

**INSTITUTO  
FEDERAL**

Goiano

---

Campus  
Rio Verde

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**CLASSIFICAÇÃO DE REGRAS DE AUTÔMATOS CELULARES  
ELEMENTARES APLICADAS EM REDES DO TIPO  
SMALLWORLD**

SERGIO SOUZA NOVAK

RIO VERDE, GO

2021

INSTITUTO FEDERAL GOIANO - CAMPUS RIO VERDE

SERGIO SOUZA NOVAK

**CLASSIFICAÇÃO DE REGRAS DE AUTÔMATOS CELULARES  
ELEMENTARES APLICADAS EM REDES DO TIPO  
SMALLWORLD**

Proposta de Trabalho de Curso apresentado ao Instituto Federal Goiano, Câmpus Rio Verde, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Dr. Heverton Barros de Macêdo  
Instituto Federal Goiano

RIO VERDE, GO  
2021

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP  
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
**Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano**

NN935 Novak, Sergio Souza  
Classificação de regras de autômatos celulares  
elementares aplicadas em redes do tipo SmallWorld /  
Sergio Souza Novak; orientador Heverton Barros de  
Macêdo. -- Rio Verde, 2021.  
41 p.

TCC (Graduação em Bacharelado em Ciência da  
Computação) -- Instituto Federal Goiano, Campus Rio  
Verde, 2021.

1. Autômatos Celulares em Rede. 2. Classificações  
de Autômatos Celulares. 3. Redes SmallWorld. I.  
Barros de Macêdo, Heverton, orient. II. Título.

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

**Identificação da Produção Técnico-Científica**

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Tese  | <input type="checkbox"/> Artigo Científico              |
| <input type="checkbox"/> Dissertação                                 | <input type="checkbox"/> Capítulo de Livro              |
| <input type="checkbox"/> Monografia – Especialização                 | <input type="checkbox"/> Livro                          |
| <input checked="" type="checkbox"/> TCC - Graduação                  | <input type="checkbox"/> Trabalho Apresentado em Evento |
| <input type="checkbox"/> Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ |   |

Nome Completo do Autor: Sergio Souza Novak

Matrícula: 2018102201940520

Título do Trabalho: Classificação de regras de Autômatos Celulares Elementares aplicadas em redes do tipo SmallWorld

**Restrições de Acesso ao Documento**

Documento confidencial:  Não  Sim, justifique: \_\_\_\_\_

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: 20/10/2021

O documento está sujeito a registro de patente?  Sim  Não

O documento pode vir a ser publicado como livro?  Sim  Não

**DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA**

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Rio Verde  
Local

, 20 /10/2021 .  
Data



Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)

**SERGIO SOUZA NOVAK**

**CLASSIFICAÇÃO DE REGRAS DE AUTÔMATOS CELULARES  
ELEMENTARES APLICADAS EM REDES DO TIPO  
SMALLWORLD**

Trabalho de curso DEFENDIDO E APROVADO em 25 de Agosto de 2021,  
pela Banca Examinadora constituída pelos membros:

*André da Cunha Ribeiro*

Dr. André da Cunha Ribeiro  
Instituto Federal Goiano

*Marlus Dias Silva*

Me. Marlus Dias Silva  
Instituto Federal Goiano

*H. Macêdo*

Prof. Dr. Heverton Barros de Macêdo  
Orientador

Rio Verde, GO  
2021

## RESUMO

NOVAK, Sergio. Classificação de regras de autômatos celulares elementares aplicadas em redes do tipo SmallWorld. 2021. 41 f. Projeto do Trabalho de Conclusão de Curso – , IF Goiano. Rio Verde, GO, 2021.

O Autômato Celular Elementar é um modelo de Sistemas Complexos capaz de representar diversos fenômenos da natureza, como comportamentos sociais, ambientais e biológicos. Alguns autores propuseram classificar as regras que envolvem o Autômato Celular Elementar, o que resultou em conhecidas classificações na área. Contudo, em alguns casos, a estrutura elementar não é adequada para problemas que envolvam a modelagem de redes. Nesse sentido, este trabalho objetiva classificar as regras elementares quando alterado a estrutura de vizinhança do Autômato Celular Elementar, consistindo então em redes do tipo *SmallWorld*, que são utilizadas na modelagem de problemas na Ciência de Redes. Nesse trabalho foi selecionado uma amostra de três redes *SmallWorld*, depois foi feita a classificação das regras para cada rede. As alterações na estrutura do Autômato Celular propostas produziram para as regras elementares comportamentos e classificação diferentes. Essas mudanças podem trazer maior variabilidade de regras para aplicações que se utilizem de classes específicas do Autômato Celular Elementar.

**Palavras-chave:** Autômatos Celulares em Rede. Classificações de Autômatos Celulares. Redes *SmallWorld*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comportamentos auto-organizados complexos . . . . .	1
Figura 2 – Espaço Celular . . . . .	4
Figura 3 – Evolução de um Autômato Celular . . . . .	5
Figura 4 – Condições de Contorno Periódicas . . . . .	5
Figura 5 – Outros tipos de Condições de Contorno . . . . .	6
Figura 6 – Autômatos Celulares e dimensões . . . . .	7
Figura 7 – Diferentes vizinhanças para um Autômato Celular Unidimensional . . . . .	8
Figura 8 – Regra de Transição 150 . . . . .	9
Figura 9 – Regras possíveis para um Autômato Celular Elementar . . . . .	10
Figura 10 – Vizinhança Regular do Autômato Celular Elementar . . . . .	10
Figura 11 – Quatro diagramas de espaço-temporal . . . . .	11
Figura 12 – Classe 1 de Wolfram: Regras Homogêneas ou de Ponto Fixo . . . . .	12
Figura 13 – Classe 2 de Wolfram: Regras Heterogêneas ou Periódicas . . . . .	12
Figura 14 – Classe 3 de Wolfram: Regras Caóticas ou de Desordenadas . . . . .	12
Figura 15 – Classe 4 de Wolfram: Regras Complexas . . . . .	13
Figura 16 – Vizinhança de uma Rede de Autômato Celular . . . . .	14
Figura 17 – Comportamento <i>SmallWorld</i> . . . . .	15
Figura 18 – Rede <i>SmallWorld</i> . . . . .	15
Figura 19 – Fase de experimento . . . . .	17
Figura 20 – Alteração de uma Estrutura Elementar de um reticulado composto de 3 células . . . . .	18
Figura 21 – Geração da amostra . . . . .	19
Figura 22 – Geração dos diagramas espaço-temporal . . . . .	19
Figura 23 – Esquema do total de diagramas espaço-temporal . . . . .	20
Figura 24 – Exemplo de diagramas com $a_{i,j} = 1$ . . . . .	21
Figura 25 – Exemplo de diagramas com $a_{i,j} = 2$ . . . . .	21
Figura 26 – Exemplo de diagramas com $a_{i,j} = 3$ . . . . .	22
Figura 27 – Exemplo de diagramas com $a_{i,j} = 4$ . . . . .	22
Figura 28 – Percentual de regras por classe no Autômato Celular Elementar . . . . .	24
Figura 29 – A regra 8 foi classificada como 1 nas três redes <i>SmallWorld</i> e na rede Aleatória. No Autômato Celular de Wolfram (1994) essa regra pertence à classe 1 . . . . .	25
Figura 30 – A regra 131 foi classificada como 2 nas três redes <i>SmallWorld</i> e na rede Aleatória. No Autômato Celular de Wolfram (1994) essa regra pertence à classe 2 . . . . .	25

Figura 31 – A regra 131 foi classificada como 2 nas três redes <i>SmallWorld</i> e na rede Aleatória, essa regra no Autômato Celular de Wolfram (1994) é da classe 2	26
Figura 32 – Percentual de regras segundo a classe para cada rede <i>SmallWorld</i> e percentual para o Autômato Celular Elementar . . . . .	27
Figura 33 – Exemplo de regras classificadas como aleatórias nas três redes do tipo <i>SmallWorld</i> . . . . .	28
Figura 34 – Exemplo de regras classificadas como aleatórias no Autômato Celular Elementar . . . . .	28
Figura 35 – Percentual de regras por classe na Rede Aleatória e percentual para o Autômato Celular Elementar . . . . .	29
Figura 36 – Exemplos de diagramas de regras classificadas como Caóticas para a Rede Aleatória . . . . .	29

