tau$  dado por  $\tau(s) = b'(s)n(s)$  é a torção de  $\alpha$ .*

Como consequência da definição acima, a torção  $\tau$  pode ser definida em função da curvatura da curva  $\alpha$  da seguinte forma: se  $\alpha$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura  $\kappa$  não nula, então<sup>2</sup>

$$\tau(s) = -\frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{|\kappa(s)|^2} \quad (1-10)$$

Segundo Tenenblat (2008, p. 65), “geometricamente, o módulo da torção mede a velocidade com que varia o plano osculador<sup>3</sup>”. Em palavras, a torção mede a velocidade com que a curva  $\alpha$  deixa de ser plana. Já para Lima (2016, p. 29), “o valor absoluto da torção de uma curva regular  $\alpha$  num ponto  $s$ , quando não nulo, é, numa vizinhança de  $\alpha(s)$ , uma medida de “afastamento” do traço de  $\alpha$  do plano osculador de  $\alpha$  em  $s$ ”.

Os vetores  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$  formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  e tem derivadas dadas pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}, \quad (1-11)$$

ou seja,

$$t'(s) = \kappa(s)n(s), \quad n'(s) = -\kappa(s)t(s) - \tau(s)b(s), \quad b'(s) = \tau(s)n(s). \quad (1-12)$$

As equações acima são denominadas Fórmulas de Frenet e determinam o comportamento de  $\alpha$  na vizinhança de um de seus pontos. Para o leitor interessado em conhecer a dedução das equações acima, sugere-se consultar Do Carmo ([7], 2005), Tenenblat

<sup>2</sup>A demonstração da igualdade em (1-10) pode ser encontrada em Tenenblat ([14], 2008, p. 67).

<sup>3</sup>O plano **osculador** é o plano que contém  $\alpha$  e que é normal ao vetor  $b(s)$  (TENENBLAT, [14], 2008, p. 63). Em palavras, é o plano gerado pelos vetores  $t(s)$  e  $n(s)$ .

([14], 2008) e suas referências. Um dos exemplos clássicos de curvas no espaço são as hélices. Estas curvas caracterizam-se por ter curvatura e torção constantes. Em geral, uma hélice pode ser definida como uma curva no espaço, de curvatura não nula, cuja reta tangente em cada ponto faz um ângulo constante com uma direção fixada. A definição a seguir formaliza o conceito de hélice.

**Definição 1.5 (Hélices)** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. A curva  $\alpha$  é uma hélice se existe um vetor  $v$ , com  $|v| = 1$ , tal que, o ângulo de  $v$  com  $\alpha'(t)$  é constante, para todo  $t \in I$ , isto é,*

$$\langle \alpha'(t), v \rangle = c |\alpha'(t)|, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1-13)$$

*Se  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então  $\alpha$  é uma hélice se  $\langle \alpha'(t), v \rangle = c$ , para  $c \in \mathbb{R}$ .*

A curva dada pela equação (1-2), por exemplo, é uma hélice, pois

$$\alpha'(t) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t), e^t), \quad |\alpha'(t)| = \sqrt{3}e^t, \quad (1-14)$$

e, tomando a direção fixa  $v = (0, 0, 1)$ , tem-se

$$\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{|\alpha'(t)|} = \frac{\langle (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t), e^t), (0, 0, 1) \rangle}{\sqrt{3}e^t} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (1-15)$$

Note que o resultado acima é constante e, por isso,  $\alpha$  é uma hélice.

A definição a seguir conceitua uma classe especial de curvas que são, em certo sentido, generalizações das hélices circulares<sup>4</sup>. Tais curvas foram estudadas no século XIX por Joseph Bertrand e, por isso, são denominadas curvas de Bertrand. Além disso, estas curvas caracterizam-se pela seguinte propriedade: "Se  $\alpha$  é uma curva de Bertrand, então ou a torção  $\tau$  é identicamente nula ou  $\tau$  nunca se anula, isto é, curvas espaciais que são de Bertrand tem torção que nunca se anula".

**Definição 1.6 (Curvas de Bertrand)** *Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com curvatura e torção não-nulas e vetor normal  $\eta_\alpha$ , é uma curva de Bertrand, se existe uma curva regular  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com vetor normal  $\eta_\beta$ , tal que, as retas normais de  $\alpha$  e  $\beta$  (passando por  $\eta_\alpha$  e  $\eta_\beta$ , respectivamente) são iguais em  $s \in I$ . Neste caso, escreve-se*

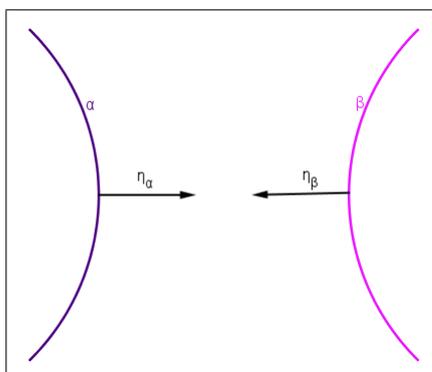
$$\beta(s) = \alpha(s) + rn(s), \quad s \in I, \quad (1-16)$$

onde  $r$  é constante e  $\beta$  é chamado par de Bertrand de  $\alpha$ .

<sup>4</sup> $\alpha$  é uma hélice circular se tem curvatura e a torção constantes.

A figura 1.3 dada a seguir dá uma interpretação geométrica da definição anterior.

**Figura 1.3:** *Curvas de Bertrand*



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 22/01/2021.

O resultado a seguir é um dos principais teoremas do estudo das curvas parametrizadas diferenciáveis. Em essência, este teorema garante que as funções curvatura e torção determinam completamente uma curva, a menos de sua posição no espaço. Tal resultado é denominado Teorema Fundamental das Curvas. A versão do Teorema Fundamental das Curvas apresentada a seguir se deve à Do Carmo ([7], 2005).

**Teorema 1.7 (Teorema Fundamental das Curvas)** *Dadas as funções diferenciáveis  $\kappa(s) > 0$  e  $\tau(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe uma curva parametrizada regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que,  $s$  é o comprimento de arco,  $\kappa(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção de  $\alpha$ . Além disso, qualquer outra curva  $\beta$  satisfazendo as mesmas condições difere de  $\alpha$  por um movimento rígido, isto é, existe uma aplicação ortogonal  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com determinante positivo, e um vetor  $v$ , tal que,  $\beta = \phi + v$ .*

A prova deste teorema se baseia em resultados de existência de Equações Diferenciais Ordinárias para a existência da curva  $\alpha$ , nas equações de Frenet para unicidade e distancia-se dos objetivos do texto. Por isso, neste trabalho, será omitida a demonstração do teorema acima. Para o leitor interessado em conhecer os detalhes desta prova, sugere-se consultar Do Carmo ([7], 2005), Lima ([11], 2016), Tenenblat ([14], 2008), Araújo ([2], 1998) e suas referências.

Segundo Tenenblat (2008, p. 90), “o Teorema Fundamental das Curvas prova que, dadas duas funções diferenciáveis quaisquer, sendo uma delas positiva, existe uma curva regular de  $\mathbb{R}^3$  que admite essas funções como curvatura e torção”.

Os resultados principais deste capítulo, tratados a seguir, classificam algumas curvas diferenciáveis por meio de informações previamente conhecidas sobre a curvatura e/ou a torção da curva. Mais precisamente, à seguir, serão mostrados dois resultados de classificação de curvas, à saber: um resultado que classifica todas curvas planas de curvatura constante e um resultado de classificação de curvas espaciais conhecendo, à

priori, certas informações sobre a curvatura e a torção da curva. A grosso modo, o primeiro resultado apresentado a seguir mostra que as únicas curvas com curvatura constante não negativa são, em essência, a reta e a circunferência.

**Teorema 1.8 (Curvas Planas de Curvatura Constante)** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura  $\kappa$ . Então:*

1.  $\alpha$  é uma reta se, e somente se,  $\kappa = 0$ .
2.  $\alpha$  está contida em uma circunferência de raio  $R > 0$  se, e somente se,  $\kappa = \frac{1}{R}$ .

Além disso, se  $\alpha$  é uma curva plana de curvatura constante  $\kappa \geq 0$ , então  $\alpha$  está contida em uma reta ou  $\alpha$  está contida em uma circunferência.

**Demonstração:** Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com  $t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$  e  $\alpha''(s) = (x''(s), y''(s))$ .

**Prova de 1:** Como  $\alpha$  é uma reta, pode-se parametrizar  $\alpha$  pela aplicação  $\alpha(s) = (x_0 + as, y_0 + bs)$ ,  $s \in I$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes e  $a^2 + b^2 = 1$ . Como,  $\alpha'(s) = (a, b)$  e  $\alpha''(s) = (0, 0)$ , então, pela definição de curvatura, segue que

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)| = 0, \quad s \in I. \quad (1-17)$$

Reciprocamente, suponha que  $\alpha$  seja uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com  $\kappa(s) = 0$ . Pela definição de curvatura,

$$\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2} = |\alpha''(s)| = \kappa(s) = 0. \quad (1-18)$$

E, disto, segue que  $\alpha''(s) = 0$ . Por integração,

$$\alpha'(s) = \int_0^s \alpha''(s) ds + \alpha'(0) = a, \quad (1-19)$$

onde  $a$  é constante. Novamente por integração, tem-se

$$\alpha(s) = \int_0^s \alpha'(s) ds + \alpha(0) = \int_0^s a ds + \alpha(0) = as + b \quad (1-20)$$

para constantes  $a$  e  $b$ . Assim,  $\alpha(s)$  é uma reta.

**Prova de 2:** Considere a circunferência parametrizada por

$$\alpha(s) = \left( a + R \cos\left(\frac{s}{R}\right), b + R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad R > 0 \quad (1-21)$$

Assim,

$$t(s) = \left( -\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right), \quad (1-22)$$

$$t'(s) = \left( -\frac{1}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right), \quad (1-23)$$

$$n(s) = \left( -\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \right). \quad (1-24)$$

Portanto,  $\kappa(s) = t'(s) \cdot n(s) = \frac{1}{R}$ .

Para recíproca, basta provar que a aplicação diferenciável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(s) = \alpha(s) + Rn(s)$  é constante. De fato, derivando  $f$  e usando as fórmulas de Frenet, vale que

$$f'(s) = \alpha'(s) + Rn'(s) = t(s) + R(-\kappa t(s)) \quad (1-25)$$

Como  $\kappa = \frac{1}{R}$ , tem-se  $f'(s) = t(s) - t(s) = 0$ . Consequentemente,  $f$  é constante e, assim, existe uma constante  $c$ , tal que,  $\alpha(s) + Rn(s) = c$ . Com isto,  $|\alpha(s) - c| = R$  e, portanto,  $\alpha$  está contida em uma circunferência.

Para a prova da segunda parte do teorema, basta observar que se  $\kappa = 0$ , então, pela primeira parte do teorema,  $\alpha$  é uma reta. Por outro lado, se  $\kappa > 0$  é uma função diferenciável em  $I$ , utilizando o Teorema Fundamental das Curvas, tem-se que uma curva plana que tem  $\kappa$  como curvatura é dada<sup>5</sup> por

$$\alpha(s) = \left( \int \cos \theta(s) ds + b_0, \int \sin \theta(s) ds + b_1 \right), \quad (1-26)$$

onde  $b_0, b_1$  são constantes,

$$\theta(s) = \int \kappa(s) ds + \Phi, \quad (1-27)$$

e a curva é determinada a menos de uma translação do ponto  $(b_0, b_1)$  e uma rotação do ângulo  $\Phi$ . Sendo  $\kappa > 0$  constante, é fácil notar, por integração das equações (1-26) e (1-27), que  $\alpha$  está contida em uma circunferência. Isto mostra que  $\alpha$  está contida em uma reta ou em uma circunferência provando, assim, o teorema.

□

Para uma versão do Teorema Fundamental das Curvas Planas (isto é, quando  $\tau = 0$ ) usado na prova do teorema anterior, veja Do Carmo ([7], 2005) e Tenenblat ([14], 2008). A seguir, será apresentado um lema fundamental para a demonstração do próximo resultado de classificação de curvas (Teorema 1.10).

<sup>5</sup>Para prova desta afirmação veja Do Carmo ([7], 2005, p. 29, exercício 9).

**Lema 1.9** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular com curvatura  $\kappa(s) \neq 0$ ,  $s \in I$ . Se  $\alpha$  é uma curva plana, então o plano osculador de  $\alpha$  independe do parâmetro e o traço de  $\alpha$  está contido neste plano osculador.*

**Demonstração:** Suponha que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Caso não seja, basta reparametrizá-la pelo comprimento de arco. Sendo  $\alpha$  uma curva plana, então  $\alpha(I)$  está contido em algum plano  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $v \neq 0$  um vetor ortogonal a  $\Pi$ .

**Afirmção:**  $v$  é paralelo ao vetor  $b(s)$ , para todo  $s \in I$ .

De fato, seja  $s_0 \in I$  fixado. Então,

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle = 0, \quad s \in I, \quad (1-28)$$

e, derivando esta equação, segue que  $\langle \alpha'(s), v \rangle = 0$ , isto é,  $\langle t(s), v \rangle = 0$ , para todo  $s \in I$ . Novamente, por derivação, tem-se

$$\langle \alpha''(s), v \rangle = 0, \quad s \in I. \quad (1-29)$$

Disto, segue que  $\langle t'(s), v \rangle = 0$  e, conseqüentemente,  $\langle \kappa(s)n(s), v \rangle = 0$ , ou seja,  $\kappa(s)\langle n(s), v \rangle = 0$ . Como  $\kappa(s) \neq 0$ , pode-se concluir que  $v$  é ortogonal a  $t(s)$  e  $n(s)$  e, assim,  $v$  é paralelo a  $b(s)$ , para todo  $s \in I$ , o que prova a afirmação anterior.

Portanto, como  $v$  é paralelo à  $b(s)$  e ortogonal de  $\alpha(I)$ , segue que o plano que contém  $\alpha(I)$  é o plano osculador e este plano não depende do parâmetro dado.

□

O teorema a seguir classifica algumas curvas espaciais de curvatura e torção constantes ou cuja curvatura e torção se relacionam por certa equação.

**Teorema 1.10** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura  $\kappa \neq 0$  e torção  $\tau$ . Então:*

1.  $\alpha$  é uma curva plana se, e somente se,  $\tau = 0$ .
2.  $\alpha$  é uma hélice se, e somente se,  $\frac{\kappa}{\tau}$  é constante.
3.  $\alpha$  é uma curva de Bertrand se, e somente se, existem constantes não nulas  $A$  e  $B$ , tais que,  $A\kappa + B\tau = 1$ . Além disso, se  $\tau \neq 0$ , então  $\alpha$  é uma curva de Bertrand se, e somente se, existe uma constante  $A \neq 0$ , tal que,  $(1 - A\kappa)\tau' + A\kappa'\tau = 0$ .
4.  $\alpha$  está contida em uma esfera se, e somente se,

$$\frac{1}{\kappa^2} + \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \kappa \neq 0, \quad \tau \neq 0. \quad (1-30)$$

**Demonstração:** Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com  $t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$  e  $\alpha''(s) = (x''(s), y''(s), z''(s))$ .

**Prova de 1:** Seja  $\alpha$  uma curva plana, então  $b(s)$  é constante e, conseqüentemente,  $b'(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ . Sendo assim, pela definição de torção, tem-se

$$\tau(s) = b'(s)n(s) = 0, \quad s \in I. \quad (1-31)$$

Reciprocamente, se  $\tau(s) = 0$ ,  $s \in I$ , então  $b'(s) = 0$  e  $b(s)$  é constante. Denote  $b(s) = b$ . Agora, para cada  $s_0 \in I$  fixado, defina

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b \rangle. \quad (1-32)$$

**Afirmção:**  $f(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ .

De fato, derivando  $f$  em  $s$ , obtém-se

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), b \rangle = \langle t(s), b \rangle = 0. \quad (1-33)$$

Portanto,  $f(s)$  é constante. Como  $f(s_0) = 0$ , conclui-se que  $f(s) = 0$ .

Assim,  $\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b \rangle = 0$ , para todo  $s \in I$ . Conseqüentemente,  $\alpha$  está contido no plano que contém  $\alpha(s_0)$  e é ortogonal ao vetor  $b$ .

**Prova de 2:** Se  $\alpha$  é uma hélice, então existe um vetor unitário  $v$ , tal que  $\langle t(s), v \rangle = c$ , para  $c \in \mathbb{R}$ . Derivando esta igualdade, segue que  $\langle t'(s), v \rangle = 0$  e, utilizando as fórmulas de Frenet,  $\kappa(s)\langle n(s), v \rangle = 0$ . Como  $\kappa(s) \neq 0$ , segue que,  $\langle n(s), v \rangle = 0$  e, disto,  $v$  pertence ao plano determinado por  $t(s)$  e  $b(s)$ , para todo  $s \in I$ . Assim, pode-se escrever  $v = \cos \theta t(s) + \sin \theta b(s)$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado por  $v$  com as direções tangentes de  $\alpha$ .

**Afirmção:**  $v$  é unitário.

De fato, veja que,

$$\begin{aligned} |v|^2 &= \langle v, v \rangle = \langle \cos \theta t(s) + \sin \theta b(s), \cos \theta t(s) + \sin \theta b(s) \rangle \\ &= \cos^2 \theta \langle t, t \rangle + \sin^2 \theta \langle b, b \rangle = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \end{aligned} \quad (1-34)$$

Note que  $\theta$  é constante. Derivando  $v$  e usando as fórmulas de Frenet, tem-se

$$0 = \cos \theta t'(s) + \sin \theta b'(s) = (k(s) \cos \theta + \tau(s) \sin \theta) n(s) \quad (1-35)$$

Logo,  $k(s) \cos \theta + \tau(s) \sin \theta = 0$  e, assim,

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = -\tan \theta. \quad (1-36)$$

Segue que  $\frac{\kappa}{\tau}$  é constante. Por outro lado, suponha que  $\frac{\kappa}{\tau}$  é constante e considere  $\theta$  fixo, tal que,  $\tan \theta = -\frac{\kappa}{\tau}$ .

**Afirmção:**  $v = \cos \theta t(s) + \sin \theta b(s)$  é constante.

De fato, derivando  $v$  e utilizando as fórmulas de Frenet, tem-se

$$\begin{aligned} v' &= \cos \theta t'(s) + \sin \theta b'(s) = \cos \theta \kappa(s)n(s) + \sin \theta \tau(s)n(s) \\ &= (\cos \theta \kappa(s) + \sin \theta \tau(s))n(s) = (-\cos \theta \tan \theta \tau(s) + \sin \theta \tau(s))n(s) \\ &= \left( -\cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \tau(s) + \sin \theta \tau(s) \right) n(s) = (-\sin \theta \tau(s) + \sin \theta \tau(s))n(s) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1-37)$$

Logo,  $v$  é constante, provando a afirmação dada.

Assim,  $\langle t(s), v \rangle = \cos \theta \langle t(s), t(s) \rangle + \sin \theta \langle t(s), b(s) \rangle = \cos \theta \cdot 1 + \sin \theta \cdot 0 = \cos \theta$  é constante e, portanto,  $\alpha$  é uma hélice.

**Observação:** Outra forma de provar este item é seguir as ideias de Flôres e Pansonato ([8], 2014) da seguinte forma: Defina  $v = \frac{\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)}{\sqrt{(\kappa(s))^2 + (\tau(s))^2}}$ . Assim,

$$v' = \frac{(\kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s))}{\sqrt{((\kappa(s))^2 + (\tau(s))^2)^3}} (\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s)). \quad (1-38)$$

Derivando  $\langle t(s), v \rangle = c$ , tem-se  $\langle t'(s), v \rangle + \langle t(s), v' \rangle = 0$ . Utilizando as definições de  $v$  e  $v'$  e as fórmulas de Frenet, segue que

$$\kappa(s) \frac{(\kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s))}{\sqrt{((\kappa(s))^2 + (\tau(s))^2)^3}} = 0, \text{ ou seja, } \kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s) = 0. \quad (1-39)$$

Sabendo que  $\left(\frac{\kappa(s)}{\tau(s)}\right)' = \frac{\kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s)}{(\tau(s))^2}$ , tem-se  $\left(\frac{\kappa(s)}{\tau(s)}\right)' = 0$  e, portanto,  $\frac{\kappa}{\tau}$  é constante. A recíproca é imediata e fica a cargo do leitor.

**Prova de 3:** A demonstração deste item segue as ideias de Flôres e Pansonato ([8], 2014). Sejam  $\alpha$  uma curva de Bertrand e  $\beta$  seu par de Bertrand. Denote por  $s$  e  $\bar{s}$

os parâmetros comprimento de arco e  $t$  e  $\bar{t}$  os vetores unitários tangentes de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Assim,

$$\frac{d}{ds}\langle t, \bar{t} \rangle = \left\langle t, \frac{d\bar{t}}{ds} \right\rangle + \left\langle \frac{dt}{ds}, \bar{t} \right\rangle = 0. \quad (1-40)$$

Logo,  $\langle t, \bar{t} \rangle = \cos \theta$  e  $|t \times \bar{t}| = \sin \theta$  são constantes, onde  $\theta$  é o ângulo entre  $t$  e  $\bar{t}$ . Se  $\alpha$  é curva de Bertrand, então  $\beta(s) = \alpha(s) + rn(s)$ . Assim, pelas fórmulas de Frenet,

$$\cos \theta = \langle \bar{t}, t \rangle = \left\langle \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}}, t \right\rangle = \left\langle \frac{ds}{d\bar{s}}(t + rn'), t \right\rangle = \frac{ds}{d\bar{s}}(1 - r\kappa), \quad (1-41)$$

e

$$\sin \theta = |\bar{t} \times t| = \left| \frac{ds}{d\bar{s}}(t + rn') \times t \right| = \left| \frac{ds}{d\bar{s}} r\tau \right|. \quad (1-42)$$

Dividindo (1-41) por (1-42), tem-se

$$\frac{1 - r\kappa}{r\tau} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (1-43)$$

e, assim,  $\sin \theta(1 - r\kappa) = \cos \theta(r\tau)$ . Definindo  $A = r$  e  $B = r \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ , segue que  $A\kappa + B\tau = 1$ .

Reciprocamente, suponha  $A\kappa + B\tau = 1$ . Defina  $A = r$  e  $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + rn(s)$ . Assim, pelas fórmulas de Frenet e por  $r\kappa = 1 - B\tau$ , tem-se

$$\frac{d\beta}{ds} = (1 - r\kappa)t - r\tau b = \tau(Bt - rb). \quad (1-44)$$

Dividindo os lados por  $\tau\sqrt{B^2 - r^2}$ , tem-se que o vetor tangente unitário  $\bar{t}$  de  $\beta$  é da forma

$$\frac{(Bt - rb)}{\sqrt{B^2 - r^2}} = \bar{t}. \quad (1-45)$$

Assim,

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{Bt' - rb'}{\sqrt{B^2 - r^2}} = \frac{B\kappa n - r\tau n}{\sqrt{B^2 - r^2}} = \frac{(B\kappa - r\tau)}{\sqrt{B^2 - r^2}}n. \quad (1-46)$$

Como o vetor acima pertence à normal principal de  $\beta$  e tem direção da normal de  $\alpha$ , tem-se que retas normais de  $\beta$  e  $\alpha$  coincidem em  $s$ . Portanto,  $\alpha$  é uma curva de Bertrand.

Além disso,  $\alpha$  é uma curva de Bertrand se, e somente se, existe uma constante  $A \neq 0$ , tal que,

$$(1 - A\kappa(s))\tau'(s) + A\kappa'(s)\tau(s) = 0. \quad (1-47)$$

De fato, sabe-se que  $\alpha$  é uma curva de Bertrand se, e somente se,  $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ , onde  $A$  e  $B$  são constantes. Assim, se  $\tau \neq 0$ , então,

$$\frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)} = \text{constante}. \quad (1-48)$$

Derivando esta igualdade utilizando a regra do quociente, segue que

$$\frac{-A\kappa'(s)\tau(s) - (1 - A\kappa(s))\tau'(s)}{(\tau(s))^2} = 0 \quad (1-49)$$

e, conseqüentemente,

$$(1 - A\kappa(s))\tau'(s) + A\kappa'(s)\tau(s) = 0. \quad (1-50)$$

A recíproca segue os passos contrários dos cálculos acima realizados.

**Prova de 4:** Suponha que  $\alpha(I)$  está contida em uma esfera de centro  $c_0$  e raio  $a$ . Logo,

$$\kappa(s) = \frac{1}{a}, \quad |\alpha(s) - c_0| = a \quad \text{e} \quad |\alpha(s) - c_0|^2 = a^2, \quad s \in I. \quad (1-51)$$

Derivando esta expressão,

$$2|\alpha(s) - c_0| \frac{\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle}{|\alpha(s) - c_0|} = 0 \quad (1-52)$$

e, disto,  $\langle t(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = 0$ . Derivando novamente, segue que,

$$\langle t'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + \langle t(s), t(s) \rangle = 0. \quad (1-53)$$

Como  $t'(s) = \kappa(s)n(s)$ , então

$$\kappa \langle n(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \langle n(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = -\frac{1}{\kappa}. \quad (1-54)$$

Derivando a última equação,

$$\langle n'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + \langle n(s), t(s) \rangle = \frac{\kappa'}{\kappa^2}. \quad (1-55)$$

Como  $n'(s) = -\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s)$ , então

$$-\tau(s)\langle b(s), \alpha(s) - c_0 \rangle - \kappa(s)\langle t(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = \frac{\kappa'}{\kappa^2} \quad \text{e} \quad \langle b(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}. \quad (1-56)$$

Assim, os componentes de  $\alpha(s) - c_0$ , em relação a base ortonormal  $(t, n, b)$ , são  $\left(0, -\frac{1}{\kappa}, -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\kappa}n(s) - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}b(s)\right) \left(-\frac{1}{\kappa}n(s) - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}b(s)\right) &= a^2 := c \\ \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 &= c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1-57)$$

Para provar a recíproca, suponha que  $\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Faça,

$$R = \frac{1}{\kappa}, \quad R' = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{\tau}. \quad (1-58)$$

Então,  $R^2 + (R'T)^2 = c$ . Derivando e multiplicando esta igualdade por  $\frac{\tau}{\tau}$ , tem-se

$$0 = \frac{2RR'\tau}{\tau} + \frac{2R'(R'T)'}{\tau} = \frac{2R'}{\tau}(R\tau + (R'T)') = R\tau + (R'T)'. \quad (1-59)$$

Agora, defina  $\beta(s) = \alpha(s) + Rn - R'Tb$ . Derivando a  $\beta(s)$  e usando as fórmulas de Frenet, (1-58) e (1-59), tem-se que

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= t(s) + R'n(s) - R\tau b(s) - R\kappa t(s) - (R'T)'b(s) - (R'T)\tau n(s) \\ &= (1 - R\kappa)t(s) + (R' - R'T\tau)n(s) - (R\tau + (R'T)')b(s) = 0 \end{aligned} \quad (1-60)$$

Então,  $\beta(s) = c_0$ , onde  $c_0$  é constante. Disto,  $c_0 = \alpha(s) + Rn - R'Tb$  e, assim,

$$|\alpha(s) - c_0|^2 = R^2 + (R')^2 T^2 = a^2 \quad \text{de onde} \quad |\alpha(s) - c_0| = a. \quad (1-61)$$

Portanto,  $\alpha(I)$  está contida na esfera de centro  $c_0$  e raio  $a > 0$ .

□

Visto que uma reta e uma circunferência em  $\mathbb{R}^3$  são curvas que estão contidas em algum plano, e que curvas planas são caracterizadas por serem curvas cuja torção é identicamente nula, então o Teorema 1.8 pode ser enunciado em termos de curvas espaciais da seguinte forma:

*Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$ . Então:*

1.  $\alpha$  é uma reta se, e somente se,  $\tau = 0$  e  $\kappa = 0$ .
2.  $\alpha$  está contida em uma circunferência de raio  $R > 0$  se, e somente se,  $\tau = 0$  e  $\kappa = \frac{1}{R}$ .

A demonstração deste resultado é análoga a prova da primeira parte do Teorema 1.8. Para mais detalhes e informações sobre o estudo das curvas parametrizadas diferenciáveis, consulte a bibliografia listada e suas referências.

---

# SUPERFÍCIES DIFERENCIÁVEIS

---

Neste capítulo, baseados nos estudos de Araújo ([2], 1998), Do Carmo ([7], 2005), Lima ([11], 2016) e Tenenblat ([14], 2008), serão apresentados os principais resultados da teoria clássica das superfícies parametrizadas regulares, com objetivo de dar embasamento teórico para o estudo da curvatura de superfícies parametrizadas estudada no próximo capítulo. De modo geral, neste capítulo, serão introduzidos os conceitos de superfície regular, plano tangente e primeira forma quadrática, iniciando pela definição e exemplos de superfície regular.

## 2.1 Superfície Parametrizada Regular

Nesta seção, serão estabelecidos os conceitos e as propriedades das superfícies parametrizadas regulares. Para Lima (2016, p. 33), “uma superfície regular é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^3$ , formado por abertos de  $\mathbb{R}^2$ , os quais são deformados e colocados suavemente por meio de aplicações denominadas parametrizações locais”.

A definição a seguir, devida a Tenenblat ([14], 2008), formaliza o conceito de superfície parametrizada regular.

**Definição 2.1 (Superfície)** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto aberto. Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisfazendo as seguintes condições:*

1.  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ . Neste caso, denota-se:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U; \quad (2-1)$$

2. Para todo  $q = (u, v) \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

De acordo com Tenenblat (2008, p. 110), “a condição 2 da definição 2.1 garante a existência de plano tangente em cada ponto da superfície”. Esta condição é, por vezes, denominada *condição de regularidade*.

Assim, se  $\{e_1, e_2\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $\{f_1, f_2, f_3\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ , então, para cada  $(u, v) \in U$ , a matriz da aplicação  $dX_q$  pode ser escrita como

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (2-2)$$

Além disso, se denotar

$$X_u(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right) \text{ e } X_v(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right),$$

então, a condição 2 é equivalente a  $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$ .

Ao longo deste capítulo, por simplicidade e a menos que se diga o contrário, denota-se  $X_u(u, v)$  e  $X_v(u, v)$  por  $X_u$  e  $X_v$ , respectivamente, para todo  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$  e, quando necessário,  $S$  denotará o conjunto  $S = \{X(u, v) \in \mathbb{R}^3; (u, v) \in U\}$ .

Note que, a esfera de centro na origem e raio  $r > 0$ , menos os dois pólos, de equação paramétrica  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = (r \sin(u) \cos(v), r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)), \quad u \in (0, \pi) \text{ e } v \in (0, 2\pi), \quad (2-3)$$

por exemplo, é uma superfície parametrizada regular. Com efeito, a aplicação  $X$  é diferenciável, pois

$$X_u = (r \cos(u) \cos(v), r \cos(u) \sin(v), -r \sin(u)), \quad (2-4)$$

$$X_v = (-r \sin(u) \sin(v), r \sin(u) \cos(v), 0) \quad (2-5)$$

são aplicações contínuas. Além disso,  $dX_q$  é injetiva. De fato,

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} r \cos(u) \cos(v) & -r \sin(u) \sin(v) & \vec{i} \\ r \cos(u) \sin(v) & r \sin(u) \cos(v) & \vec{j} \\ -r \sin(u) & 0 & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= (r^2 \sin^2(u) \cos(v), r^2 \sin^2(u) \sin(v), r^2 \sin(u) \cos(u)) \end{aligned} \quad (2-6)$$

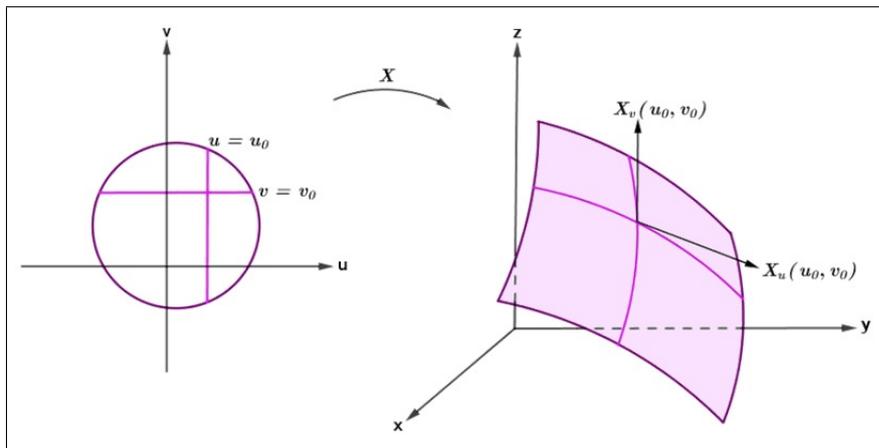
Consequentemente,

$$\begin{aligned} |X_u \times X_v| &= \sqrt{(r^2 \sin^2(u) \cos(v))^2 + (r^2 \sin^2(u) \sin(v))^2 + (r^2 \sin(u) \cos(u))^2} \\ &= \sqrt{r^4 \sin^4(u) \cos^2(v) + r^4 \sin^4(u) \sin^2(v) + r^4 \sin^2(u) \cos^2(u)} \\ &= \sqrt{r^4 \sin^4(u) + r^4 \sin^2(u) \cos^2(u)} = r^2 \sin(u). \end{aligned} \quad (2-7)$$

Como  $r > 0$  e  $\sin(u) \neq 0$ , para  $u \in (0, \pi)$ , tem-se  $|X_u \times X_v| \neq 0$ . Dessa forma, as condições 1 e 2 da definição 2.1 ficam satisfeitas e, com isso, fica provado que a esfera parametrizada pela equação (2-3) é uma superfície regular (Veja a figura 2.2).