## Lista de Algoritmos

1	Algoritmo Geração de Rede <i>SmallWorld</i> ( $N, K, P$ ) . . . . .	16
---	---	----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – As quatro classes de Wolfram . . . . .	13
Tabela 2 – Parâmetros de entrada para o Algoritmo Geração de Rede <i>SmallWorld</i>	16
Tabela 3 – Tratamento das exceções . . . . .	23
Tabela 4 – Classificação do Autômato Celular Elementar de Wolfram (1994) . . .	34
Tabela 5 – Classificação da Rede <i>SmallWorld</i> 1 . . . . .	35
Tabela 6 – Classificação da Rede <i>SmallWorld</i> 2 . . . . .	36
Tabela 7 – Classificação da Rede <i>SmallWorld</i> 3 . . . . .	37
Tabela 8 – Classificação da Rede Aleatória . . . . .	38
Tabela 9 – Nessa tabela, na primeira linha, regras que mantiveram a mesma classe do Autômato Celular Elementar, e na segunda linha regras que não mantiveram a classe observada no Autômato Celular Elementar durante o experimento. . . . .	39

## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Organização deste trabalho . . . . .	2
<b>2 – REVISÃO DE LITERATURA</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Autômato Celular . . . . .	4
2.2 Tipos de Condições de Contorno . . . . .	5
2.3 Definição Formal de Autômato Celular . . . . .	6
2.4 Autômato Celular Elementar . . . . .	8
2.5 Diagrama espaço-temporal . . . . .	11
2.6 Classificação de Wolfram . . . . .	11
2.7 Redes de Autômato Celular . . . . .	13
2.8 Redes <i>SmallWorld</i> . . . . .	14
<b>3 – MATERIAL E MÉTODOS</b> . . . . .	<b>17</b>
3.1 Fase de experimento . . . . .	17
3.2 Fase de análise . . . . .	20
3.3 Fase de Tratamento de Exceções . . . . .	23
<b>4 – RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . .	<b>24</b>
4.1 Redes <i>SmallWorld</i> . . . . .	26
4.2 Rede Aleatória . . . . .	28
<b>5 – CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>31</b>
5.1 Trabalhos Futuros . . . . .	32
<b>Apêndices</b>	<b>33</b>
<b>APÊNDICE A</b> –Tabelas de classificação do Autômato Celular Elementar de Wolfram . . . . .	<b>34</b>
<b>APÊNDICE B</b> –Tabelas de classificação das Redes <i>SmallWorld</i> . . . . .	<b>35</b>
<b>APÊNDICE C</b> –Tabelas de classificação da Rede Aleatória . . . . .	<b>38</b>
<b>APÊNDICE D</b> –Regras que mantiveram e que não mantiveram a classificação . . . . .	<b>39</b>

**Referências . . . . . 40**

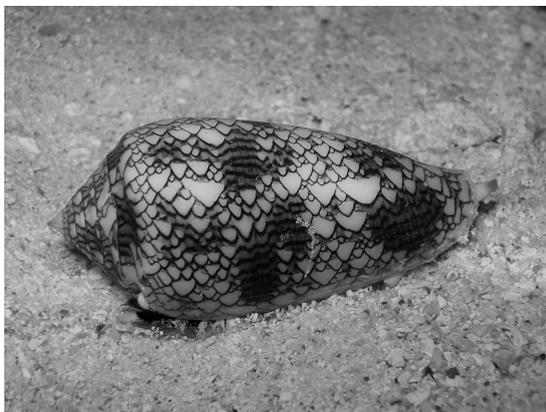
## 1 INTRODUÇÃO

Na natureza há muitos fenômenos modelados a partir de equações, obtidas através de observação. Contudo, existem fenômenos da natureza em que é difícil modelar através de equações, como é apresentado nos trabalhos de Bar-Yam, McKay e Christian (1998). Esses fenômenos podem ser estudados e modelados a partir dos conceitos de sistemas complexos. Segundo Melotti (2009), estes sistemas incluem populações de seres vivos, o cérebro, o sistema imunológico, propagações de doenças, os mercados financeiros e até ecossistemas naturais.

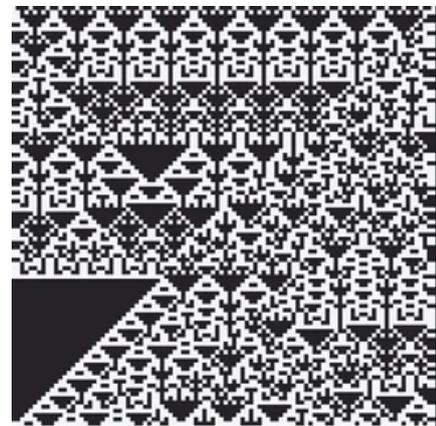
Modelos muito estudados na área de sistemas complexos são os Autômatos Celulares, que são utilizados para a determinação e/ou formação de padrões que tentam ou explicam fenômenos da natureza, bem como comportamentos sociais, ambientais e biológicos, assim como fatores que influenciam em suas regras de inter-relação/interação (GREMONINI; VICENTINI, 2008).

Segundo Gremonini e Vicentini (2008), o estudo dos Autômatos Celulares atraiu um grande interesse nos últimos anos, devido a sua capacidade de gerar um amplo espectro de padrões comportamentais complexos a partir de conjuntos relativamente simples de regras. Além disso, eles parecem capturar a essência de comportamentos auto-organizados complexos observados em sistemas naturais, como pode-se observar na Figura 1 que ilustra a semelhança entre uma espécie de caracol marinho (Figura 1a) e a representação diagramática de um Autômato Celular (Figura 1b).

Segundo Wolfram (1986), todo esse estudo tem rendido diversas aplicações, como nos trabalhos de Smith (1972) no reconhecimento de linguagens, em Hernandez G. e Herrmann (1996) no processamento de imagens e nos trabalhos de Santos Luiz Felipe Ramos Turci (2019) em modelos de propagação de incêndio florestal. Também são exemplos



(a) Uma espécie de caracol marinho



(b) Representação diagramática de um Autômato Celular

Figura 1 – Comportamentos auto-organizados complexos

de aplicações o artigo na área de simulação de tráfego urbano de Fourrate e Loulidi (2020), escoamento de fluidos de Frisch, Hasslacher e Pomeau (1986) e nos estudos de Wolfram (2018) em criptografia.

No estudo dos Autômatos Celulares destaca-se o matemático Wolfram (1986), que observando o comportamento dos Autômatos Celulares, criou um conceituado modelo e também uma classificação que serve de base para esse e muitos outros trabalhos. Nesse sentido, o presente trabalho tem como principal objetivo classificar o comportamento dinâmico das regras elementares quando sua estrutura de conexão entre as células vizinhas é alterada para redes do tipo *SmallWorld*.

O trabalho se justifica pois segundo Chen et al. (2020), nos últimos anos os Autômatos Celulares tornaram-se um dos modelos de sistemas complexos mais estudados e sua ascensão na academia gera diversas aplicações. Entretanto, segundo Tomassini (2006), o modelo de Wolfram não é adequado para estruturas em rede.

Para se beneficiar da modelagem de Autômato Celular na área de redes, Tomassini (2006) generalizou o modelo de Wolfram para um modelo chamado Rede de Autômato Celular, aplicando-o em redes do tipo *SmallWorld*. Segundo esse mesmo autor, a rede mostra um conjunto mais rico de comportamentos dinâmicos (TOMASSINI, 2006).

Esse trabalho, utilizando dessa generalização, contribui para a ciência de redes, pois analisa e classifica comportamentos de um modelo útil, segundo Tomassini (2006) em Internet, World Wide Web, redes de fornecimento de energia elétrica e redes biológicas.

O estudo de caso utilizando redes *SmallWorld* nesse trabalho possibilita também que o trabalho seja útil na previsão de comportamento em Redes Sociais, redes peer to peer (P2P) e comunicação entre agentes autônomos (EBEL; DAVIDSEN; BORNHOLDT, 2003).

A conjectura desse trabalho é realizar alterações no modelo do Autômato Celular de Wolfram alterando sua vizinhança para o formato de Redes *SmallWorld*, assim constatar se será possível rotular suas regras utilizando a classificação de Wolfram (1994), e também verificar a possibilidade de comparação desse comportamento com as regras elementares do Autômato Celular de Wolfram.

## 1.1 Organização deste trabalho

Esse trabalho está organizado de forma que a Seção 2 trata da fundamentação teórica, abordando conceitos relacionados a Autômatos Celulares e Rede de Autômato Celular. É tratado também a classificação de Wolfram (1994) para Autômato Celular, mais especificamente, para o Autômato Celular Elementar. Ainda é tratado um tipo específico de rede, a rede *SmallWorld* e algoritmo para geração desse tipo de rede.

A Seção 3 fornece detalhes do processo de seleção das amostras e sua classificação, através de três fases, a Fase de experimento, responsável pela seleção e geração das amostras, Fase de análise, que trata do armazenamento e classificação dos diagramas

espaço-temporal. Depois são tratados de detalhes da Fase de Tratamento de Exceções que consiste na correção de resultados inconclusivos da etapa anterior.