Agora, se  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma superfície parametrizada regular e  $(u_0, v_0) \in U$  é um ponto fixado, as curvas  $\alpha(u) = X(u, v_0)$  e  $\beta(v) = X(u_0, v)$  são denominadas curvas coordenadas de  $X$  em  $(u_0, v_0)$ . Já os vetores  $\alpha'(u_0) = X_u(u_0, v_0)$  e  $\beta'(v_0) = X_v(u_0, v_0)$  são denominados vetores tangentes às curvas coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$  em  $(u_0, v_0)$ , respectivamente. Graficamente,

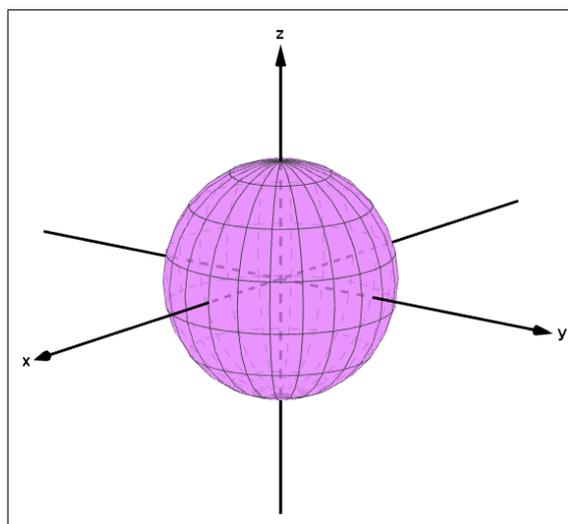
**Figura 2.1:** Vetores tangentes às curvas coordenadas



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 18/03/2021.

Observe que, no caso da esfera, os meridianos e os paralelos são as curvas coordenadas. A figura 2.2 a seguir representa a esfera e algumas de suas curvas coordenadas:

**Figura 2.2:** Esfera de centro na origem e raio  $r$



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 18/03/2021.

Outro exemplo de superfície regular é o plano

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz + d = 0\}$$

parametrizado pela aplicação

$$X(u, v) = \left( u, v, -\frac{1}{c}(au + bv + d) \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad a, b, c \neq 0 \text{ constantes.}$$

Este é um caso especial de uma superfície parametrizada onde a imagem da aplicação  $X$  é o gráfico de uma função diferenciável. Tais superfícies tem papel fundamental na geometria diferencial. Os teoremas que serão apresentados a seguir determinam classes importantes de superfícies parametrizadas regulares. Mais precisamente, estes resultados mostram que gráficos de funções diferenciáveis, superfícies de rotação e imagens inversas de valores regulares são superfícies parametrizadas regulares. O primeiro teorema apresentado a seguir garante que o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície parametrizada regular.

**Teorema 2.2** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável definida em um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , então a aplicação  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ <sup>1</sup> é uma superfície parametrizada regular que descreve o gráfico da função  $f$ .*

**Demonstração:** Primeiro, veja que  $X$  é diferenciável, pois

$$X_u = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right) \text{ e } X_v = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad (2-8)$$

são aplicações contínuas, uma vez que suas coordenadas são funções diferenciáveis. Além disso,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \vec{i} \\ 0 & 1 & \vec{j} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \vec{k} \end{vmatrix} = \vec{k} - \frac{\partial f}{\partial u} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v} \vec{j} = \left( -\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right) \neq 0 \quad (2-9)$$

Com isso, as condições 1 e 2 da definição 2.1 são satisfeitas e, portanto,  $X(u, v)$  é uma superfície parametrizada regular. □

O teorema apresentado a seguir caracteriza uma classe especial de superfícies parametrizadas regulares denominadas superfícies de rotação (ou revolução). Segundo

<sup>1</sup>A menos que se mencione o contrário  $\frac{\partial f}{\partial u}$  e  $\frac{\partial f}{\partial v}$  denotam  $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$  e  $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ , respectivamente, para todo  $(u, v) \in U$ .

Tenenblat (2008, p. 116), “este tipo de superfície descreve o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^3$ , obtidos pela rotação do traço de uma curva regular plana em torno de uma reta deste plano que não intercepta a curva”.

**Teorema 2.3** *Seja  $X(u, v) = (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u))$ ,  $u \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R}$  a superfície gerada pela rotação da curva regular  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ ,  $u \in I$ , com  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis e  $f(u) \neq 0$ . Então, a aplicação  $X$  é uma superfície parametrizada regular.*

**Demonstração:** Derivando  $X$  em relação a  $u$  e  $v$ , tem-se,

$$X_u = (f'(u) \cos(v), f'(u) \sin(v), g'(u)) \quad \text{e} \quad X_v = (-f(u) \sin(v), f(u) \cos(v), 0). \quad (2-10)$$

Como  $\alpha$  é regular, então  $X_u$  e  $X_v$  são contínuas. Assim,  $X$  é diferenciável. Além disso, como  $\alpha'(u) = (f'(u), 0, g'(u))$  e  $|\alpha'(u)| \neq 0$ , então  $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 \neq 0$ .

Também,  $X_u \times X_v \neq 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} f'(u) \cos(v) & -f(u) \sin(v) & \vec{i} \\ f'(u) \sin(v) & f(u) \cos(v) & \vec{j} \\ g'(u) & 0 & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= (-f(u)g'(u) \cos(v), -f(u)g'(u) \sin(v), f(u)f'(u)). \end{aligned} \quad (2-11)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |X_u \times X_v|^2 &= (f(u)g'(u))^2 \cos^2(v) + (f(u)g'(u))^2 \sin^2(v) + (f(u)f'(u))^2 \\ &= (f(u)g'(u))^2 (\cos^2(v) + \sin^2(v)) + (f(u)f'(u))^2 \\ &= (f(u))^2 (f'(u))^2 + (f(u))^2 (g'(u))^2 \\ &= (f(u))^2 ((f'(u))^2 + (g'(u))^2). \end{aligned} \quad (2-12)$$

Logo,  $|X_u \times X_v| \neq 0$ , pois  $f(u) \neq 0$ . Consequentemente, as condições 1 e 2 da definição 2.1 são satisfeitas e, disto,  $X(u, v)$  é uma superfície parametrizada regular.

□

A aplicação

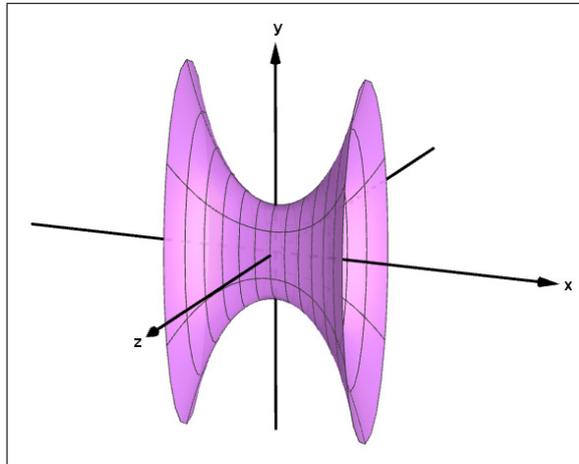
$$X(u, v) = \left( u, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \sin v \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad (2-13)$$

por exemplo, é uma superfície de rotação que descreve o catenóide representado na figura 2.3, obtido pela rotação da catenária

$$\alpha(u) = \left( u, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right), 0 \right), \quad u \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a > 0,$$

em torno do eixo  $x$ .

**Figura 2.3:** *Catenóide*



**Fonte:** *Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 18/03/2021.*

Segundo Biezuner (2019, p. 63), “as superfícies parametrizadas regulares, assim como as curvas parametrizadas regulares, são localmente injetivas, pois podem ocorrer autointerseções”. O teorema a seguir comprova este fato.

**Teorema 2.4** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Para todo  $(u_0, v_0) \in U$ , existe um subconjunto aberto  $\bar{U} \subset U$ , tal que  $(u_0, v_0) \in \bar{U}$  e  $X$  restrita a  $\bar{U}$  é injetiva.*

**Demonstração:** A prova desse teorema é consequência do Teorema da Função Inversa e pode ser encontrada em Tenenblat ([14], 2008, p. 120).

A superfície  $X$  da equação (2-3), por exemplo, não é uma aplicação injetiva em  $U = (0, \pi) \times \mathbb{R}$ . Mas,  $X$  é injetiva quando restrita a um domínio  $\bar{U} = (0, \pi) \times I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  de comprimento menor ou igual a  $2\pi$ .

O teorema a seguir caracteriza uma classe de superfícies que são imagens inversas de valores regulares. “[...] a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável definida num aberto de  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície regular, por ser, localmente, o gráfico de uma função.” (LIMA, 2016, p. 54).

**Teorema 2.5** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então,  $S = f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}$  é uma superfície regular, onde  $a \in f(U)$  é um valor regular<sup>2</sup> de  $f$ .*

<sup>2</sup> $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$  se  $\nabla f(p) \neq 0$ , para todo  $p \in f^{-1}(a)$ .

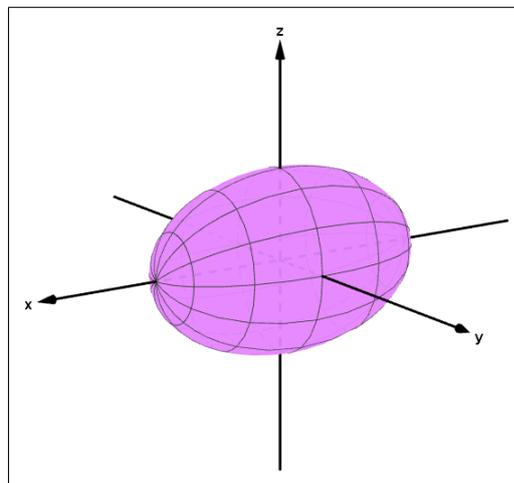
**Demonstração:** A demonstração deste teorema segue do Teorema da Função Inversa e do Teorema 2.2. Para detalhes da demonstração, veja Do Carmo ([7], 2005, p. 69-70).

Por exemplo,

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \right\} \quad (2-14)$$

é uma superfície parametrizada regular que descreve um elipsóide menos dois pontos representado na figura 2.4.

**Figura 2.4:** *Elipsóide*



**Fonte:** *Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 18/03/2021.*

Com efeito, se definir

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad (2-15)$$

então  $f$  é uma função diferenciável, pois as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2} \quad (2-16)$$

são contínuas e  $S = f^{-1}(0)$ . Além disso, zero é um valor regular de  $f$ , pois, se  $p = (x, y, z)$ , então

$$\nabla f(p) = (0, 0, 0) \text{ se, e somente se, } p = (0, 0, 0) \text{ e } (0, 0, 0) \notin f^{-1}(0).$$

Portanto, pelo Teorema 2.5,  $S = f^{-1}(0)$  é uma superfície regular.

Por diversas vezes, e para simplificar cálculos, será necessário parametrizar uma superfície com uma parametrização dada pelo gráfico de uma função diferenciável. O

problema é que nem sempre isto pode ser feito globalmente. Sendo assim, o teorema que será apresentado a seguir compõe parte da teoria da reparametrização de uma superfície regular e fornece uma alternativa para olhar tal superfície regular localmente como gráfico de uma função diferenciável. Por questão de comodidade e para não distanciar dos objetivos, a demonstração deste teorema será omitida neste trabalho. Ao leitor interessado em conhecer a prova, sugere-se consultar Tenenblat ([14], 2008, p. 125-129) e suas referências bibliográficas.

**Teorema 2.6** *Sejam  $U, \bar{U} \subset \mathbb{R}^2$  subconjuntos abertos e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular.*

(i) *Se  $f : \bar{U} \rightarrow U$  é uma aplicação diferenciável, tal que,  $h(\bar{U}) = U$  com determinante da matriz jacobiana não nulo, então  $\bar{X} = X \circ f$  é uma superfície parametrizada regular que tem o mesmo traço que  $X$ .*

(ii) *Para cada  $(u_0, v_0) \in U$ , existe um subconjunto aberto  $V \subset U$  que contém o ponto  $(u_0, v_0)$  e uma reparametrização  $f : \bar{U} \rightarrow V$ , tal que, o traço de  $\bar{X} = X \circ h$  é o gráfico de uma função diferenciável.*

Em essência, o item (i) do teorema acima garante que existem diversas superfícies parametrizadas regulares com a mesma imagem. A aplicação  $\bar{X}$  definida no teorema anterior é denominada *reparametrização* de  $X$  por  $f$ . O item (ii) garante que toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável.

A superfície  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}^2 - \bar{v}^2)$ ,  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$ , por exemplo, é uma reparametrização da superfície  $X(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , por meio da aplicação  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$h(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} - \bar{v}).$$

De fato, para todo  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \bar{X} &= X \circ h = \left( \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}) + \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{v}), \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}) - \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{v}), 4 \left( \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}) \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{v}) \right) \right) \\ \bar{X} &= \left( \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v} + \frac{1}{2}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v}, \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v} - \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}, \bar{u}^2 - \bar{u}\bar{v} + \bar{v}\bar{u} - \bar{v}^2 \right) \\ \bar{X} &= (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}^2 - \bar{v}^2). \end{aligned} \tag{2-17}$$

Na seção a seguir, será demonstrada a existência de um plano tangente bem definido em cada ponto de uma superfície diferenciável.

## 2.2 Plano Tangente

Inicialmente, sejam  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  funções diferenciáveis definidas em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Assim, pode-

se considerar uma curva diferenciável  $\alpha$  na superfície dada por  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ . A grosso modo, um vetor tangente à superfície  $X$  é um vetor  $w$  tangente à uma curva desta superfície. A definição a seguir formaliza o conceito de vetor tangente.

Ao longo desta seção, quando não houver confusão,  $X(u, v)$  representa uma superfície regular de parâmetros  $u$  e  $v$ .

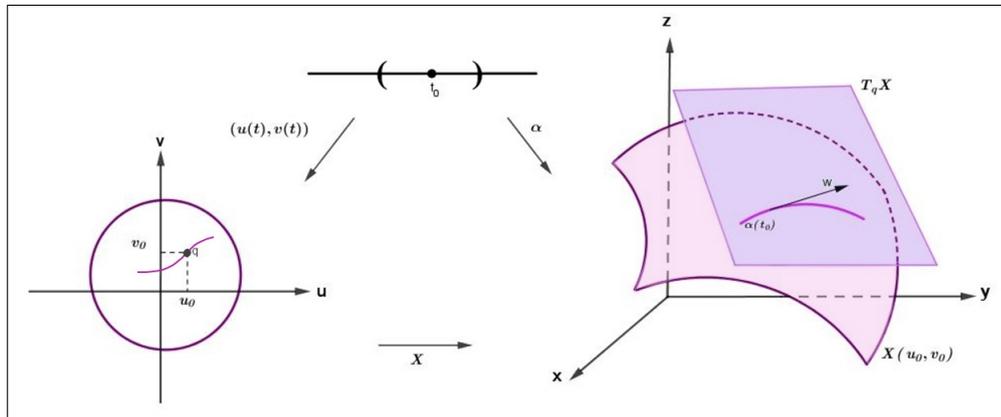
**Definição 2.7** *Sejam  $X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , uma superfície parametrizada regular,  $q = (u_0, v_0) \in U$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , uma curva da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ ,  $t_0 \in I$ . Um vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $X$  em  $q$  se  $w = \alpha'(t_0)$  (Veja a figura 2.5).*

Os vetores  $w_1 = X_u(u_0, v_0)$  e  $w_2 = X_v(u_0, v_0)$ , por exemplo, são vetores tangentes a  $X$  em  $(u_0, v_0)$ , já que  $w_1$  e  $w_2$  são vetores tangentes às curvas coordenadas  $\alpha(u) = X(u, v_0)$  e  $\beta(v) = X(u_0, v)$  de  $X$  em  $(u_0, v_0)$ .

**Definição 2.8** *O conjunto de todos os vetores tangentes à  $X$  no ponto  $q = (u_0, v_0) \in U$  é denominado plano tangente à  $X$  em  $q$ . A notação  $T_qX$  denota o plano tangente à  $X$  em  $q$ .*

A figura 2.5 a seguir representa geometricamente os conceitos de vetor e plano tangente à superfície  $X$ .

**Figura 2.5:** Vetor Tangente e Plano Tangente de uma Superfície



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 19/03/2021.

De modo geral, se  $q = (u_0, v_0)$ , então  $T_qX = \{w; w = aX_u(q) + bX_v(q), a, b \in \mathbb{R}\}$ , ou seja,  $T_qX$  é o plano de  $\mathbb{R}^3$  obtido pela combinação linear dos vetores  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ . De fato, seja  $w \in T_qX$  e, sem perda de generalidades, suponha que  $t_0 = 0$ . Pela Definição 2.7,  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  e  $(u(0), v(0)) := q$ . Pela regra da cadeia,

$$w = \alpha'(0) = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \Big|_{t=0} = X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0). \quad (2-18)$$

Tomando  $a = u'(0)$  e  $b = v'(0)$ , tem-se  $w = aX_u(q) + bX_v(q)$ . Por outro lado, seja  $w$  uma combinação linear de  $X_u$  e  $X_v$ , ou seja,

$$w = aX_u(q) + bX_v(q).$$

Defina  $u(t) = at + u_0$ ,  $v(t) = bt + v_0$  e considere a curva em  $X$  definida por  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ . Então,  $(u(0), v(0)) = q$ ,  $u'(0) = a$ ,  $v'(0) = b$  e

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \left. \frac{d}{dt} (X(u(t), v(t))) \right|_{t=0} \\ &= X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0) \\ &= aX_u(q) + bX_v(q) \\ &= w. \end{aligned} \tag{2-19}$$

Disto,  $w$  é um vetor tangente à uma curva  $\alpha$  de  $X$  e, conseqüentemente,  $w \in T_qX$ .

A partir deste ponto, este trabalho será direcionado à estabelecer o conceito de curvatura de uma superfície, isto é, será verificado o quão rápido uma superfície regular  $X$  afasta-se de seu plano tangente nas proximidades de um ponto  $q = (u, v)$ . Isto significa medir a “velocidade” com que a direção de um vetor normal e unitário a  $X$  em  $q$  varia em uma vizinhança de  $q$  contida em  $X$  (COIMBRA, 2008, p. 89).

No que segue, será feita uma breve descrição sobre a aplicação normal de Gauss com objetivo de estabelecer, posteriormente, o conceito de curvatura. A definição a seguir é devida à Tenenblat ([14], 2008).

**Definição 2.9** *Sejam  $X(u, v)$  uma superfície definida em  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $q = (u_0, v_0) \in U$ .*

(i) *Um vetor  $w \in \mathbb{R}^3$  é dito um vetor normal a  $X$  em  $q$  se  $w$  é ortogonal à  $T_qX$ , ou seja, se  $w$  é ortogonal a todos os vetores tangentes a  $X$  em  $q$ . O vetor normal unitário a  $X$  em  $q$  é o vetor*

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q). \tag{2-20}$$

(ii) *A aplicação diferenciável  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por*

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v) \tag{2-21}$$

*tem imagem  $Im(N)$  na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  e é denominada aplicação normal de Gauss.*

Considere, por exemplo, o cilindro circular parametrizado por

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \tag{2-22}$$

Então, o plano tangente a  $X$  em  $q = (u, v)$  é o plano  $T_q X$  gerado pelos vetores

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0) \text{ e } X_v = (0, 0, 1). \quad (2-23)$$

Além disso, veja que,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0) \quad (2-24)$$

e  $|X_u \times X_v| = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} = 1$ . Consequentemente, o vetor normal à  $X$  em cada  $(u, v)$  é dado por

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = (\cos u, \sin u, 0). \quad (2-25)$$

Agora, sejam  $h$  uma mudança de parâmetros e  $\bar{X} = X \circ h$  uma reparametrização de  $X$  por  $h$ . Então  $T_{\bar{q}} \bar{X} = T_{h(\bar{q})} X$ . A afirmação seguinte mostra que uma mesma superfície pode ser parametrizada por duas parametrizações com orientações opostas.

**Afirmção:** Se  $\bar{N}$  é o vetor normal a  $\bar{X}$  em  $\bar{q}$  e  $N$  o vetor normal a  $X$  em  $h(\bar{q})$ , então  $\bar{N}(\bar{q}) = \pm N(h(\bar{q}))$ , onde o sinal depende do sinal do determinante da matriz jacobiana de  $h$ , ou seja,

$$\det J(h) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \end{vmatrix}. \quad (2-26)$$

Com efeito, sejam  $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{v})$ ,  $h(\bar{q}) = h(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$  e  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = X(h(\bar{u}, \bar{v}))$ . Então, pela regra da cadeia,

$$\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}) = X_u(h(\bar{q})) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) + X_v(h(\bar{q})) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) \quad (2-27)$$

$$\bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q}) = X_u(h(\bar{q})) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) + X_v(h(\bar{q})) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}). \quad (2-28)$$

Além disso, é fácil ver que  $(\bar{X}_{\bar{u}} \times \bar{X}_{\bar{v}})(\bar{q}) = (X_u \times X_v)(h(\bar{q})) \det J(h)$ , uma vez que  $\det J(h) \neq 0$  e  $\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q})$ ,  $\bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q})$  e  $X_u(h(\bar{q}))$ ,  $X_v(h(\bar{q}))$  são bases do mesmo plano de  $\mathbb{R}^3$ . Portanto,

$$\bar{N}(\bar{q}) = N(h(\bar{q})) \text{ se } \det J(h) > 0 \quad (2-29)$$

$$\bar{N}(\bar{q}) = -N(h(\bar{q})) \text{ se } \det J(h) < 0, \quad (2-30)$$

provando a afirmação anterior.

Seja

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{v}, \sin \bar{v}, \bar{u}), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2, \quad (2-31)$$

por exemplo, uma reparametrização de  $X$ , dada na equação (2-22), por meio da mudança de parâmetros  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v}, \bar{u})$ . Então,

$$\bar{X}_{\bar{u}} = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad \bar{X}_{\bar{v}} = (-\sin \bar{v}, \cos \bar{v}, 0). \quad (2-32)$$

Como,  $\det J(h) = -1 < 0$ , segue que,  $\bar{N}(\bar{u}, \bar{v}) = -N(h(\bar{u}, \bar{v})) = (-\cos \bar{v}, -\sin \bar{v}, 0)$ , uma vez que  $N(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$ , conforme a equação (2-25).

Na próxima seção será estabelecido um importante conceito para caminhar para definição de curvatura de uma superfície regular, a saber, a primeira forma quadrática.

## 2.3 A Primeira Forma Quadrática

Nesta seção, será apresentado um conceito fundamental para estabelecimento do conceito de curvatura de uma superfície: a primeira forma quadrática ou primeira forma fundamental. De modo genérico, este conceito permite medir elementos de uma superfície e, com isso, pode ser utilizado para determinar, por exemplo, comprimento de curvas em uma superfície regular, ângulo entre vetores tangentes e áreas de regiões da superfície.

Segundo Delgado e Frensel (2017, p. 129), “[...] a importância da primeira forma fundamental  $I$  vem do fato de que, conhecendo  $I$ , podemos resolver problemas métricos de uma superfície regular sem fazer referência ao ambiente  $\mathbb{R}^3$  no qual  $X$  está mergulhada”.

Desse modo, primeiro, será definida a primeira forma quadrática de uma superfície regular.

**Definição 2.10 (A Primeira Forma Quadrática)** *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e  $q \in U \subset \mathbb{R}^2$ . A primeira forma quadrática de  $X$  em  $q$  é a aplicação  $I_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2, \quad w \in T_q X. \quad (2-33)$$

[...] a primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície  $S$  herda o produto interno natural do  $\mathbb{R}^3$ . Geometricamente, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer medidas na superfície [...] sem fazer menção ao espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ , onde está a superfície. (DO CARMO, 2005, p. 109).

Agora, se  $X(u, v)$  é uma superfície regular e  $q = (u_0, v_0)$ , então  $I_q$  pode ser representada, de forma mais simples, em termos da base  $\{X_u, X_v\}$  associada à  $X$  em  $q$ , conforme mostra a afirmação a seguir. Para mostrar isto, defina:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle(q), \quad F = \langle X_u, X_v \rangle(q) \quad \text{e} \quad G = \langle X_v, X_v \rangle(q). \quad (2-34)$$

**Afirmção:**  $I_q(w) = a^2E + 2abF + b^2G$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

De fato, se  $w \in T_qX$ , então,  $w = aX_u(q) + bX_v(q)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, sendo  $I_q(w) = \langle w, w \rangle$ , tem-se

$$\begin{aligned} I_q(w) &= \langle aX_u(q) + bX_v(q), aX_u(q) + bX_v(q) \rangle \\ &= a^2 \langle X_u, X_u \rangle(q) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(q) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(q) \end{aligned} \quad (2-35)$$

Portanto,

$$I_q(w) = a^2E + 2abF + b^2G, \quad (2-36)$$

onde  $E, F, G$  são funções calculadas no ponto  $q$ . As funções diferenciáveis  $E = E(u, v)$ ,  $F = F(u, v)$  e  $G = G(u, v)$ , definidas para todo par  $(u, v)$ , são os coeficientes da primeira forma quadrática. A seguir são apresentadas duas propriedades dos coeficientes da primeira forma quadrática.

• **Propriedade 1:**  $E > 0$  e  $G > 0$ .

De fato, pela definição,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 > 0 \text{ e } G = \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 > 0. \quad (2-37)$$

• **Propriedade 2:**  $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 > 0$ .

Com efeito, se  $X_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$  e  $X_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$ , então

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right). \quad (2-38)$$

Logo,

$$\begin{aligned} |X_u \times X_v|^2 &= \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \\ &+ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 - \\ &- 2 \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (2-39)$$

Como,

$$\langle X_u, X_v \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right\rangle = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad (2-40)$$

então

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_v \rangle^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right). \end{aligned} \quad (2-41)$$

Consequentemente, somando as expressões (2-39) e (2-41), tem-se,

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right].$$

Por outro lado,

$$|X_u|^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \quad \text{e} \quad |X_v|^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2. \quad (2-42)$$

Assim,  $|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2$  e, consequentemente,

$$|X_u \times X_v|^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2. \quad (2-43)$$

Disto,

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0, \quad (2-44)$$

o que prova a propriedade 2 dada.

Para a superfície  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , que descreve o cilindro circular  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ , por exemplo, os coeficientes da primeira forma quadrática são dados por

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle (-\sin u, \cos u, 0), (-\sin u, \cos u, 0) \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle (-\sin u, \cos u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1, \end{aligned}$$

pois  $X_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$  e  $X_v(u, v) = (0, 0, 1)$ .

Agora, se  $S$  é o helicóide parametrizado pela equação

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu), \quad b \in \mathbb{R}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad (2-45)$$

então

$$X_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, b) \quad \text{e} \quad X_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 0). \quad (2-46)$$

Consequentemente, como  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$  e  $G = \langle X_v, X_v \rangle$ , os coeficientes da primeira forma quadrática de  $X$  são

$$\begin{aligned} E &= \langle (-v \sin u, v \cos u, b), (-v \sin u, v \cos u, b) \rangle = v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 u + b^2 \\ &= v^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) + b^2 = v^2 + b^2, \\ F &= \langle (-v \sin u, v \cos u, b), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = -v \sin u \cos u + v \sin u \cos u = 0, \\ G &= \langle (\cos u, \sin u, 0), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = \cos^2 u + \sin^2 u = 1. \end{aligned}$$

A seguir, será mostrado como a primeira forma quadrática se relaciona com conceitos de medidas em superfícies. Primeiro, será estabelecido o conceito de comprimento de uma curva da superfície e, em seguida, os conceitos de ângulo entre vetores e área de regiões em uma superfície parametrizada em termos da primeira forma quadrática.

• **Comprimento de Curvas:** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , uma curva diferenciável de uma superfície parametrizada regular  $X(u, v)$ . Então, o comprimento de arco de  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é definido por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))} dt, \quad t_0, t_1 \in I, \quad t_0 \leq t_1, \quad (2-47)$$

onde  $\alpha'(t)$  é um vetor tangente à superfície  $X$  em  $q(t) = (u(t), v(t))$ .

• **Ângulo entre Vetores:** Da geometria analítica, sabe-se que se  $w_1, w_2 \in T_q X$ ,  $w_1, w_2 \neq 0$  e  $q = (u, v)$ , então o ângulo formado por  $w_1$  e  $w_2$  é o número  $\theta$  definido por

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1| |w_2|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (2-48)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} 2\langle w_1, w_2 \rangle &= \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= (\langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, w_1 \rangle) + (\langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_2, w_2 \rangle) - |w_1|^2 - |w_2|^2 \\ &= \langle w_1, w_1 + w_2 \rangle + \langle w_1 + w_2, w_2 \rangle - |w_1|^2 - |w_2|^2 \\ &= \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle - |w_1|^2 - |w_2|^2, \end{aligned} \quad (2-49)$$

e, conseqüentemente,

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{|w_1 + w_2|^2 - |w_1|^2 - |w_2|^2}{2}. \quad (2-50)$$

Substituindo a equação (2-50) na equação (2-48), segue que

$$\cos \theta = \frac{|w_1 + w_2|^2 - |w_1|^2 - |w_2|^2}{2 |w_1| |w_2|}. \quad (2-51)$$

Mas,  $|w_1 + w_2|^2 = I_q(w_1 + w_2)$ ,  $|w_1|^2 = I_q(w_1)$  e  $|w_2|^2 = I_q(w_2)$ . Logo, por (2-51), tem-se

$$\cos \theta = \frac{I_q(w_1 + w_2) - I_q(w_1) - I_q(w_2)}{2\sqrt{I_q(w_1)I_q(w_2)}}. \quad (2-52)$$

Além disso, se  $\alpha(u) = X(u, v_0)$  e  $\beta(v) = X(u_0, v)$  são as curvas coordenadas de uma superfície regular  $X$  em um ponto  $(u_0, v_0)$ , então o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|}. \quad (2-53)$$

Como  $\langle X_u, X_v \rangle = F(u_0, v_0)$ ,

$$E = |X_u|^2, \text{ isto é, } |X_u| = \sqrt{E}, \quad (2-54)$$

$$G = |X_v|^2, \text{ isto é, } |X_v| = \sqrt{G}, \quad (2-55)$$

então, de (2-53), segue que,

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad (2-56)$$

onde os coeficientes  $E, F$  e  $G$  são calculados no ponto  $(u_0, v_0)$  pertencente ao domínio de  $X$ .

Segundo Do Carmo (2005, p. 113), decorre da expressão em (2-56) que “as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se  $F(u, v) = 0$ , para todo  $(u, v)$ . Uma tal parametrização é chamada parametrização ortogonal”.

• **Área:** Outra medida geométrica que pode ser calculada por meio dos coeficientes da primeira forma quadrática é a área de uma região limitada de uma superfície regular.

Para Tenenblat (2008, p. 142), “uma região  $D$  do plano é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  fechado e limitado, cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^2$  e cujo bordo, homeomorfo a uma circunferência, é formado por um número finito de traços de curvas regulares”.

A definição a seguir estabelece o conceito de área.

**Definição 2.11 (Área de Região)** *Sejam  $D \subset U \subset \mathbb{R}^2$  e  $R = X(D)$  uma região contida em uma vizinhança coordenada  $X(U)$  de uma superfície regular  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $X$  restrita ao interior de  $D$  é injetiva. A área da região  $R$  é definida por*

$$A(R) = \int \int_D |X_u \times X_v| dudv, \quad (2-57)$$

onde  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma quadrática de  $X$ .

Lembrando que,

$$|X_u \times X_v|^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2, \quad (2-58)$$

tem-se  $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$ , e pela definição de área

$$A(R) = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (2-59)$$

Pode-se pensar nessa definição geometricamente, de acordo com a seguinte justificativa de Tenenblat (2008),

Fixemos um ponto  $(u_0, v_0) \in D$ . A área do paralelogramo formado pelos vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  é dada por  $|X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)|$ . Este valor é aproximadamente igual a área de uma região em  $X(\bar{D})$  onde  $\bar{D} \subset D$  é um retângulo com vértice em  $(u_0, v_0)$  e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados  $u$  e  $v$ . (TENENBLAT, 2008, p. 142).

Um exemplo clássico bastante abordado em livros do ensino básico, porém sem demonstração, é o da esfera de raio  $r$  cuja área de superfície é  $4\pi r^2$ . Os cálculos apresentados a seguir demonstram este fato. Com efeito, considere a esfera de raio  $r$  parametrizada por  $X(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u)$ , com  $0 < u < \pi$  e  $0 < v < 2\pi$ . Então, como calculado anteriormente na equação (2-7), vale que  $|X_u \times X_v| = r^2 \sin u$  e, portanto, pela definição 2.11, a área da superfície esférica é dada por

$$\begin{aligned} A(X) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |X_u \times X_v| dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin(u) dudv = r^2 \int_0^{2\pi} (-\cos(u)) \Big|_{u=0}^{u=\pi} dv \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (-\cos(\pi) + \cos(0)) dv = r^2 \int_0^{2\pi} 2dv = r^2 (2v) \Big|_{v=0}^{v=2\pi} = 4\pi r^2, \end{aligned} \quad (2-60)$$

conforme foi afirmado anteriormente.

A definição a seguir conceitua superfícies para os quais distâncias e ângulos são preservados por meio de uma aplicação diferenciável entre tais superfícies. Logo, neste caso, pode-se calcular distâncias entre pontos e ângulos entre vetores de uma superfície  $S$  conhecendo tais medidas de outra superfície  $\bar{S}$  isométrica à  $S$ . Novamente, tal conceito será definido em termos da primeira forma quadrática.

**Definição 2.12** Duas superfícies  $X(u, v)$  e  $\bar{X}(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , são isométricas se,

$$E(u, v) = \bar{E}(u, v), F(u, v) = \bar{F}(u, v) \text{ e } G(u, v) = \bar{G}(u, v), (u, v) \in U,$$

onde  $E, F, G$  e  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  são os coeficientes das primeiras formas quadráticas de  $X$  e  $\bar{X}$ , respectivamente.