Na Seção 4 são apresentados os resultados desse trabalho e também é feita uma comparação entre as redes analisadas juntamente com o modelo de Autômato Celular proposto por Wolfram (1994). Por fim, a Seção 5 contém as conclusões e trabalhos futuros descritos pelo autor.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Autômato Celular

O Autômato Celular consiste em uma grade d-dimensional finita ou infinita de células, onde cada célula recebe um valor discreto denominado estado, que pertence ao conjunto  $\Sigma$  de estados possíveis (TOMASSINI, 2006). Para ilustrar o modelo, na Figura 2 está disposto um Autômato Celular composto de uma grade unidimensional com 12 células e estados possíveis  $\Sigma = \{1,0\}$ .

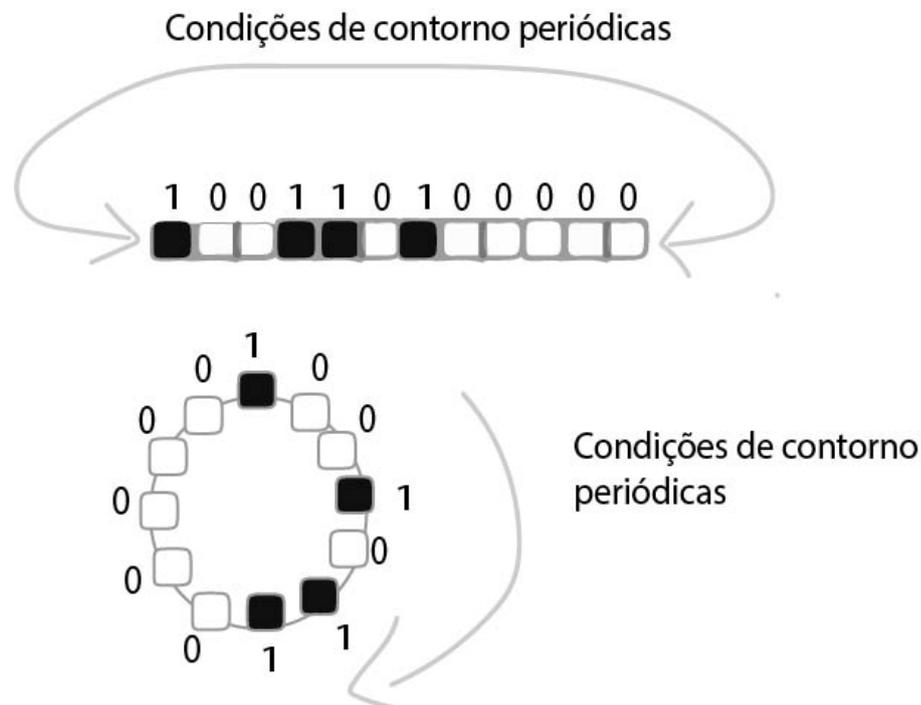


Figura 2 – Espaço Celular

Segundo Wolfram (1994), os autômatos celulares são sistemas dinâmicos nos quais o espaço e o tempo são discretos. O significado do discreto é que as variáveis de estados mudam seus estados em instantes de tempo específicos, em um intervalo finito (MELOTTI, 2009). Essa mudança de estados de cada uma das células acontece no instante  $t$ , nesse instante o valor de cada célula é uma função que recebe como entrada uma vizinhança local de células no tempo  $t - 1$ .

Na Figura 3 está apresentado a evolução de um Autômato Celular composto de uma grade unidimensional. As células atualizam seus estados ao longo da evolução do autômato de acordo com uma determinada regra local.

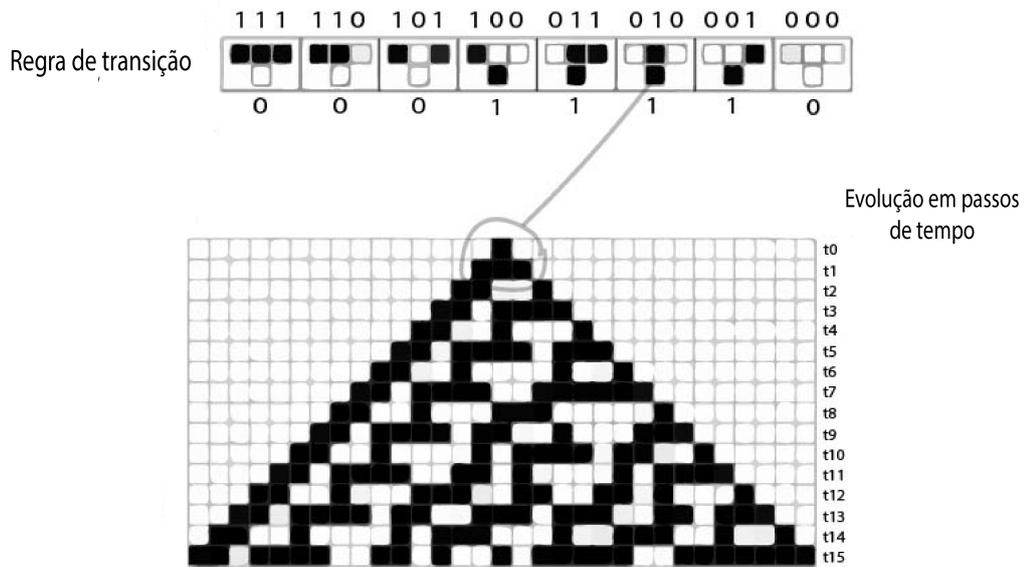


Figura 3 – Evolução de um Autômato Celular

## 2.2 Tipos de Condições de Contorno

No modelo de Autômato Celular de Wolfram (1994) a condição de contorno das células é do tipo periódica, que é ilustrada na Figura 4. Nesse tipo de vizinhança as fronteiras do reticulado, na célula 0 a célula vizinha esquerda é a célula  $n - 1$  e a vizinha direita a célula 1. Na extremidade direita, a célula  $n - 1$  tem como célula vizinha direita a célula 0. Segundo LuValle (2019) as Condições de Contorno Periódicas são as mais utilizadas.

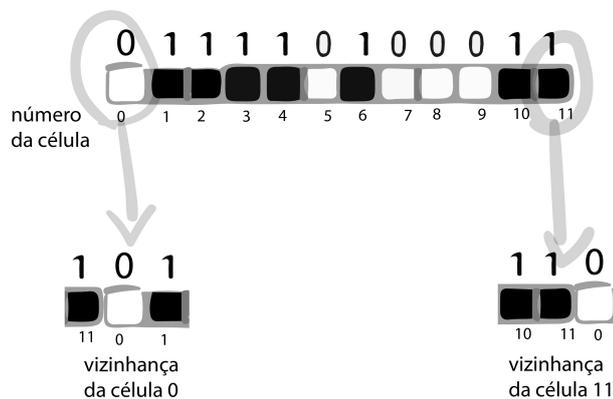


Figura 4 – Condições de Contorno Periódicas

Ainda segundo LuValle (2019), existem outros tipos de condições de contorno, que são ilustradas na Figura 5, como as Condições de Contorno Constantes, onde é definida uma constante, 0 ou 1 que vai ser escolhida sempre que a borda for atingida. A Figura 5a ilustra a Condição de Contorno Constante, sendo 1 a constante que compõe a borda.

Nesse tipo de contorno para compor a vizinhança da célula 0, na célula esquerda será a constante escolhida e a célula vizinha direita será a célula 1. Já na extremidade direita, a célula vizinha direita da célula  $n - 1$  será a constante, enquanto que a vizinha esquerda é a célula  $n - 2$ .

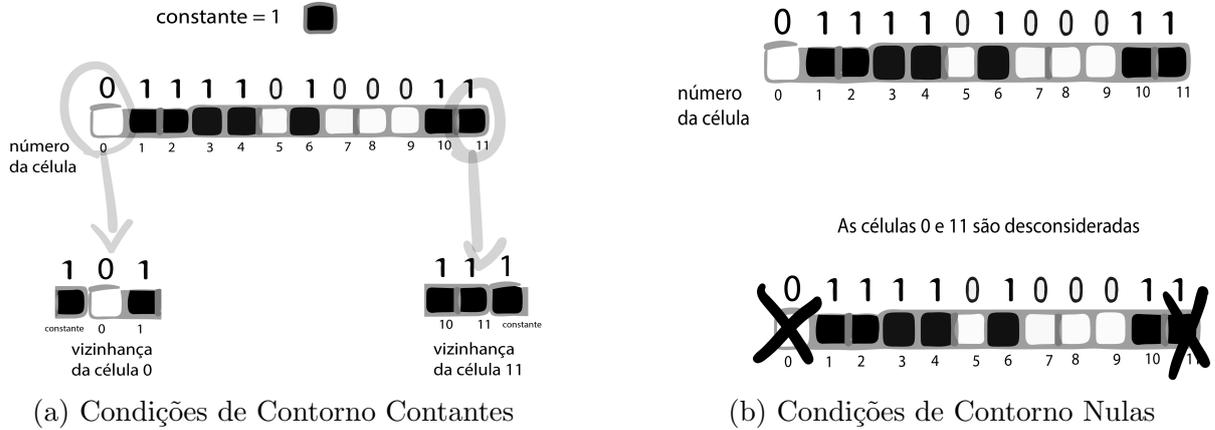


Figura 5 – Outros tipos de Condições de Contorno

Existe também as Condições de Contorno Nulas, de forma que as células 0 e  $n - 1$  são excluídas do reticulado por possuir vizinhança incompleta. Segundo LuValle (2019) esse tipo de vizinhança ocasiona a perda de dados. A Figura 5b ilustra esse tipo de condição de contorno, na Figura as células das extremidades são desconsideradas do reticulado. Nesse presente trabalho as Condições de Contorno utilizadas são como da Figura 4, são Condições de Contorno Periódicas.