A exemplo disso, é fácil mostrar que existe uma isometria entre o plano e o cilindro. De fato, sejam  $S$  uma região do plano e  $\bar{S}$  o cilindro menos um meridiano parametrizados, respectivamente, pelas aplicações

$$X(u, v) = (u, v, 0), \quad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}, \quad (2-61)$$

$$\bar{X}(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (2-62)$$

Assim,  $X_u = (1, 0, 0)$ ,  $X_v = (0, 1, 0)$ ,  $\bar{X}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ ,  $\bar{X}_v = (0, 0, 1)$  e, conseqüentemente,

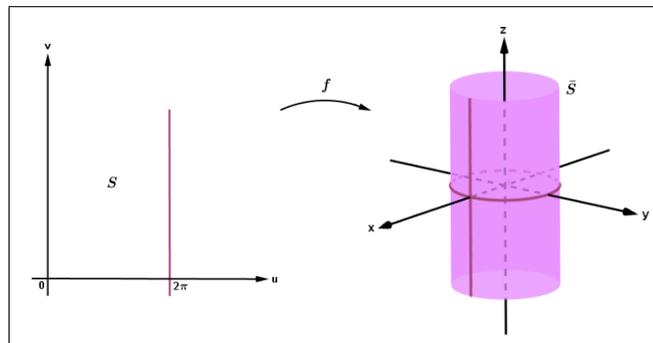
$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1, F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, G = \langle X_v, X_v \rangle = 1, \quad (2-63)$$

$$\bar{E} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = 1, \bar{F} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle = 0, \bar{G} = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle = 1. \quad (2-64)$$

Portanto,  $X$  e  $\bar{X}$  são isométricas, pois  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$ ,  $G = \bar{G}$ , isto é, existe uma isometria  $f : S \rightarrow \bar{S}$ .

Segundo Tenenblat (2008, p. 145), a isometria  $f : S \rightarrow \bar{S}$  “consiste em enrolar a região do plano em torno do cilindro, de modo que os segmentos horizontais de  $S$  são levados nos paralelos do cilindro menos um ponto e as retas verticais de  $S$ , nos meridianos”. Veja a figura 2.6.

**Figura 2.6:** Isometria entre um plano e um cilindro



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 19/03/2021.

Para mais detalhes e informações sobre a primeira forma quadrática das superfícies parametrizadas diferenciáveis, consulte as referências [2], [7], [11], [14].

# CURVATURAS GAUSSIANA E MÉDIA DE UMA SUPERFÍCIE

Este capítulo será destinado ao estudo das curvaturas gaussiana e média de uma superfície regular. Mais precisamente, serão estabelecidas as definições, propriedades e relações entre essas curvaturas e, em seguida, serão classificados os pontos de uma superfície por meio do conhecimento prévio do sinal das curvaturas gaussiana e/ou média e, também, serão classificadas, por meio de um teorema geral, as superfícies de curvatura gaussiana constante não-negativa cujos pontos satisfazem certa propriedade. Para encerrar, serão estabelecidos exemplos de superfícies de curvatura gaussiana e/ou média constantes. Os principais resultados deste capítulo são baseados nos trabalhos de Araújo ([2], 1998), Do Carmo ([7], 2005), Lima ([11], 2016) e Tenenblat ([14], 2008).

## 3.1 A Segunda Forma Quadrática

Nesta seção, será definido e estudado um conceito fundamental para definir a curvatura de uma superfície, à saber: a segunda forma quadrática. Para isso, sejam  $U$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular,  $q \in U$ , com  $q = (u_0, v_0)$ ,  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva diferenciável, tal que, para  $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ , tem-se  $q = (u(t_0), v(t_0))$  e  $w = \alpha'(t_0)$  e seja  $N(q)$  o vetor normal à  $X$  no ponto  $q$ .

**Definição 3.1 (A Segunda Forma Quadrática)** *A segunda forma quadrática de  $X$  em  $q$  é a aplicação  $II_q(w) : T_qX \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada vetor  $w \in T_qX$  o número*

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle. \quad (3-1)$$

A definição acima traz a desvantagem de produzir cálculos trabalhosos para se determinar  $II_q(w)$ . Por isso, a seguir, será estabelecida uma expressão mais viável para o cálculo da segunda forma quadrática. Para isso, seja  $q = (u_0, v_0)$  e defina

$$e(q) = \langle X_{uu}, N \rangle(q), \quad f(q) = \langle X_{uv}, N \rangle(q), \quad g(q) = \langle X_{vv}, N \rangle(q). \quad (3-2)$$

**Afirmção:**  $II_q(w) = a^2e(q) + 2abf(q) + b^2g(q)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes.

De fato, sejam  $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva escolhida conforme definido no início desta seção. Assim,  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$  e, derivando  $\alpha$  em relação a  $t$ , tem-se

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t)). \quad (3-3)$$

Para  $t = t_0$ , segue que  $\alpha'(t_0) = u'(t_0)X_u(u_0, v_0) + v'(t_0)X_v(u_0, v_0)$ . Como  $w = \alpha'(t_0)$ , obtém-se  $(u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b)$ . Agora, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2X_{uu}(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) \\ &+ v''(t)X_v(u(t), v(t)) + (v'(t))^2X_{vv}(u(t), v(t)), \end{aligned} \quad (3-4)$$

de onde, para  $t = t_0$ , segue que

$$\alpha''(t_0) = a^2X_{uu}(u_0, v_0) + 2abX_{uv}(u_0, v_0) + b^2X_{vv}(u_0, v_0). \quad (3-5)$$

Sendo assim, por (3-2) e (3-5), tem-se que

$$\begin{aligned} II_q(w) &= \langle \alpha''(t_0), N(q) \rangle \\ &= \langle a^2X_{uu}(q) + 2abX_{uv}(q) + b^2X_{vv}(q), N(q) \rangle \\ &= a^2\langle X_{uu}, N \rangle(q) + 2ab\langle X_{uv}, N \rangle(q) + b^2\langle X_{vv}, N \rangle(q) \\ &= a^2e(q) + 2abf(q) + b^2g(q), \end{aligned} \quad (3-6)$$

provando a afirmação dada.

Observe que a segunda forma quadrática dada na equação (3-6) depende somente da parametrização  $X$  e do vetor normal  $N$ , e não depende da curva  $\alpha$  escolhida. Além disso, para todo  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , as funções  $e(u, v)$ ,  $f(u, v)$  e  $g(u, v)$  são diferenciáveis.

As funções  $e$ ,  $f$  e  $g$  são denominadas coeficientes da segunda forma quadrática.

A definição a seguir conceitua o que se entende por curvatura normal, com objetivo de dar uma interpretação geométrica para segunda forma quadrática.

**Definição 3.2** *Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $q = (u_0, v_0)$ . Para cada vetor não-nulo  $w \in T_qX$ , a aplicação  $k_n : T_qX \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} \quad (3-7)$$

*é denominada de função curvatura normal.*

**Afirmção:** A curvatura normal é invariante segundo vetores de uma mesma reta do plano tangente. (HARLE, 1973, p. 151)

De fato, seja  $w \in T_qX$  um vetor não nulo. Conseqüentemente, existem  $a, b \neq 0$ , tais que,  $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ . Logo, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda \neq 0$ , tem-se  $\lambda w = (\lambda a)X_u(u_0, v_0) + (\lambda b)X_v(u_0, v_0)$ . Assim,

$$I_q(\lambda w) = \langle \lambda w, \lambda w \rangle = \lambda^2 |w|^2 = \lambda^2 |w|^2 \quad \text{e} \quad II_q(\lambda w) = \lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 ab f_0 + \lambda^2 b^2 g_0, \quad (3-8)$$

onde  $e_0, f_0, g_0$  são os coeficientes da segunda forma quadrática em  $(u_0, v_0)$ . Com isso,

$$\begin{aligned} k_n(\lambda w) &= \frac{II_q(\lambda w)}{I_q(\lambda w)} = \frac{\lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 ab f_0 + \lambda^2 b^2 g_0}{\lambda^2 |w|^2} = \frac{\lambda^2 (a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0)}{\lambda^2 |w|^2} \\ &= \frac{a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0}{|w|^2} = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = k_n(w). \end{aligned} \quad (3-9)$$

Conclui-se então que  $k_n(\lambda w) = k_n(w)$ , para todo  $\lambda \neq 0$ . Isto prova a afirmação.

Tenenblat (2008, p. 154) faz a seguinte interpretação geométrica a respeito da curvatura normal e da segunda forma quadrática: Seja  $w \in T_qX$  um vetor unitário e  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$  uma curva regular da superfície, parametrizada pelo comprimento de arco, de parâmetro  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , com curvatura  $\kappa(s)$  e vetor normal  $n(s)$ , tal que,  $q = (u(s_0), v(s_0)) := (u_0, v_0)$  e  $\alpha'(s_0) = w$ , para  $s_0 \in I$ . Se  $\kappa(s_0) \neq 0$ , então

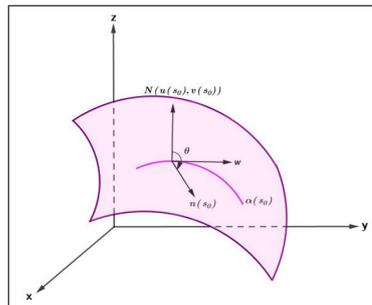
$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{\langle \alpha''(s_0), N(u_0, v_0) \rangle}{|w|^2} = \kappa(s_0) \langle n(s_0), N(u_0, v_0) \rangle \quad (3-10)$$

pois, da teoria das curvas,  $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0)n(s_0)$  e  $|w| = 1$ . Sendo  $\theta$  o ângulo formado pelos vetores  $n(s_0)$  e  $N(u_0, v_0)$ , segue que  $\cos \theta = \langle n(s_0), N(u_0, v_0) \rangle$  e, por (3-10), tem-se

$$k_n(w) = \kappa(s_0) \cos \theta. \quad (3-11)$$

A figura 3.1 a seguir representa graficamente os vetores  $n$  e  $N$ .

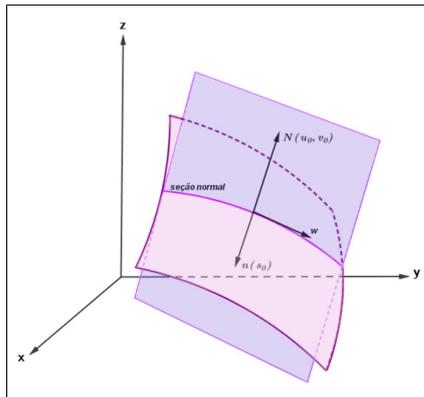
**Figura 3.1:** Vetores Normais de uma Superfície



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 11/06/2021.

Agora, suponha que a curva  $\alpha$  da discussão acima é a seção normal obtida pela interseção do traço de  $X(u, v)$  com o plano  $\Pi$  que passa por  $X(u_0, v_0)$  que é ortogonal ao vetor  $w \times N(u_0, v_0)$ , para todo  $(u, v)$  suficientemente próximos de  $(u_0, v_0)$ . Veja a figura 3.2 a seguir.

**Figura 3.2:** Seção Normal de uma Superfície



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 11/06/2021.

Assim, tem-se dois casos:

- **Caso 1:**  $\kappa(s_0) = 0$ .

Neste caso, pela definição de curvatura de uma curva plana, segue que  $\alpha''(s_0) = 0$  e, conseqüentemente,  $k_n(w) = II_q(w) = 0$ .

- **Caso 2:**  $\kappa(s_0) > 0$ .

Neste caso,  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ . Logo,  $n(s_0) = N(u_0, v_0)$  ou  $n(s_0) = -N(u_0, v_0)$  e, da equação (3-11), tem-se que

$$k_n(w) = II_q(w) = \kappa(s_0) \quad \text{ou} \quad k_n(w) = II_q(w) = -\kappa(s_0). \quad (3-12)$$

Com isso,  $|k_n(w)|$  é igual à curvatura  $\kappa$  da seção normal em  $q$  determinada pelo vetor unitário  $w \in T_qX$ . Raciocínio análogo se faz ao caso em que  $w$  é um vetor não unitário e não nulo.

Além disso, se todas as curvas de uma superfície tem a mesma reta tangente em um ponto  $q$ , então elas tem nesse ponto a mesma curvatura normal. Este resultado é conhecido na literatura como "Teorema de Meusnier" e permite tratar sobre curvatura normal ao longo de uma direção dada em  $q$ . Para mais detalhes deste resultado consulte Do Carmo ([7], 2005, p.167).

Ao considerar um cilindro circular dado por  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , pode-se verificar, por exemplo, que  $N(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$  e, conseqüentemente, os coeficientes da primeira forma quadrática são, conforme cálculos feitos na seção 2.3, dados por  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ . Por outro lado, os coeficientes da segunda forma quadrática são dados por

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \langle (-\cos u, -\sin u, 0), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = -1, \quad (3-13)$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \langle (0, 0, 0), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 0, \quad (3-14)$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \langle (0, 0, 0), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 0, \quad (3-15)$$

pois  $X_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0)$ ,  $X_{uv} = (0, 0, 0)$  e  $X_{vv} = (0, 0, 0)$ . Dessa forma, se  $w \in T_q S$ ,  $q = (u, v)$ , então  $w = aX_u + bX_v$  e

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{a^2 e(u, v) + 2abf(u, v) + b^2 g(u, v)}{a^2 E(u, v) + 2abF(u, v) + b^2 G(u, v)} = -\frac{a^2}{a^2 + b^2}. \quad (3-16)$$

**Afirmação:**  $-1 \leq k_n \leq 0$ .

De fato, a desigualdade  $k_n(w) \leq 0$  segue diretamente da equação (3-16), sendo  $k_n(w) = 0$  quando  $a = 0$  e  $b \neq 0$ .

Por outro lado, se  $a \neq 0$ , segue que  $a^2 + b^2 \geq a^2$  e, disto,

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1. \quad (3-17)$$

Logo,  $-k_n(w) \leq 1$ , de onde,  $k_n(w) \geq -1$ , sendo  $k_n(w) = -1$  quando  $a \neq 0$  e  $b = 0$ . Portanto,  $-1 \leq k_n(w) \leq 0$ .

A desigualdade acima mostra que a curvatura normal do cilindro é limitada e atinge máximo e mínimo nas direções de  $X_v$  e  $X_u$ , respectivamente.

Agora, considere a aplicação

$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad (3-18)$$

cujas imagem é a superfície conhecida como sela de macaco apresentada na figura 3.3. Note que  $X$  tem curvatura normal nula em  $q = (0, 0)$ . De fato, sabendo que

$$X_u = (1, 0, 3u^2 - 3v^2) \text{ e } X_v = (0, 1, -6uv), \quad (3-19)$$

$$X_{uu} = (0, 0, 6u), \quad X_{uv} = (0, 0, -6v) \text{ e } X_{vv} = (0, 0, -6u), \quad (3-20)$$

então, os coeficientes da segunda forma quadrática em  $q = (0, 0)$  são dados por

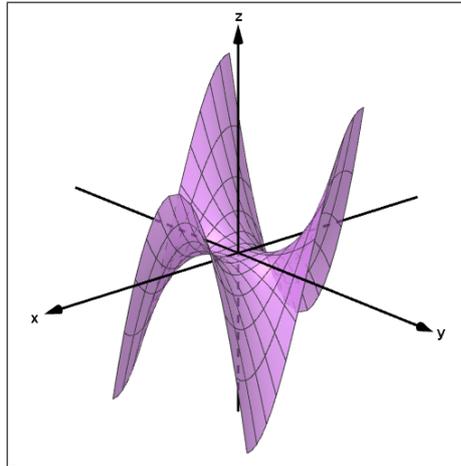
$$e(0, 0) = \langle X_{uu}, N \rangle(0, 0) = \langle (0, 0, 0), N \rangle = 0, \quad (3-21)$$

$$f(0, 0) = \langle X_{uv}, N \rangle(0, 0) = \langle (0, 0, 0), N \rangle = 0, \quad (3-22)$$

$$g(0, 0) = \langle X_{vv}, N \rangle(0, 0) = \langle (0, 0, 0), N \rangle = 0. \quad (3-23)$$

Daí,  $II_q(w) = 0$  e, conseqüentemente, a curvatura normal é uma função nula.

**Figura 3.3:** Sela de Macaco



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 11/06/2021.

## 3.2 Curvatura Gaussiana e Curvatura Média

Nesta seção, serão estabelecidas as definições de curvatura gaussiana e curvatura média de uma superfície por meio das curvaturas principais desta superfície e, em seguida, por meio dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas. Além disso, serão apresentados alguns resultados importantes a respeito das propriedades dessas curvaturas e serão classificados os pontos de uma superfície por meio do conhecimento do sinal das curvaturas. Diante desses resultados, para encerrar a seção, será apresentado um teorema de classificação de superfícies de curvatura gaussiana constante conhecendo, à priori, o sinal da curvatura gaussiana e as características dos pontos da superfície.

Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular,  $q \in U$  e  $k_n$  a função curvatura normal de  $X$  em  $q$ . Assim, existem vetores ortogonais  $w_1, w_2 \in T_qX$ , com  $|w_1| = |w_2| = 1$ , tais que, definindo,  $k_1 := k_n(w_1)$  e  $k_2 := k_n(w_2)$ , tem-se

$$k_1 \leq k_n(w) \leq k_2, \quad w \in T_qX \setminus \{0\}.$$

Neste caso,

$$k_1 = \min_{w \in T_q X} k_n \text{ e } k_2 = \max_{w \in T_q X} k_n,$$

ou seja,  $k_1$  e  $k_2$  são os valores mínimo e máximo da função curvatura normal  $k_n$ . A prova deste fato decorre de uma análise da função curvatura normal e não será apresentada neste trabalho para não prolongar o texto. Porém, ao leitor interessado em conhecer a prova, sugere-se consultar Tenenblat ([14], 2008, p. 161-162).

As curvaturas  $k_1$  e  $k_2$  são denominadas curvaturas principais, os vetores  $w_1$  e  $w_2$  são os vetores principais e as direções  $e_1$  e  $e_2$  determinadas pelos vetores  $w_1$  e  $w_2$ , respectivamente, são chamadas direções principais.

Em concordância com Picado (2006, p. 156), “as curvaturas principais de  $X$  em  $q$  são os valores máximo e mínimo das curvaturas normais de todas as curvas em  $X$  que passam por  $q$ . As direções principais são os vetores tangentes das curvas dando esses valores máximo e mínimo”.

A definição a seguir conceitua a curvatura gaussiana e a curvatura média de uma superfície regular.

**Definição 3.3** *Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular,  $q \in U$  e  $k_1$  e  $k_2$  as curvaturas principais de  $X$  em  $q$ .*

(i) *O produto  $K$  das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  é denominado curvatura gaussiana de  $X$  em  $q$ . Neste caso,*

$$K(q) = k_1 \cdot k_2. \quad (3-24)$$

(ii) *A metade  $H$  da soma das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  é denominada curvatura média de  $X$  em  $q$ . Neste caso,*

$$H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (3-25)$$

É fácil ver que as curvaturas principais de  $X$  em  $q$  são as soluções da equação

$$x^2 - 2H(q)x + K(q) = 0. \quad (3-26)$$

De fato, basta resolver a equação do segundo grau na variável  $x$ .

A exemplo disso, considere o cilindro circular parametrizado pela equação

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (3-27)$$

Da seção anterior, sabe-se que para todo  $q = (u, v)$ , a curvatura normal satisfaz  $-1 \leq k_n \leq 0$  e admite o máximo e o mínimo nas direções tangentes às curvas coordenadas. Consequentemente, as curvaturas principais são dadas por  $k_1 = -1$  e  $k_2 = 0$  e os vetores principais são  $w_1 = (-\sin u, \cos u, 0)$  e  $w_2 = (0, 0, 1)$ . Portanto, a curvatura gaussiana e a

curvatura média de  $X$  em  $q \in \mathbb{R}^2$  são, respectivamente,

$$K(q) = k_1 k_2 = 0 \text{ e } H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2}. \quad (3-28)$$

Segundo Do Carmo (2005, p. 171), “o conhecimento das curvaturas principais em  $q$  permite calcular facilmente a curvatura normal segundo uma direção dada de  $T_q X$ ”.

De fato, sejam  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 \leq k_2$ ) as curvaturas principais,  $w_1, w_2 \in T_q X$  os vetores principais de  $X$  em  $q$  e defina  $w_1 = a_1 X_u(q) + b_1 X_v(q)$  e  $w_2 = a_2 X_u(q) + b_2 X_v(q)$  de modo que  $k_1 = k_n(w_1) \leq k_n(w_2) = k_2$ . Agora, para todo vetor unitário  $w \in T_q X$ , defina  $w = \cos \theta w_1 + \sin \theta w_2$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} w &= \cos \theta (a_1 X_u + b_1 X_v) + \sin \theta (a_2 X_u + b_2 X_v) \\ &= (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) X_u + (b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta) X_v. \end{aligned} \quad (3-29)$$

Conseqüentemente, sendo  $e, f, g$  os coeficientes da segunda forma quadrática de  $X$  em  $q$ , tem-se

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_q(w) \\ &= (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)^2 e + 2(a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta) f \\ &\quad + (b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta)^2 g \\ &= (a_1^2 e + 2a_1 b_1 f + b_1^2 g) \cos^2 \theta + 2(a_1 a_2 e + (a_1 b_2 + a_2 b_1) f \\ &\quad + b_1 b_2 g) \sin \theta \cos \theta + (a_2^2 e + 2a_2 b_2 f + b_2^2 g) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3-30)$$

Sendo  $k_1 = a_1^2 e + 2a_1 b_1 f + b_1^2 g$ ,  $k_2 = a_2^2 e + 2a_2 b_2 f + b_2^2 g$  e definindo  $A = a_1 a_2 e + (a_1 b_2 + a_2 b_1) f + b_1 b_2 g$ , segue que,

$$k_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + 2A \sin \theta \cos \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad (3-31)$$

**Afirmação:**  $A = 0$ .

Com efeito, como  $k_n(w) \leq k_2$  e  $k_2 = k_2 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta$ , para todo  $\theta$ , tem-se que,

$$k_1 \cos^2 \theta + 2A \sin \theta \cos \theta + k_2 \sin^2 \theta \leq k_2 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta, \quad (3-32)$$

ou seja,  $k_1 \cos^2 \theta + 2A \sin \theta \cos \theta + k_2 \sin^2 \theta - k_2 \sin^2 \theta - k_2 \cos^2 \theta \leq 0$ , isto é,

$$(k_2 - k_1) \cos^2 \theta - 2A \sin \theta \cos \theta \geq 0. \quad (3-33)$$

Dividindo a equação acima por  $\cos^2 \theta$ , obtém-se, para todo  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , que

$$k_2 - k_1 - 2A \tan \theta \geq 0. \quad (3-34)$$

Agora, seja  $\lambda$  suficientemente pequeno. Se fosse  $A > 0$ , definindo  $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ , ocorreria que  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \rightarrow \infty$ . Consequentemente, por  $k_2 - k_1$  ser finito, segue que,

$$k_2 - k_1 - 2A \tan\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) < 0, \quad (3-35)$$

o que contradiz (3-34). Analogamente, se fosse  $A < 0$ , definindo  $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda$ , ocorreria que  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) \rightarrow -\infty$ . Assim,

$$k_2 - k_1 - 2A \tan\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) < 0, \quad (3-36)$$

o que, também, contradiz (3-34). Portanto,  $A$  só pode ser nulo e, consequentemente, por (3-31), vale

$$k_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad (3-37)$$

A expressão acima é denominada **fórmula de Euler** e mostra que as curvaturas principais determinam a curvatura normal em qualquer direção.

O teorema a seguir mostra que as curvaturas gaussiana e média podem ser determinadas em função dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas. Isto possibilita a realização de cálculos de maneira mais simples.

**Teorema 3.4** *Sejam  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular,  $q = (u_0, v_0)$ ,  $E, F, G$  e  $e, f, g$  os coeficientes da primeira e da segunda formas quadráticas de  $X$  em  $q$ , respectivamente. Então as curvaturas gaussiana e média são, respectivamente, dadas por*

$$K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad e \quad H(q) = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} \quad (3-38)$$

**Demonstração:** Seja  $k_0$  uma curvatura principal de  $X$  em  $q$  na direção de  $w = a_0 X_u(q) + b_0 X_v(q)$ .

**Afirmção:**  $(e - k_0 E)a_0 + (f - k_0 F)b_0 = 0$  e  $(f - k_0 F)a_0 + (g - k_0 G)b_0 = 0$ .

Com efeito, para todo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , defina:

$$k_n(a, b) = \frac{a^2 e + 2abf + b^2 g}{a^2 E + 2abF + b^2 G}. \quad (3-39)$$

Como  $k_0$  é um máximo ou um mínimo de  $k_n$  em  $(a_0, b_0)$ , calculando a derivada de  $k_n$  com respeito à  $a$  e avaliando em  $(a_0, b_0)$ , tem-se

$$(2a_0e + 2b_0f)(a_0^2E + 2a_0b_0F + b_0^2G) - (a_0^2e + 2a_0b_0f + b_0^2g)(2a_0E + 2b_0F) = 0, \quad (3-40)$$

de onde

$$a_0e + b_0f = \frac{a_0^2e + 2a_0b_0f + b_0^2g}{a_0^2E + 2a_0b_0F + b_0^2G}(a_0E + b_0F) = k_0(a_0E + b_0F) \quad (3-41)$$

Disto,  $(e - k_0E)a_0 + (f - k_0F)b_0 = 0$ . Analogamente, calculando a derivada de  $k_n$  com respeito à  $b$  e avaliando em  $(a_0, b_0)$ , tem-se  $(f - k_0F)a_0 + (g - k_0G)b_0 = 0$ . Isto prova a afirmação.

Como  $(a_0, b_0)$  é solução não-trivial do sistema de equações dadas na **Afirmação** acima, segue que

$$\begin{vmatrix} e - k_0E & f - k_0F \\ f - k_0F & g - k_0G \end{vmatrix} = 0. \quad (3-42)$$

Resolvendo o determinante, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= (e - k_0E)(g - k_0G) - (f - k_0F)^2 \\ &= eg - eGk_0 - gEk_0 + k_0^2EG - f^2 + 2fFk_0 - k_0^2F^2 \\ &= (EG - F^2)k_0^2 - (eG - 2fF + gE)k_0 + eg - f^2 \\ &= k_0^2 - \frac{(eG - 2fF + gE)}{EG - F^2}k_0 + \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (3-43)$$

Sendo  $k_1$  e  $k_2$  as soluções da equação acima, segue, pela regra da soma e produto das raízes de equações do segundo grau, que

$$K(q) = k_1k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad H(q) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)}. \quad (3-44)$$

□

Segundo Tenenblat (2008), o resultado acima:

[...] permite calcular a curvatura gaussiana  $K(u, v)$  e a curvatura média  $H(u, v)$  de uma superfície parametrizada regular  $X(u, v)$  a partir dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas. Em seguida, resolvendo a equação  $x^2 - 2H(u, v)x + K(u, v) = 0$  obtemos as curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  da superfície. (TENENBLAT, 2008, p. 167)

Considere, por exemplo, o parabolóide hiperbólico parametrizado por

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (3-45)$$

Disto,

$$X_u = (1, 0, -2u), X_v = (0, 1, 2v), \quad (3-46)$$

$$X_{uu} = (0, 0, -2), X_{uv} = (0, 0, 0), X_{vv} = (0, 0, 2). \quad (3-47)$$

Logo,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (2u, -2v, 1) \text{ e } |X_u \times X_v| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}. \quad (3-48)$$

Com isso, o vetor normal em  $q = (0, 0)$  é dado por  $N(0, 0) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = (0, 0, 1)$  e, conseqüentemente, os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas em  $q = (0, 0)$  são, respectivamente,

$$E(0, 0) = \langle X_u, X_u \rangle(0, 0) = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 1,$$

$$F(0, 0) = \langle X_u, X_v \rangle(0, 0) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0,$$

$$G(0, 0) = \langle X_v, X_v \rangle(0, 0) = \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 1,$$

$$e(0, 0) = \langle X_{uu}, N \rangle(0, 0) = \langle (0, 0, -2), (0, 0, 1) \rangle = -2,$$

$$f(0, 0) = \langle X_{uv}, N \rangle(0, 0) = \langle (0, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0,$$

$$g(0, 0) = \langle X_{vv}, N \rangle(0, 0) = \langle (0, 0, 2), (0, 0, 1) \rangle = 2.$$

Segue do Teorema 3.4 que  $K(0, 0) = -4$  e  $H(0, 0) = 0$ . Além disso, pode-se obter as curvaturas principais por meio da equação (3-26). Sendo assim, as curvaturas principais são as soluções da equação

$$x^2 - 2H(0, 0)x + K(0, 0) = 0, \text{ ou seja, } x^2 - 4 = 0. \quad (3-49)$$

Portanto, as curvaturas principais de  $X$  em  $q = (0, 0)$  são  $k_1 = -2$  e  $k_2 = 2$ .

Observe que, no exemplo anterior, foi possível calcular as curvaturas gaussianas, média e as curvaturas principais de uma superfície  $X$  em um ponto  $q$  por meio dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas. Porém, caso necessário, o cálculo dos vetores principais pode se tornar uma tarefa difícil. Para facilitar tal cálculo, pode-se utilizar o seguinte critério: Um vetor não-nulo  $w = a_0X_u(q) + b_0X_v(q)$  tangente a  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$  é uma direção principal de curvatura principal  $k_0$  se, e somente se,  $a_0$  e  $b_0$  satisfazem o sistema de equações

$$(e - k_0E)a_0 + (f - k_0F)b_0 = 0 \text{ e } (f - k_0F)a_0 + (g - k_0G)b_0 = 0. \quad (3-50)$$

A prova deste critério utiliza argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração do Teorema 3.4. Ao leitor interessado em conhecer a demonstração, sugere-se consultar Tenenblat ([14], 2008, p. 168).

A definição a seguir classifica os pontos de uma superfície regular conhecendo o sinal das curvaturas gaussiana e/ou média. Disto, conhecendo as características dos pontos de uma superfície, será possível determinar suas curvaturas e, com informações adicionais, classificar tal superfície regular.

**Definição 3.5** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular. Um ponto  $q \in U$  da superfície  $X$  é denominado*

1. *elíptico se  $K(q) > 0$ ;*
2. *hiperbólico se  $K(q) < 0$ ;*
3. *parabólico se  $K(q) = 0$  e  $H(q) \neq 0$ ;*
4. *planar se  $K(q) = H(q) = 0$ .*

Analisando os exemplos já vistos até aqui, pode-se dizer que a origem é um ponto planar da sela de macaco dada na equação (3-18), pois os coeficientes da segunda forma quadrática são nulos neste ponto. Todo ponto do cilindro circular da equação (3-27) é parabólico, já que  $K(q) = 0$  e  $H(q) = -\frac{1}{2} \neq 0$ . A origem é um ponto hiperbólico do parabolóide hiperbólico da equação (3-45), pois  $K(0,0) = -4 < 0$ .

**Afirmção:** Todo ponto da esfera é um ponto elíptico.

Com efeito, considere a esfera de raio  $r$  parametrizada por

$$X(u, v) = (r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, r \cos v), \quad r > 0, \quad u \in \mathbb{R}, \quad 0 < v < \pi. \quad (3-51)$$

Então,

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \sin v \sin u, r \sin v \cos u, 0) \\ X_v &= (r \cos v \cos u, r \cos v \sin u, -r \sin v) \\ X_{uu} &= (-r \sin v \cos u, -r \sin v \sin u, 0), \\ X_{uv} &= (-r \cos v \sin u, r \cos v \cos u, 0), \\ X_{vv} &= (-r \sin v \cos u, -r \sin v \sin u, -r \cos v). \end{aligned}$$

Além disso,  $N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, -\cos v)$ , já que

$$\begin{aligned}
X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r \sin v \sin u & r \sin v \cos u & 0 \\ r \cos v \cos u & r \cos v \sin u & -r \sin v \end{vmatrix} \\
&= (-r^2 \sin^2 v \cos u, -r^2 \sin^2 v \sin u, -r^2 \sin v \cos v) \quad (3-52)
\end{aligned}$$

$$e |X_u \times X_v| = \sqrt{(-r^2 \sin^2 v \cos u)^2 + (-r^2 \sin^2 v \sin u)^2 + (-r^2 \sin v \cos v)^2} = r^2 \sin v.$$

Disto, segue que os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas são, respectivamente,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \sin^2 v, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = r^2, \quad (3-53)$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = r \sin^2 v, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle = r. \quad (3-54)$$

Agora, usando a equação (3-38) para calcular a curvatura gaussiana, tem-se

$$K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r^2 \sin^2 v}{r^4 \sin^2 v} = \frac{1}{r^2} > 0, \quad \text{para todo } q \in U. \quad (3-55)$$

Portanto, pela definição 3.5, todo ponto da esfera é um ponto elíptico.

Lembre-se que a curvatura gaussiana é o produto entre as curvaturas principais. Deste modo, quando um ponto é elíptico as curvaturas principais têm o mesmo sinal. Se o sinal for positivo, “[...] localmente as curvas de  $X$  que passam por  $q$  estão contidas no semi-espaço de  $\mathbb{R}^3$  definida pelo plano tangente e pelo vetor normal  $N$  a  $X$  em  $q$ . Caso ambas as curvaturas seja negativas, localmente estas curvas estarão contidas no semi-espaço oposto.” (HARLE, 1973, p. 183).

Quando o ponto é hiperbólico “as curvaturas principais têm sinais opostos e, portanto, existem curvas passando pelo ponto  $q$  cujos vetores normais em  $q$  apontam para lados diferentes do plano tangente.” (DELGADO; FRENSEL, 2017, p. 180).

Quando um ponto é parabólico uma das curvaturas principais é nula e a outra é não-nula. Com isso, Harle (1973, p. 188-189) enfatiza que “existe uma única direção segundo a qual a curvatura principal é nula, tendo as demais curvaturas normais o mesmo sinal”.

Quando um ponto é planar as curvaturas principais são nulas e, conseqüentemente, todas as curvaturas normais neste ponto são nulas. Finalmente, quando as curvaturas principais coincidem o ponto é dito umbílico. A definição a seguir formaliza o conceito de ponto umbílico de uma superfície regular.