### 2.3 Definição Formal de Autômato Celular

Formalmente um Autômato Celular  $A$  é uma quádrupla denotado na Equação 1.

$$A = (\Sigma, U, d, f) \tag{1}$$

Nesse modelo,  $\Sigma$  é o conjunto de estados possíveis,  $U$  é a vizinhança celular,  $d \in \mathbb{Z}^+$  é a dimensão de  $A$  e  $f$  é a regra de interação celular local, também chamada de função de transição. Em um Autômato Celular,  $f$  é a função que decide para cada célula, segundo o seu estado e o estado das vizinhas, qual estado (no instante  $t$ ) aquela célula irá assumir.

Então formalmente, dada a posição de uma célula  $i$ ,  $i \in \mathbb{Z}^d$ , em uma malha uniforme d-dimensional regular, ou seja,  $i$  é um vetor inteiro em um espaço d-dimensional (TOMASSINI, 2006). Já a vizinhança  $U$  de uma célula  $i$  é definida como:

$$U_i = \{i, i + r_1, i + r_2, \dots, i + r_{n-1}\} \tag{2}$$

Assim sendo,  $n$  assume um parâmetro fixo que determina o tamanho da vizinhança e  $r_j$  um vetor no espaço d-dimensional. A vizinhança  $U_i$  de uma célula pode ser mapeada

pela função de transição  $f$ , de forma que a regra de transição local  $f$  seja:

$$f : \Sigma^n \rightarrow \Sigma \tag{3}$$

A função de transição  $f$  mapeia o estado  $s_i \in \Sigma$  de uma célula  $i$  para outro estado no conjunto  $\Sigma$  como função dos conjuntos de estados das células vizinhas  $U_i$ . Para um Autômato Celular de tamanho finito  $N$ , uma configuração da grade no momento  $t$  é definida como:

$$C(t) = (s_0(t), s_1(t), \dots, s_{N-1}(t)) \tag{4}$$

Dessa forma,  $s_i(t) \in \Sigma$  é o estado da célula  $i$  no tempo  $t$ . A progressão do tempo do autômato é então dada pela iteração do mapeamento global, também chamada de operador de evolução  $\Phi$ .

$$\Phi : C(t) \rightarrow C(t + 1), t \in \mathbb{N}^+ \tag{5}$$

Ainda segundo Tomassini (2006), devido a sua grade d-dimensional, o Autômato Celular pode assumir outras dimensões além do vetor circular, como ilustrado na Figura 6, contudo esse trabalho tem como objeto de estudo o Autômato Celular com reticulado unidimensional.

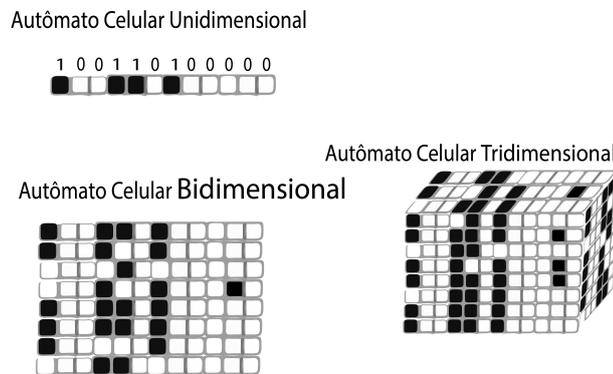


Figura 6 – Autômatos Celulares e dimensões

Em um Autômato Celular Unidimensional com dois estados possíveis por célula,  $f$  é uma função  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , e o tamanho da vizinhança  $n$ , como ilustrado na Figura 7, é geralmente considerado  $n = 2r + 1$ , de modo que:

$$s_i(t + 1) = f(s_{i-r}(t), \dots, s_i(t), \dots, s_{i+r}(t)) \tag{6}$$

Onde  $r \in \mathbb{Z}^+$  é um parâmetro, chamado de raio, que representam a vizinhança padrão e unidimensional do Autômato Celular Elementar. No Autômato Celular Elementar geralmente são assumidas condições de contorno periódicas, como ilustrado na Figura 2, a grade unidimensional denominada vetor é circular(condição de contorno periódica).

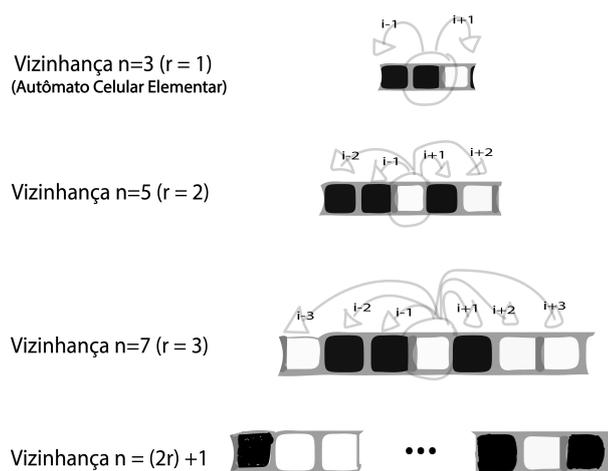


Figura 7 – Diferentes vizinhanças para um Autômato Celular Unidimensional

## 2.4 Autômato Celular Elementar

O Autômato Celular Elementar é o Autômato Celular Unidimensional utilizado por Wolfram (1994) em seus estudos. Esse é um modelo matemático de sistemas físicos com espaço e tempo discretos, composto por um vetor uniforme, geralmente infinito em extensão, com valores discretos para cada elemento (para cada “célula”) e raio 1. O estado de um Autômato Celular Elementar é especificado pelos valores das variáveis de cada célula (WOLFRAM, 1986).

O modelo de Wolfram pode ser dividido em duas partes: Espaço Celular e Regra de Transição. Na Figura 2 está esquematizado o Espaço Celular do Autômato Celular Elementar formado por um arranjo de 12 células. Segundo Oliveira (2003), o Espaço Celular é um reticulado de  $N$  células idênticas dispostas em um arranjo, cada uma com um padrão idêntico de conexões locais para outras células, com condições de contorno. Cada célula desse reticulado assume um estado, podendo ser valores booleanos, sendo 0 ou 1, portanto para o Autômato Celular Elementar se tem  $\Sigma = \{0,1\}$ .

Segundo Wolfram (1994), uma configuração inicial do reticulado, aparentemente simples, pode produzir resultados em que a conjuntura da matemática dos estados apresentará um alto nível de complexidade. Os estados (valores) das células são alterados conforme um conjunto de regras de transição, que depende da vizinhança, ou seja, o próximo estado de uma célula depende do seu estado atual e também de suas células vizinhas. Ilustrando isso, a Figura 8, diagrama a evolução de um Autômato Celular Elementar com um reticulado inicial de 31 células.

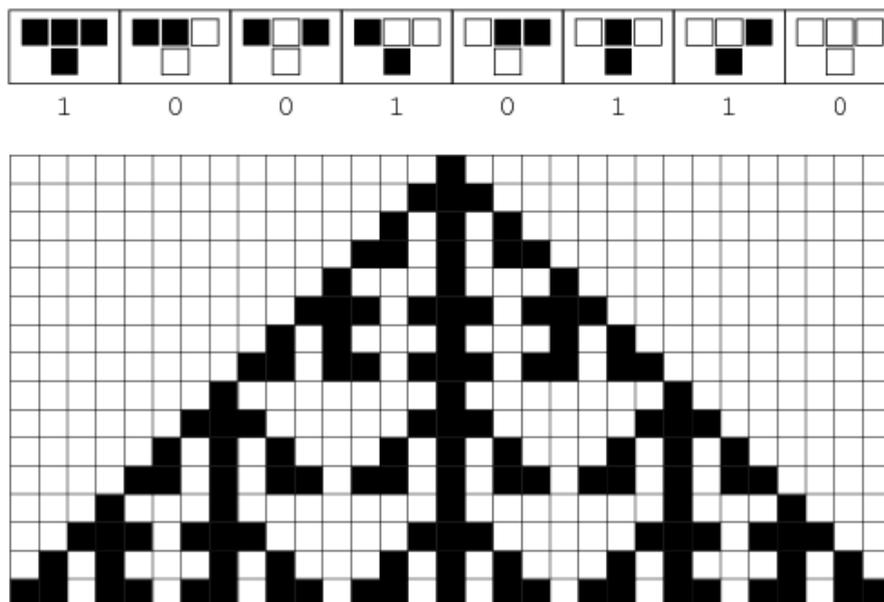


Figura 8 – Regra de Transição 150

Fonte: Wolfram (1994)

Essa complexidade comportamental é gerada segundo a Regra de Transição, na Figura 9 está disposto algumas regras de transição para o Autômato Celular Elementar. O conjunto de Regras de Transição e gerado através da função de transição  $f$ . A função  $f$  em um Autômato Celular Elementar é definida como uma função  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , e o tamanho da vizinhança é um parâmetro fixo  $n = 3$ , assim como o raio  $r = 1$ , de modo que:

$$s_i(t + 1) = f(s_{i-1}(t), s_i(t), s_{i+1}(t)) \tag{7}$$

O Autômato Celular Elementar possui vizinhança de três células que podem assumir um estado booleano, isso totaliza  $2^3 = 8$  combinações possíveis para as vizinhanças. A partir disso, as oito vizinhanças podem produzir segundo a função  $f$  o total de  $2^{2^3} = 256$  resultados booleanos diferentes, cada um desses resultados pode ser numerado, como ilustrado na Figura 9. A esses 256 resultados possíveis Wolfram (1994) definiu como regras Elementares.

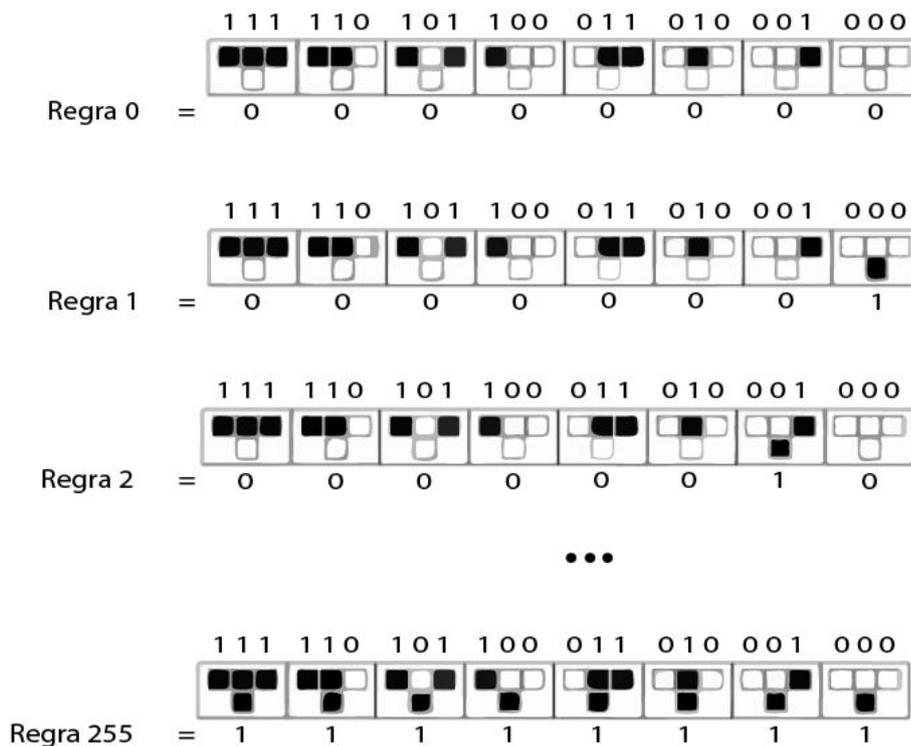


Figura 9 – Regras possíveis para um Autômato Celular Elementar

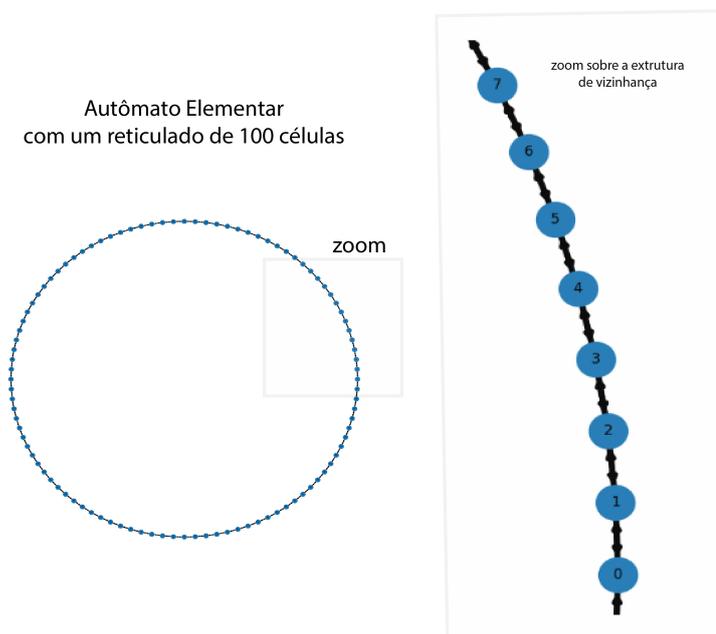


Figura 10 – Vizinhança Regular do Autômato Celular Elementar

A vizinhança regular de cada uma das células do modelo de Wolfram está caracterizado na Figura 10. Cada célula  $i$  possui ligação diretamente com sua célula  $i - 1$  e  $i + 1$ , evidenciando sua regularidade. Na Figura, o Autômato Celular Elementar possui reticulado de 100 células. Segundo Tomassini (2006), o Espaço Celular do modelo de Wolfram pode ser diagramado em um grafo direcionado  $G = (V, E)$ , sendo  $V$  o conjunto de vértices e

$E$  o conjunto de arestas. Nesse Grafo em forma de anel, para cada célula  $i$  existem duas arestas  $(i, i + 1)$  e  $(i, i - 1)$  no conjunto  $E$  de arestas.

## 2.5 Diagrama espaço-temporal

Para visualizar o comportamento de um Autômato Celular Unidimensional, pode-se usar um diagrama denominado espaço-temporal, em que o eixo horizontal representa a configuração  $C(t)$  em um determinado tempo  $t$  e o eixo vertical representam etapas sucessivas no tempo (TOMASSINI, 2006). Quatro diagramas desse tipo são exemplificados na Figura 11.

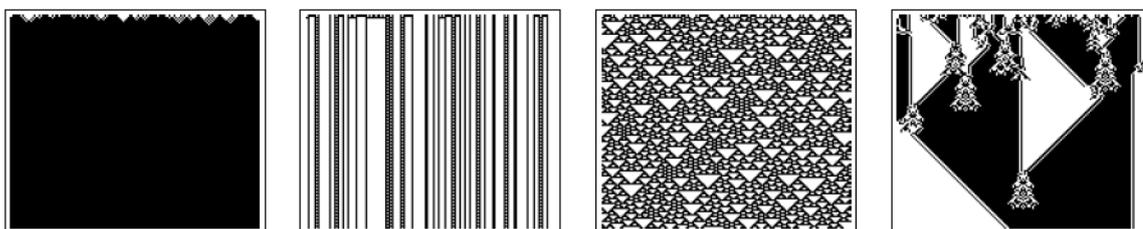


Figura 11 – Quatro diagramas de espaço-temporal

Fonte: Wolfram (1994)

Segundo Engelen et al. (1995), no diagrama espaço-temporal, o tempo varia em intervalos discretos e o estado de todas as células muda simultaneamente em função do seu próprio estado, do estado das demais células em sua vizinhança e de acordo com um conjunto específico de regras de transição.

## 2.6 Classificação de Wolfram

No seu trabalho, Wolfram classificou o comportamento das regras do Autômato Celular Elementar em quatro classes distintas, ilustradas na Tabela 1. As classes 1 e 2 de regras do Autômato Celular Elementar possuem comportamento relativamente simples, no caso da classe 1 todas as células do reticulado convergem para algum valor específico, 0 ou 1, exemplo as regras descritas na Figura 12 que representa a plotagem da regra 250(14a), 32(12b) e regra 254(12c) do Autômato Celular Elementar. No caso da classe 2 formam-se estruturas periódicas que se repetem por longos períodos de tempo, como é o caso das regras descritas na Figura 13 que representa a plotagem da regra 178(13a), 204(13b) e regra 208(13c) do Autômato Celular elementar.