**Definição 3.6** Um ponto  $q \in U \subset \mathbb{R}^2$  é dito ponto umbílico de uma superfície parametrizada regular  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  se as curvaturas principais de  $X$  em  $q$  coincidem, ou seja, se  $k_1 = k_2$ . Se todos os pontos de  $X$  são umbílicos, a superfície  $X$  é denominada totalmente umbílica.

Todo ponto planar de uma superfície, por exemplo, é um ponto umbílico, já que a curvatura gaussiana e a curvatura média são nulas.

Já segundo Do Carmo (2005, p. 173), “todos os pontos de uma esfera e de um plano são pontos umbílicos. [...] o ponto  $(0,0,0)$  do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  é um ponto umbílico (não planar)”.

Consequentemente, o plano e a esfera são exemplos de superfícies totalmente umbílicas. Posteriormente, será mostrado que as únicas superfícies totalmente umbílicas são, em essência, a esfera e o plano.

O teorema a seguir caracteriza os pontos umbílicos em termos das curvaturas gaussiana e média de uma superfície regular.

**Teorema 3.7** Um ponto  $q = (u, v)$  é umbílico de uma superfície parametrizada regular  $X$  se, e somente se,  $H^2(q) = K(q)$ .

**Demonstração:** De fato, primeiro, veja que  $H^2(q) - K(q) \geq 0$ , para toda superfície regular  $X$  e todo ponto  $q = (u, v)$  de  $X$ . Com efeito,

$$H^2(q) - K(q) = \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 - k_1 k_2 = \frac{k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2 - 4k_1 k_2}{4} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} \geq 0.$$

Assim, se  $q$  é um ponto umbílico, então  $k_1 = k_2$  e, consequentemente,  $H^2(q) = K(q)$ . Reciprocamente, se  $H^2(q) = K(q)$ , então  $\frac{(k_1 - k_2)^2}{4} = 0$ , de onde segue que  $k_1 = k_2$ . Portanto,  $q$  é um ponto umbílico.

□

Além disso, é possível caracterizar um ponto umbílico em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas da seguinte forma: Um ponto  $q \in U$  é um ponto umbílico de uma superfície  $X$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que,

$$e = \lambda E, \quad f = \lambda F, \quad g = \lambda G. \quad (3-56)$$

A prova deste fato segue da observação de que a curvatura normal  $k_n$  é constante e das definições da primeira e da segunda formas quadráticas. Por uma questão de simplicidade, e para não distanciar dos objetivos do trabalho, esta prova será omitida aqui. Porém, para conhecer mais detalhes sobre a demonstração, sugere-se consultar Tenenblat ([14], 2008, p. 180).

Neste caso,  $\lambda$  é igual às curvaturas principais de  $X$  em  $q$ .

A seguir, será enunciado e demonstrado o principal teorema deste capítulo. Antes disso, serão estabelecidas algumas relações que serão fundamentais para a demonstração deste teorema.

Para isso, sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e  $N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v)$ ,  $(u, v) \in U$ , a aplicação normal de Gauss. Assim,

$$\langle X_u(u, v), N(u, v) \rangle = 0, \quad \langle X_v(u, v), N(u, v) \rangle = 0, \quad \langle N(u, v), N(u, v) \rangle = 1. \quad (3-57)$$

Derivando cada uma das equações acima com respeito a  $u$  e  $v$ , respectivamente, tem-se

$$\langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, N_u \rangle = 0, \text{ isto é, } \langle X_u, N_u \rangle = -\langle X_{uu}, N \rangle = -e, \quad (3-58)$$

$$\langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0, \text{ isto é, } \langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_{uv}, N \rangle = -f, \quad (3-59)$$

$$\langle X_{vu}, N \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = 0, \text{ isto é, } \langle X_v, N_u \rangle = -\langle X_{vu}, N \rangle = -f, \quad (3-60)$$

$$\langle X_{vv}, N \rangle + \langle X_v, N_v \rangle = 0, \text{ isto é, } \langle X_v, N_v \rangle = -\langle X_{vv}, N \rangle = -g, \quad (3-61)$$

$$\langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle = 0, \text{ isto é, } \langle N_u, N \rangle = 0, \quad (3-62)$$

$$\langle N_v, N \rangle + \langle N, N_v \rangle = 0, \text{ isto é, } \langle N_v, N \rangle = 0. \quad (3-63)$$

O teorema a seguir afirma que as únicas superfícies totalmente umbílicas de curvatura constante são o plano ou a esfera. A demonstração apresentada se baseia nas ideias de Do Carmo ([7], 2005) e Tenenblat ([14], 2008).

**Teorema 3.8** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto aberto e conexo e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular totalmente umbílica. Então, a curvatura gaussiana  $K$  é constante em  $U$  e  $K \geq 0$ . Além disso,*

1. se  $K = 0$ , então  $X(U)$  está contido em um plano.
2. se  $K > 0$ , então  $X(U)$  está contido em uma esfera de raio  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ .

**Demonstração:** Como todo  $(u, v) \in U$  é um ponto umbílico de  $X$ , pelas equações (3-56), existe um número real  $\lambda(u, v)$  (que coincide com as curvaturas principais de  $X$  em  $(u, v)$ ), tal que,

$$e(u, v) = \lambda(u, v)E(u, v), \quad f(u, v) = \lambda(u, v)F(u, v), \quad g(u, v) = \lambda(u, v)G(u, v). \quad (3-64)$$

**Afirmção:**  $\lambda(u, v)$  é constante em  $U$ .

De fato, como  $U$  é conexo, basta verificar que as derivadas parciais de  $\lambda$  são identicamente nulas. Com efeito,

- Substituindo  $e = \lambda E$  em (3-58):

$$\langle X_u, N_u \rangle = -\lambda E = -\lambda \langle X_u, X_u \rangle, \text{ isto é, } \langle X_u, N_u + \lambda X_u \rangle = 0. \quad (3-65)$$

- Substituindo  $f = \lambda F$  em (3-59) e (3-60), respectivamente:

$$\langle X_u, N_v \rangle = -\lambda F = -\lambda \langle X_u, X_v \rangle, \text{ isto é, } \langle X_u, N_v + \lambda X_v \rangle = 0, \quad (3-66)$$

$$\langle X_v, N_u \rangle = -\lambda F = -\lambda \langle X_u, X_v \rangle, \text{ isto é, } \langle X_v, N_u + \lambda X_u \rangle = 0. \quad (3-67)$$

- Substituindo  $g = \lambda G$  em (3-61):

$$\langle X_v, N_v \rangle = -\lambda G = -\lambda \langle X_v, X_v \rangle, \text{ isto é, } \langle X_v, N_v + \lambda X_v \rangle = 0. \quad (3-68)$$

Segue de (3-62) e (3-63) que  $N_u$  e  $N_v$  são vetores tangentes a  $X$  e, com isso,  $N_u + \lambda X_u$  e  $N_v + \lambda X_v$  também o são. De (3-65), (3-67), (3-66) e (3-68), obtém-se que

$$N_u + \lambda X_u = 0, \quad (3-69)$$

$$N_v + \lambda X_v = 0. \quad (3-70)$$

Derivando (3-69) em relação a  $v$  e (3-70) em relação a  $u$  e subtraindo as equações resultantes, tem-se

$$N_{uv} + \lambda_v X_u + \lambda X_{uv} - N_{vu} - \lambda_u X_v - \lambda X_{vu} = 0, \text{ isto é, } \lambda_v X_u - \lambda_u X_v = 0. \quad (3-71)$$

Como  $X_u$  e  $X_v$  são linearmente independentes,  $\lambda_u = \lambda_v = 0$  em  $U$ . Além disso, como  $U$  é conexo,  $\lambda$  é constante em  $U$ . Isto prova a afirmação.

Portanto, sendo  $k_1 = k_2 = \lambda$ , tem-se que a curvatura gaussiana  $K$  é constante em  $U$  e, além disso,

$$K = k_1 k_2 = \lambda^2 \geq 0. \quad (3-72)$$

A seguir serão provados os itens 1 e 2 do teorema 3.8.

**Prova do item 1:** Suponha que  $K = 0$ . Então, por (3-72),  $\lambda = 0$  em  $U$  e, de (3-69) e (3-70) segue que  $N_u = N_v = 0$  em  $U$ . Como  $U$  é conexo, existe  $c \in \mathbb{R}$ , tal que,  $N(u, v) = c$ , para todo  $(u, v) \in U$ . Agora, para cada  $q \in U$  fixado, defina

$$f(u, v) = \langle X(u, v) - X(q), N \rangle.$$

Note que  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$ . Consequentemente,  $f$  é constante e, como  $f(u, v) = 0$  se

$q = (u, v)$ , tem-se que  $\langle X(u, v) - X(q), N \rangle = 0$ . Portanto,  $X(U)$  está contido no plano que contém  $X(q)$  e é ortogonal à  $N$ .

**Prova do item 2:** Seja  $K = \lambda^2 > 0$ . Defina

$$f(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{\lambda}N(u, v). \quad (3-73)$$

Assim, por (3-69) e (3-70),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= X_u(u, v) + \frac{1}{\lambda}N_u(u, v) = \frac{N_u(u, v) + \lambda X_u(u, v)}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) &= X_v(u, v) + \frac{1}{\lambda}N_v(u, v) = \frac{N_v(u, v) + \lambda X_v(u, v)}{\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Disto,  $f$  é constante em  $U$ , ou seja,  $f(u, v) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Além disso,

$$|X(u, v) - c| = \left| -\frac{1}{\lambda}N(u, v) \right| = \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda)^2}} = \frac{1}{\sqrt{K}}. \quad (3-74)$$

Portanto,  $X(u)$  está contido em uma esfera centrada em  $c$  e de raio  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ .

□

### 3.3 Superfícies de Curvaturas Constantes

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos de superfícies cuja curvaturas média e/ou gaussiana são constantes. Dentre tais superfícies, as que tem curvatura média identicamente nula tem um papel especial no estudo da Geometria Diferencial e são denominadas de superfícies mínimas. Tenenblat (2008) afirma que

Dentre as superfícies de  $\mathbb{R}^3$ , destacam-se as que têm a curvatura gaussiana constante, e as que têm curvatura média nula. Uma superfície que tem a curvatura média identicamente nula é denominada de superfície mínima. Dizemos que uma superfície tem curvatura gaussiana constante se a função  $K$  é constante. (TENENBLAT, 2008, p. 170).

Dentre as superfícies abordadas aqui destacam-se: a esfera, o cilindro, o plano, o helicóide e a pseudo-esfera.

#### 3.3.1 A Esfera

Considere a esfera  $\mathbb{S}^2$  de raio  $r$  parametrizada por

$$X(u, v) = (r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, r \cos v), \quad u \in \mathbb{R}, \quad 0 < v < \pi, \quad r > 0.$$

É fácil ver que a esfera parametrizada pela equação acima tem curvaturas gaussianas e médias constantes e positivas. De fato, das equações (3-53) e (3-54), tem-se que os coeficientes da primeira e da segunda formas quadráticas são dados, respectivamente, por

$$E = r^2 \sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = r^2, \quad (3-75)$$

$$e = r \sin^2 v, \quad f = 0, \quad g = r. \quad (3-76)$$

Assim, pelo Teorema 3.4, a curvatura média da esfera é dada por

$$H(q) = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = \frac{2r^3 \sin^2 v}{2r^4 \sin^2 v} = \frac{1}{r}. \quad (3-77)$$

Além disso, da equação (3-55), a curvatura gaussiana da esfera é igual a

$$K(q) = \frac{1}{r^2}.$$

Portanto, a esfera é uma superfície regular cujas curvaturas gaussianas e médias são constantes e positivas. Também, é fácil ver que  $X$  é totalmente umbílica, pois

$$H^2(q) = \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{r^2} = K(q), \quad q \in X.$$

### 3.3.2 O Plano

Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz + d = 0, a, b, c \neq 0\}$  o plano parametrizado por

$$X(u, v) = (u, v, \alpha u + \beta v + \gamma), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha = -\frac{a}{c}, \beta = -\frac{b}{c}, \gamma = -\frac{d}{c}.$$

Note que o plano parametrizado pela equação acima é uma superfície regular cujas curvaturas gaussianas e médias são nulas. De fato, veja que

$$X_u = (1, 0, \alpha) \quad \text{e} \quad X_v = (0, 1, \beta). \quad (3-78)$$

Além disso,  $X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = (0, 0, 0)$ . Consequentemente, os coeficientes da segunda forma quadrática são todos nulos, isto é,

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = 0, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0, \quad (3-79)$$

Assim, as curvaturas gaussianas e médias serão nulas, pois, pelo Teorema 3.4,

$$K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \quad \text{e} \quad H(q) = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = 0, \quad q \in S. \quad (3-80)$$

Superfícies que tem a propriedade de ter a curvatura média identicamente nula são chamadas superfícies mínimas. O plano, por exemplo, é uma superfície mínima uma vez que sua curvatura média é identicamente nula.

Segundo Do Carmo (2005, p. 234), “uma superfície parametrizada regular é chamada mínima se a sua curvatura média é identicamente nula.”

Além disso, o plano é outro exemplo de superfície totalmente umbílica, uma vez que  $H^2(q) = 0 = K(q)$ , para todo  $q \in S$ .

É importante ressaltar que o estudo das superfícies mínimas é parte importante do estudo da geometria diferencial, porém, para não distanciar dos objetivos deste trabalho, este conceito não será apresentado aqui. No entanto, posteriormente, apresentaremos duas outras superfícies mínimas, à saber, o helicóide e o catenóide de revolução. Para o leitor interessado em conhecer mais profundamente o estudo das superfícies mínimas, sugere-se consultar Do Carmo ([7], 2005), Tenenblat ([14], 2008) e suas referências bibliográficas.

### 3.3.3 O Cilindro

Considere o cilindro circular gerado pela rotação da reta  $\alpha(u) = (r, 0, u)$  em torno do eixo  $-z$ , parametrizado por

$$X(u, v) = (r \cos v, r \sin v, u)^1, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

O cilindro parametrizado pela equação acima é uma superfície regular com curvatura gaussiana nula e curvatura média constante. Com efeito, veja que

$$X_u = (0, 0, 1) \text{ e } X_v = (-r \sin v, r \cos v, 0). \quad (3-81)$$

Além disso,

$$X_{uu} = (0, 0, 0), \quad X_{uv} = (0, 0, 0), \quad X_{vv} = (-r \cos v, -r \sin v, 0). \quad (3-82)$$

Com isso,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -r \sin v & r \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-r \cos v, -r \sin v, 0) \quad (3-83)$$

e

$$|X_u \times X_v| = \sqrt{(-r \cos v)^2 + (-r \sin v)^2 + 0^2} = r. \quad (3-84)$$

<sup>1</sup>Veja Tenenblat (2008, p. 117).

Disto, o vetor normal é dado por

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = (-\cos v, -\sin v, 0). \quad (3-85)$$

Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas tem-se, respectivamente, que

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle (0, 0, 1), (-r \sin v, r \cos v, 0) \rangle = 0, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle (-r \sin v, r \cos v, 0), (-r \sin v, r \cos v, 0) \rangle = r^2, \\ e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = \langle (0, 0, 0), (-\cos v, -\sin v, 0) \rangle = 0, \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = \langle (0, 0, 0), (-\cos v, -\sin v, 0) \rangle = 0, \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = \langle (-r \cos v, -r \sin v, 0), (-\cos v, -\sin v, 0) \rangle = r. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue do Teorema 3.4, que a curvatura gaussiana e a curvatura média do cilindro são dadas, respectivamente, por

$$K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0 \cdot r - 0^2}{1 \cdot r^2 - 0^2} = 0. \quad (3-86)$$

e

$$H(q) = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = \frac{r}{2r^2} = \frac{1}{2r}. \quad (3-87)$$

### 3.3.4 O Helicóide e o Catenóide

Nesta seção, apresentaremos duas superfícies regulares de curvatura média constante. Primeiro, considere o helicóide parametrizado por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0. \quad (3-88)$$

É fácil provar que o helicóide é uma superfície mínima. Com efeito, primeiro, veja que

$$X_u = (-v \sin u, v \cos u, a), \quad X_v = (\cos u, \sin u, 0), \quad (3-89)$$

$$X_{uu} = (-v \cos u, -v \sin u, 0), \quad X_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0), \quad X_{vv} = (0, 0, 0). \quad (3-90)$$

Logo,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v \sin u & v \cos u & a \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = (-a \sin u, a \cos u, -v) \quad (3-91)$$

e

$$|X_u \times X_v| = \sqrt{(-a \sin u)^2 + (a \cos u)^2 + (-v)^2} = \sqrt{a^2 + v^2}. \quad (3-92)$$

Com isso,

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{(-a \sin u, a \cos u, -v)}{\sqrt{a^2 + v^2}}. \quad (3-93)$$

Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas obtemos, respectivamente, que

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle (-v \sin u, v \cos u, a), (-v \sin u, v \cos u, a) \rangle = v^2 + a^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle (-v \sin u, v \cos u, a), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 0, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 1, \\ e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = \left\langle (-v \cos u, -v \sin u, 0), \frac{(-a \sin u, a \cos u, -v)}{\sqrt{a^2 + v^2}} \right\rangle = 0, \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = \left\langle (-\sin u, \cos u, 0), \frac{(-a \sin u, a \cos u, -v)}{\sqrt{a^2 + v^2}} \right\rangle = \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}}, \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = \left\langle (0, 0, 0), \frac{(-a \sin u, a \cos u, -v)}{\sqrt{a^2 + v^2}} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$eG - 2fF + Eg = 0. \quad (3-94)$$

Dessa forma, segue do Teorema 3.4 que a curvatura média do helicóide é dada por

$$H(q) = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = 0. \quad (3-95)$$

Portanto, o helicóide é uma superfície mínima, já que sua curvatura média se anula em todos os pontos. Segundo Do Carmo (2005, p. 242), o helicóide “tem a propriedade adicional de ser a única superfície mínima, além do plano, que é também uma superfície regrada<sup>2</sup>”. Para mais detalhes sobre o estudo das superfícies regradas veja

<sup>2</sup>A definição de superfície regrada pode ser encontrada em Do Carmo ([7], 2005, p. 223).