Já na classe 3 Wolfram classificou as regras ditas Caóticas ou Desordenadas, que são regras que apresentam comportamento com aspectos randômicos e com algumas estruturas parecidas com triângulos em seu diagrama espaço-temporal. Na última classe, a classe 4 apresenta por vezes comportamento randômico e por vezes comportamento

ordenado, como ilustrado nos diagramas de espaço-temporal da figura 15, que representa a plotagem da regra 11 (15a), 193 (15b) e regra 208 (15c).

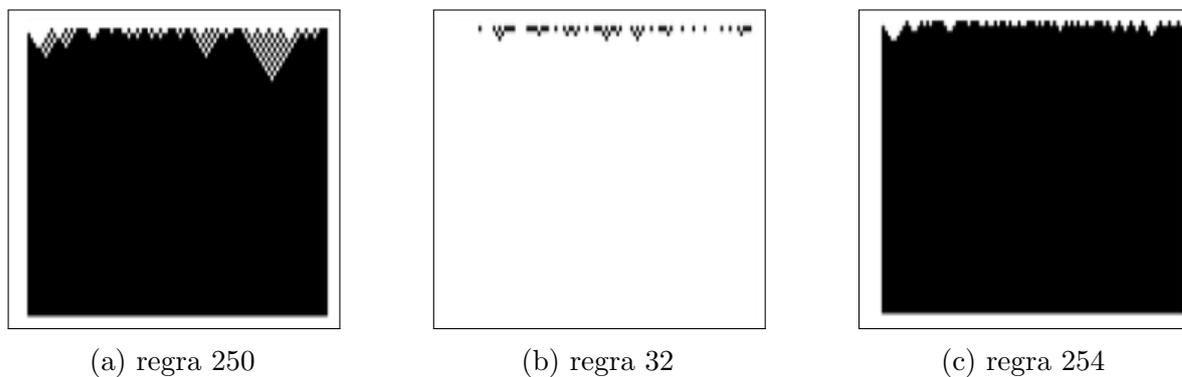


Figura 12 – Classe 1 de Wolfram: Regras Homogêneas ou de Ponto Fixo

Fonte: Wolfram (1986)

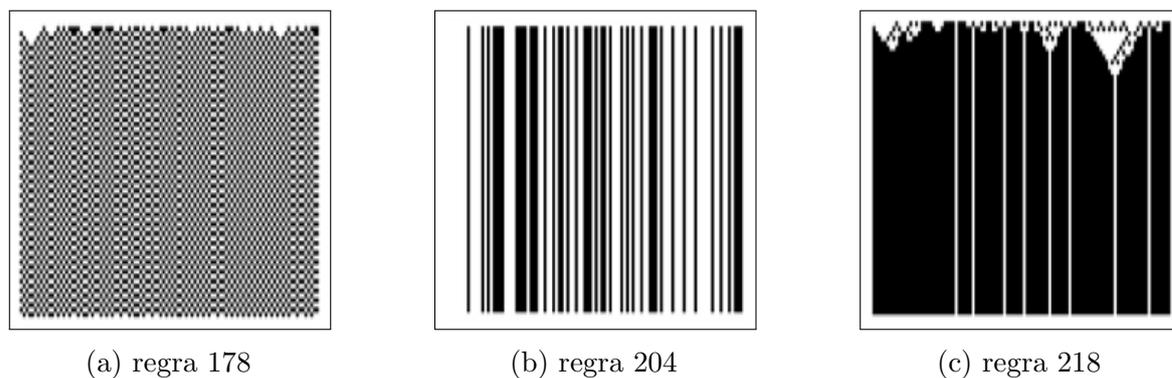


Figura 13 – Classe 2 de Wolfram: Regras Heterogêneas ou Periódicas

Fonte: Wolfram (1986)

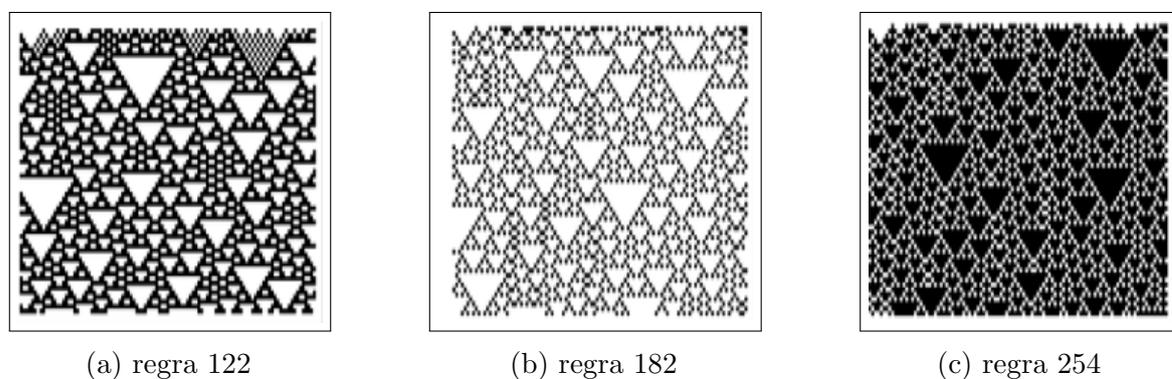


Figura 14 – Classe 3 de Wolfram: Regras Caóticas ou de Desordenadas

Fonte: Wolfram (1986)

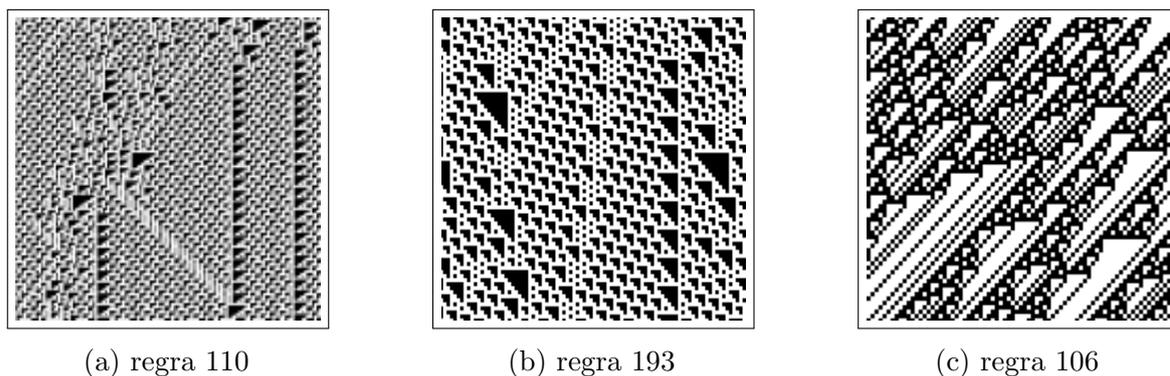


Figura 15 – Classe 4 de Wolfram: Regras Complexas

Fonte: Wolfram (1986)

Tabela 1 – As quatro classes de Wolfram

Classe	Denominação	Comportamento
1	Homogêneas ou de Ponto Fixo	Comportamento simples e convergindo para um estado final com todas as células 0 ou 1.
2	Heterogêneas ou Periódicas	Comportamento com diferentes estados finais possíveis, porém consistindo em um conjunto simples de estruturas que se repetem para sempre ou se repetem por muitos passos de tempo.
3	Caóticas ou Desordenadas	Comportamento mais complicado e em muitos aspectos parecendo randômico, algumas estruturas parecidas com triângulos são vistas.
4	Complexas	Comportamento envolvendo uma mistura de estruturas ordenadas e aleatórias, onde estruturas locais são produzidas, porém interagem umas com as outras de maneira complicada.

## 2.7 Redes de Autômato Celular

Tendo definido o Autômato Celular Elementar, é possível fazer uma generalização a fim de construir uma estrutura de rede, a Rede de Autômato Celular. No Autômato Celular Elementar, a topologia é um vetor regular  $d$ -dimensional, já na Rede de Autômato Celular, a estrutura pode ser construída em qualquer Grafo  $G = (V, E)$  direcionado e

conectado, de forma que  $V$  seja um conjunto de vértices do grafo  $G$  e  $E$  seja o conjunto de arestas desse mesmo grafo, sendo  $E$  uma relação binária sobre  $V$  (TOMASSINI, 2006).

Dessa forma, uma Rede de Autômatos Celulares ( $RAC$ ) é definida como uma quadrupla:

$$RAC = (G, \Sigma, U, \{f_i, i \in V\}) \quad (8)$$

Segundo Tomassini (2006), na Rede de Autômatos Celulares, a função de transição local  $f$  depende do grau  $k_i$  do vértice  $i$ , isso pode ser formalizado como  $f : \Sigma^{k_i} \rightarrow \Sigma$ .

Apesar de que na Rede de Autômatos Celulares cada célula  $i$  pode assumir grau  $k_i$  diferente das demais, esse trabalho se utilizará de um grau  $k$  fixo para todas as células e igual a 2, como ilustrado na Figura 16.

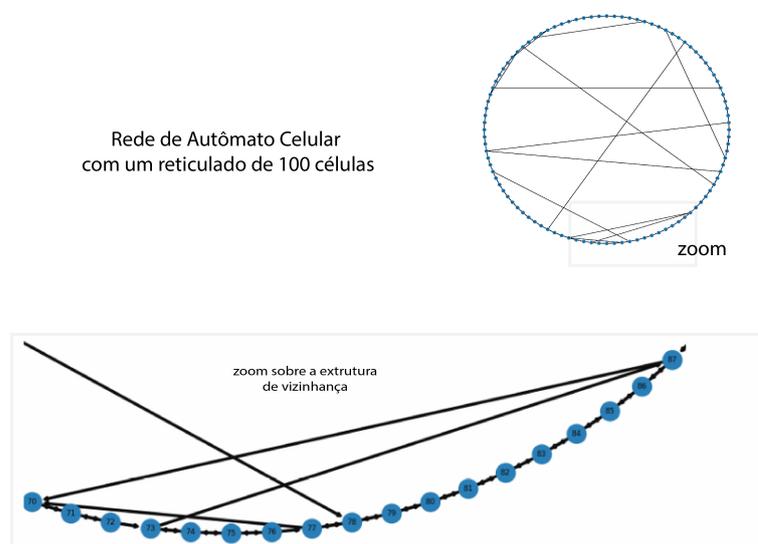


Figura 16 – Vizinhança de uma Rede de Autômato Celular

## 2.8 Redes *SmallWorld*

Segundo Watts (2006), uma rede do tipo *SmallWorld* é definida para ser uma rede em que a distância média  $L$  entre dois nós escolhidos aleatoriamente da rede cresce proporcionalmente ao logaritmo do número de nós presentes na rede. Esse crescimento é ilustrado na Figura 17, no gráfico é apresentado a relação entre a distância média entre dois nós escolhidos aleatoriamente e também o Coeficiente de Clusterização, que mede o grau com que os nós de um grafo tendem a agrupar-se.

Nessa Figura 17, está denotado o Comprimento do Caminho Médio  $L(p)$  e o coeficiente de Clusterização  $C(p)$  para uma coleção de grafos reconectados aleatoriamente. Observe que  $L$  cresce proporcionalmente a  $\log_{10} |n|$ , sendo  $n$  o número de nós da rede.

Nesse trabalho, devido ao caráter exploratório da pesquisa, é considerado uma Rede de Autômatos Celulares gerada com uma característica específica, com estrutura

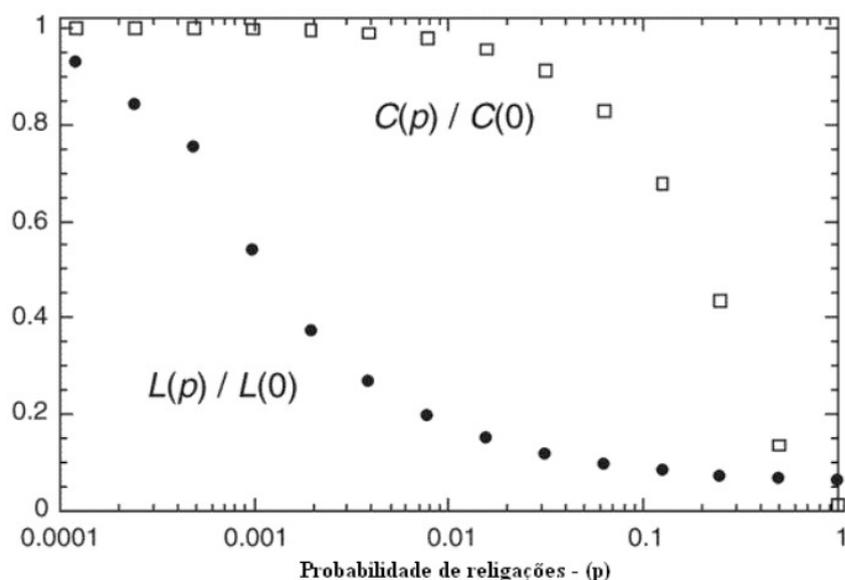


Figura 17 – Comportamento *SmallWorld*

Fonte: WATTS (2018)

de redes *SmallWorld*, como a rede da Figura 18. Esse tipo de rede permite que as regras usadas nos Autômatos Celulares Elementares possam também ser aplicadas nas Redes de Autômatos Celulares.

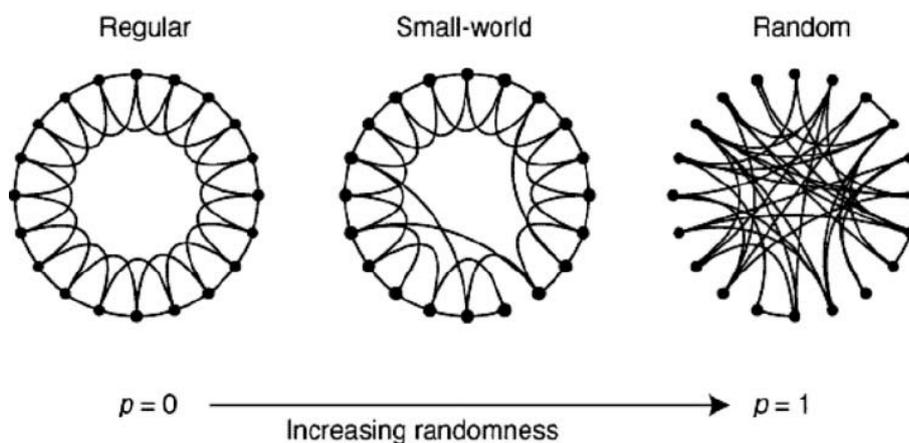


Figura 18 – Rede *SmallWorld*

Fonte: WATTS (2018)

As redes *SmallWorld* são redes que é possível estabelecer parâmetros a fim de controlar a aleatoriedade das conexões da rede, como exemplificado na Figura 18, onde o grafo ao centro da imagem é uma rede *SmallWorld* e com algum coeficiente ( $0 \leq P \leq 1$ ) que modela o grafo. Neste tipo de rede, a distância média entre quaisquer dois vértices não ultrapassa um número pequeno de vértices.

Nesse trabalho as redes *SmallWorld* são usadas como redes intermediárias entre

Tabela 2 – Parâmetros de entrada para o Algoritmo Geração de Rede *SmallWorld*

N	Número de nós
K	Grau de cada nó
$(0 \leq P \leq 1)$	Coefficiente que modela o grafo

redes regulares e redes aleatórias. Para a construção da rede *SmallWorld* é usado o modelo de Watts-Strogatz, presente nos trabalhos de Watts (2006) e escrito em pseudocódigo no Algoritmo 1 com os parâmetros da Tabela 2. A construção da rede se dá através do Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo Geração de Rede *SmallWorld*( $N, K, P$ )
 

---

```

para cada nó  $n_i \in (1, N)$  faça
  | Conectar  $n_i$  aos seus  $K$  nós vizinhos
fim
para cada nó  $n_i \in (1, N)$  faça
  | para cada aresta  $e_i \in (1, K)$  faça
  |   Gerar um número real aleatório  $x \in (0, 1)$ 
  |   se  $x \leq p$  então
  |     Selecionar um nó aleatório  $m \in (1, V)$  de forma que  $m \neq n_i$  e
  |      $(n_i, m) \ni E$ 
  |     Reescreva a aresta  $e_i$  para  $(n_i, m)$ 
  |   fim
  | fim
fim
  
```

---

No primeiro laço há a criação de uma rede regular, tal como uma estrutura de um array regular do Autômato Celular Elementar, para cada nó da rede é feita a conexão com seus vizinhos. Depois disso ocorre de fato a reescrita das arestas, tem-se o sorteio de um número aleatório  $x \in (0, 1)$  real, esse número irá servir de regulador para escolher ou não se a aresta  $e_i$  será escolhida para a reescrita. Se a aresta  $e_i$  for escolhida ocorre a reescrita da aresta  $e_i$  para a aresta  $(n_i, m)$ .

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Como o trabalho tem caráter exploratório e experimental, ele foi desenvolvido em três fases: Fase de experimento, Fase de análise e Fase de tratamento de exceções. A Fase de Experimento produziu um conjunto de diagramas espaço-temporal, já na Fase de Análise foi feita a análise e classificação dos diagramas, inferindo assim resultados sobre as regras de Wolfram quando aplicadas na estrutura de rede.