Do Carmo ([7], 2005) e Tenenblat ([14], 2008).

Por outro lado, o helicóide não tem curvatura gaussiana constante, porém esta curvatura satisfaz a seguinte relação

$$-\frac{1}{a^2} \leq K < 0. \quad (3-96)$$

De fato, pelo Teorema 3.4,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{f^2}{E} = -\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}\right)^2}{a^2+v^2} = -\frac{a^2}{(a^2+v^2)^2} = -\left(\frac{a}{a^2+v^2}\right)^2 < 0. \quad (3-97)$$

Por outro lado,

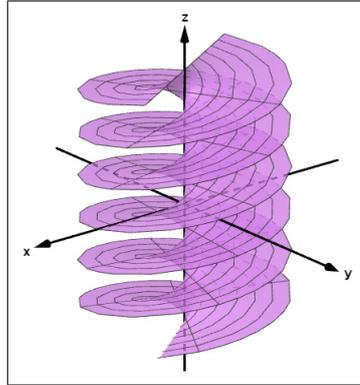
$$a^2 + v^2 \geq a^2 \implies \frac{a^2 + v^2}{a} \geq a \implies \left(\frac{a}{a^2 + v^2}\right)^2 \leq \frac{1}{a^2} \implies -\left(\frac{a}{a^2 + v^2}\right)^2 \geq -\frac{1}{a^2}. \quad (3-98)$$

Consequentemente,

$$K = -\left(\frac{a}{a^2 + v^2}\right)^2 \geq -\frac{1}{a^2}, \quad (3-99)$$

e, portanto, (3-96) é satisfeita. A figura 3.4 representa o helicóide dado em (3-88).

**Figura 3.4:** *Helicóide*



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 30/09/2021.

Agora, considere o catenóide parametrizado por

$$X(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), av), \quad 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}. \quad (3-100)$$

Procedendo de forma análoga ao caso do helicóide, tem-se que os coeficientes da primeira forma quadrática são dados por

$$E(u, v) = a^2 \cosh^2(v), \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = a^2 \cosh^2(v), \quad (3-101)$$

e os coeficientes da segunda forma quadrática são dados por

$$e(u, v) = -a, \quad f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = a. \quad (3-102)$$

Consequentemente, o catenóide é, também, uma superfície mínima, pois, após algumas simplificações,

$$H(q) = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = \frac{-a + a}{2a^2 \cosh^2(v)} = 0. \quad (3-103)$$

De acordo com Do Carmo (2005, p. 240), o catenóide “pode ser caracterizado como a única superfície de revolução que é mínima”.

### 3.3.5 A Pseudo-esfera

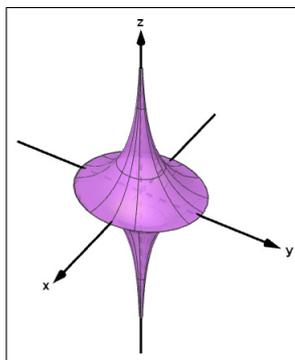
Sabe-se que a esfera é uma superfície de curvatura gaussiana constante e positiva e que o plano é uma superfície de curvatura constante nula. Pensando em superfícies de curvatura gaussiana constante, e considerando o sinal desta curvatura, pode-se perguntar: será que existem superfícies de curvatura gaussiana constante e negativa? A resposta é sim! Nesta seção, será apresentada uma superfície que tem esta propriedade.

A pseudo-esfera <sup>3</sup> (Figura 3.5), dada por

$$X(u, v) = (\operatorname{sech}(u) \cos(v), \operatorname{sech}(u) \sin(v), u - \tanh(u)), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi) \quad (3-104)$$

é uma superfície cuja curvatura gaussiana é constante negativa.

**Figura 3.5:** Pseudo-Esfera



**Fonte:** Construído no GeoGebra por SILVA, L. G. em 21/10/2021.

<sup>3</sup>A parametrização da pseudo-esfera, nesse caso, é uma parametrização principal de Tchebyshev da pseudo-esfera (veja Gray, Abbena e Salamon ([9], 2006, p. 695)).

De fato, derivando a expressão de (3-104), temos que

$$\begin{aligned}
 X_u &= (-\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \cos v, -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \sin v, \tanh^2(u)), \\
 X_v &= (-\operatorname{sech}(u) \sin v, \operatorname{sech}(u) \cos v, 0), \\
 X_{uu} &= (-\cos v(-\operatorname{sech}(u) \tanh^2(u) + \operatorname{sech}^3(u)), -\sin v(-\operatorname{sech}(u) \tanh^2(u) + \operatorname{sech}^3(u)), \\
 &\quad 2 \tanh(u) \operatorname{sech}^2(u)), \\
 X_{uv} &= (\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \sin v, -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \cos v, 0), \\
 X_{vv} &= (-\operatorname{sech}(u) \cos v, -\operatorname{sech}(u) \sin v, 0).
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \cos v & -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \sin v & \tanh^2(u) \\ -\operatorname{sech}(u) \sin v & \operatorname{sech}(u) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-\operatorname{sech}(u) \tanh^2(u) \cos v, -\operatorname{sech}(u) \tanh^2(u) \sin v, -\operatorname{sech}^2(u) \tanh(u)).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$|X_u \times X_v| = \operatorname{sech}(u) \tanh(u). \quad (3-105)$$

Assim,

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = (-\tanh(u) \cos v, -\tanh(u) \sin v, -\operatorname{sech}(u)). \quad (3-106)$$

Calculando os coeficientes da primeira e da segunda formas quadráticas tem-se, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = \tanh^2(u), \\
 F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\
 G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = \operatorname{sech}^2(u), \\
 e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = -\tanh(u) \operatorname{sech}(u), \\
 f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \\
 g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = \operatorname{sech}(u) \tanh(u).
 \end{aligned}$$

Dessa forma, segue do Teorema 3.4, que a curvatura gaussiana é

$$K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\tanh^2(u) \operatorname{sech}^2(u)}{\tanh^2(u) \operatorname{sech}^2(u)} = -1. \quad (3-107)$$

É importante ressaltar que a pseudo-esfera é uma superfície de revolução que possui outras parametrizações. Tenenblat (2008, p. 172), por exemplo, descreve a pseudo-esfera como sendo a superfície

$$X(u, v) = \left( \sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log \left( \tan \left( \frac{u}{2} \right) \right) \right) \quad (3-108)$$

gerada pela rotação da curva tratriz dada por

$$\alpha(u) = \left( \sin u, 0, \cos u + \log \left( \tan \left( \frac{u}{2} \right) \right) \right), \quad u \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right). \quad (3-109)$$

### 3.4 Caso Geral

Nesta seção, serão estabelecidos os casos gerais para determinação de superfícies de curvatura gaussiana constante no caso de superfícies de rotação e de superfícies de curvatura gaussiana e curvatura média nulas no caso de superfícies parametrizadas pelo gráfico de uma função diferenciável.

• **Superfícies de Rotação:** Seja  $X$  uma superfície de rotação dada por

$$X(u, v) = (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u)), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}, \quad (3-110)$$

e gerada pela rotação da curva regular  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ , onde  $f(u) \neq 0$ , para todo  $u \in \mathbb{R}$ . Se  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura gaussiana de  $X$  é dada por

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)}. \quad (3-111)$$

De fato, por simples cálculos, tem-se que os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas são, respectivamente,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (f(u))^2, \quad e = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u), \quad f = 0, \quad g = f(u)g'(u).$$

Como  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, segue que  $\langle \alpha'(u), \alpha''(u) \rangle = 0$ , ou seja,  $f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0$ . Disto,  $g'(u)g''(u) = -f'(u)f''(u)$ . Por outro lado, como  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se  $|\alpha'(u)| = 1$ , ou seja,  $f'(u)^2 + (g'(u))^2 = 1$ .

Assim, a curvatura gaussiana de  $X$  é

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))f(u)g'(u)}{(f(u))^2} = \frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))g'(u)}{f(u)} \\
 &= \frac{f'(u)g'(u)g''(u) - f''(u)(g'(u))^2}{f(u)} = \frac{-(f'(u))^2 f''(u) - f''(u)(g'(u))^2}{f(u)} \\
 &= \frac{-f''(u)((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}{f(u)} \\
 &= -\frac{f''(u)}{f(u)}. \tag{3-112}
 \end{aligned}$$

Segundo Do Carmo (2005, p. 191), “a equação (3-112) é uma expressão conveniente para curvatura gaussiana de uma superfície de revolução. Ela pode ser usada, por exemplo, para determinar as superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante”.

O teorema a seguir classifica as superfícies de curvatura constante.

**Teorema 3.9** *Seja  $X(u, v) = (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u))$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ , uma superfície gerada pela rotação da curva regular  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ ,  $f(u) \neq 0$ . Se  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco e  $X$  tem curvatura gaussiana  $K$  constante, então*

$$f''(u) + Kf(u) = 0 \text{ e } g(u) = \int \sqrt{1 - (f'(u))^2} du. \tag{3-113}$$

**Demonstração:** Seja  $K$  constante a curvatura gaussiana de  $X$ . Segue diretamente da equação (3-112) que  $f''(u) + Kf(u) = 0$ . Por outro lado, como  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se  $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$ . Disto, isolando  $g'(u)$  e integrando os lados da equação resultante,  $g(u) = \int \sqrt{1 - (f'(u))^2} du$ .

□

É importante observar que no teorema acima  $v \in (0, 2\pi)$  e o domínio de  $u$  é o conjunto onde a integral em (3-113) está definida. Dessa forma, tem-se que:

- Todas as superfícies de revolução com curvatura gaussiana  $K = 1$  que intersectam o plano  $xOy$  ortogonalmente são, tais que,

$$f(u) = c \cos(u) \text{ e } g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2 \sin^2(u)} du, \tag{3-114}$$

onde  $c$  é constante. Se  $c = 1$ , por exemplo, então  $f(u) = \cos(u)$ ,  $g(u) = \sin(u)$  e, conseqüentemente,  $X$  é a esfera

$$X(u, v) = (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \sin(u)). \tag{3-115}$$

- Todas as superfícies de revolução com curvatura gaussiana  $K = -1$  satisfazem uma das condições:

$$\begin{aligned} f(u) = c \cosh(u) \text{ e } g(u) &= \int_0^u \sqrt{1 - c^2 \sinh^2(u)} du \\ f(u) = c \sinh(u) \text{ e } g(u) &= \int_0^u \sqrt{1 - c^2 \cosh^2(u)} du \\ f(u) = e^u \text{ e } g(u) &= \int_0^u \sqrt{1 - e^{2u}} du. \end{aligned}$$

- As únicas superfícies de revolução com curvatura gaussiana  $K = 0$  são o cilindro circular reto e o cone circular reto.

Note que a expressão em (3-112) fornece uma forma mais fácil para determinação da curvatura gaussiana de uma superfície. No caso da esfera em (3-115), por exemplo, tem-se  $f(u) = \cos(u)$ ,  $f''(u) = -\cos(u)$  e, disto,

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)} = -\frac{-\cos(u)}{\cos(u)} = 1.$$

A seguir serão caracterizadas as superfícies que são gráficos de funções diferenciáveis.

- **Superfícies Parametrizadas Pelo Gráfico:** Considere a superfície que descreve o gráfico de uma função diferenciável  $f(x, y)$  dada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (3-116)$$

Note que,

$$X_u = (1, 0, f_u), \quad X_v = (0, 1, f_v), \quad X_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \quad X_{uv} = (0, 0, f_{uv}), \quad X_{vv} = (0, 0, f_{vv}),$$

onde  $f_u$  e  $f_v$  indicam as derivadas parciais de  $f$  com respeito à  $u$  e  $v$  respectivamente, e  $f_{uu}$ ,  $f_{uv}$  e  $f_{vv}$  são as derivadas parciais de segunda ordem de  $f$ . Logo, por simples cálculos, tem-se

$$X_u \times X_v = (-f_u, -f_v, 1) \text{ e } |X_u \times X_v| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \quad (3-117)$$

e, com isso,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} (-f_u, -f_v, 1). \quad (3-118)$$

Assim, os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas são dados por

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + f_u^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = f_u f_v, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + f_v^2, \\ e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}.$$

Disto, a curvatura gaussiana de  $X$  é dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}. \quad (3-119)$$

Por outro lado, a curvatura média de  $X$  é dada por

$$H = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2)}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3-120)$$

**Teorema 3.10** *Seja  $z = f(x, y)$  uma superfície parametrizada por*

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (3-121)$$

*Então,  $X$  tem curvatura gaussiana nula se, e somente se,  $f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2 = 0$ . Além disso,  $X$  é uma superfície mínima se, e somente se,  $f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv} = 0$ .*

**Demonstração:** De fato, por (3-119), segue imediatamente que,

$$K = 0 \text{ se, e somente se, } f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2 = 0. \quad (3-122)$$

Além disso, se  $X$  é uma superfície mínima, então  $H = 0$ . Por (3-120), tem-se

$$H = 0 \text{ se, e somente se, } f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv} = 0. \quad (3-123)$$

□

De forma geral, por meio do estudo acima, classifica-se todas as superfícies de revolução de curvatura gaussiana constante e todas as superfícies que são gráficos de funções diferenciáveis de curvatura gaussiana e curvatura média constantes e nulas. Para mais resultados de classificação de superfícies sugere-se ao leitor consultar as referências bibliográficas aqui apresentadas.

---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Conclui-se que o estudo da Geometria Diferencial permite compreender as propriedades das curvas parametrizadas por meio de conceitos fundamentais, tais como: o de curvatura e o de torção; bem como, compreender as propriedades das superfícies parametrizadas conhecendo, a priori, conceitos importantes como, por exemplo, as formas quadráticas e as curvaturas gaussianas e média.

No entanto, pôde-se observar que o conhecimento prévio de certas informações sobre a curvatura e a torção de uma curva parametrizada diferenciável pode ser um fator determinante para o conhecimento da curva possibilitando, com isto, determinar e classificar uma quantidade importante de curvas. Vale ressaltar que nem toda curva pode ser obtida apenas pelo conhecimento da curvatura e da torção, mas o conhecimento destes fatores é uma ferramenta importante para um estudo sobre o comportamento da curva.

Além disso, foi possível conhecer algumas superfícies de curvaturas constantes, por meio de certas informações sobre a curvatura gaussiana e a curvatura média da superfície; bem como, classificar um conjunto de superfícies de curvatura constante e não negativa, tendo um conhecimento prévio das características dos pontos dessa superfície e do sinal da curvatura gaussiana em cada um desses pontos.

Portanto, entende-se que este trabalho pode contribuir para a disseminação do conhecimento em Matemática e servir como um material de pesquisa sobre Geometria Diferencial das curvas e superfícies parametrizadas diferenciáveis, de modo a auxiliar os discentes dos cursos de graduação nos estudos avançados de Matemática.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. **Geometria Diferencial das Curvas no  $\mathbb{R}^2$** . Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.
- [2] ARAÚJO, P. V. **Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.
- [3] BIEZUNER, R. J. **Notas de Aula Geometria Diferencial**. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Minas Gerais, 2019.
- [4] COIMBRA, J. R. V. **Uma introdução à geometria diferencial**. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação, São Paulo, 2008.
- [5] DELGADO, J.; FRENSEL, K. **Geometria Diferencial I**. Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2017.
- [6] DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial Local**. Rio de Janeiro: IMPA, 1963.
- [7] DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [8] FLÔRES, M. V., PANSONATO, C. C. **Hélices generalizadas e curvas de Bertrand**. Revista Ciência e Natura, v. 36, p. 359-366, 2014.
- [9] GRAY, A.; ABBENA, E.; SALAMON, S. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**. 3<sup>th</sup> ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2006.
- [10] HARLE, C. E. **Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: IMPA, 1973.
- [11] LIMA, R. F. de. **Introdução à Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- [12] MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2003.
- [13] PICADO, J. **Apontamentos de Geometria Diferencial**. 1. ed. Coimbra: Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra, 2006.
- [14] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2008.