Na Fase de tratamento de exceções foram feitos novos experimentos a fim de classificar regras que possuíssem diagramas inconclusivos perante a etapa anterior. Todas as etapas foram sequenciais.

#### 3.1 Fase de experimento

Inicialmente, na fase de experimento foi feito o procedimento ilustrado no fluxograma da Figura 19, na seleção das amostras foram coletadas 4 Redes de Autômato Celular, sendo 3 redes diferentes do tipo *SmallWorld* e 1 rede aleatória. A partir de uma estrutura regular com um reticulado  $n$ , como o modelo de Wolfram, é possível gerar  $(n - 1)^{2n}$  combinações de Redes de Autômato Celular, ou seja para um reticulado de 100 células há aproximadamente  $1,33 \cdot 10^{399}$  redes diferentes.

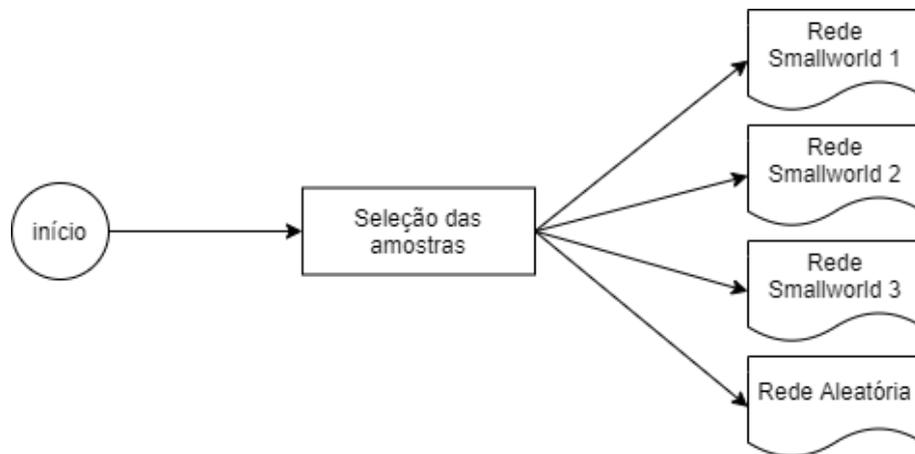


Figura 19 – Fase de experimento

O número de combinações em função do tamanho  $n$  de reticulado se dá ao fato de que para cada seleção do Algoritmo 1 com  $p = 1$ , a religação de cada aresta direcionada pode assumir  $n - 1$  vértices possíveis, como a estrutura regular possui  $2n$  arestas direcionadas, o total de redes possíveis segundo um reticulado  $n$  é  $(n - 1)^{2n}$ . Mesmo com uma pequena quantidade de células no reticulado, é possível gerar muitas redes, de forma que em uma Estrutura Regular de 3 células existem 64 redes possíveis, a Figura 20 apresenta uma das

64 redes em um reticulado de 3 células. Devido a essa grande quantidade de redes, no caso desse trabalho, onde  $n = 100$ , foi necessário uma amostragem.

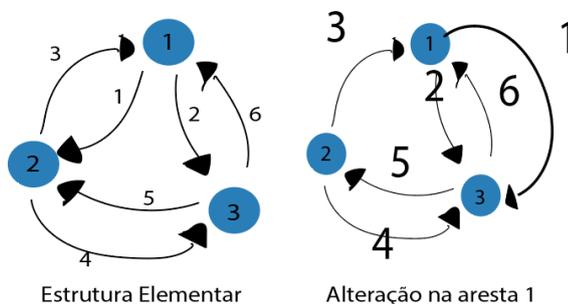


Figura 20 – Alteração de uma Estrutura Elementar de um reticulado composto de 3 células

Na composição da amostra foram selecionadas três redes do tipo *SmallWorld*, que segundo WATTS (2018) são redes intermediárias entre redes regulares e redes aleatórias. Esse tipo de rede é vantajoso porque permite controlar a sua aleatoriedade. Também compõe a amostra uma rede do tipo aleatória, que serve como objeto de comparação entre as redes do tipo *SmallWorld* e a estrutura regular de Wolfram (1994). Essa geração das redes está ilustrada na Figura 21.

Para gerar a amostra foi utilizado a linguagem de programação Python, que segundo Vieira (2020) é uma linguagem de propósito geral, muito usada no meio científico para Análise de dados e Inteligência Artificial. A escolha da linguagem se deu pela sua popularidade no meio científico (AYER; MIGUEZ; TOBY, 2014).

A fim de construir as três redes *SmallWorld* foi codificado o Algoritmo 1, com o parâmetro  $p = 0.1$ , ou seja para cada ligação da estrutura inicial (regular), essa ligação tem 10% de chance de não ser regular ao término da execução. Depois disso realizou-se o refinamento selecionando apenas redes que forem conexas.

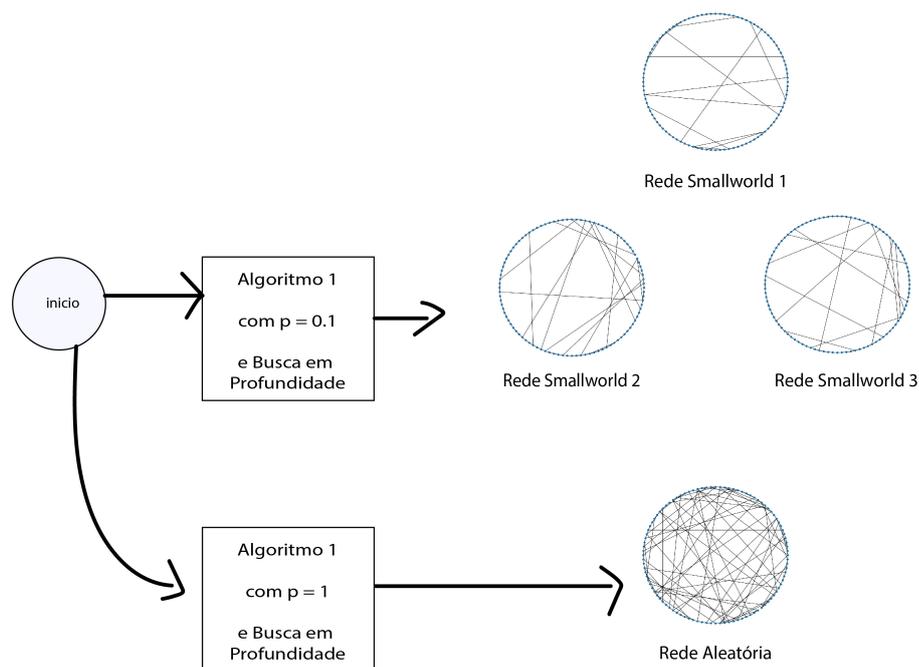


Figura 21 – Geração da amostra

Na amostra também foi gerada uma rede aleatória através do parâmetro  $p = 1$ , ou seja para cada ligação da estrutura inicial (regular), essa ligação tem 100% de chance de ser reconectada. Na geração da rede aleatória executou-se uma busca em profundidade para garantir que a rede seja conexa. Após a geração das amostras decorreu o procedimento de geração dos diagramas espaço-temporal, que é ilustrado na Figura 22.

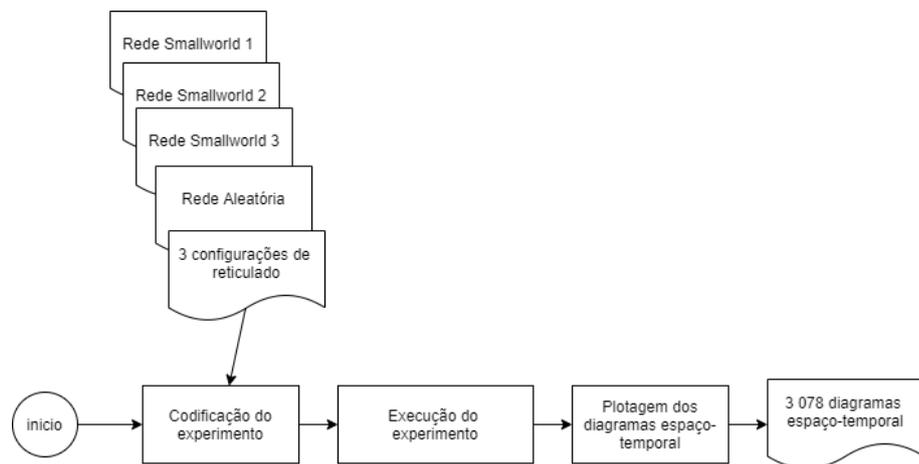


Figura 22 – Geração dos diagramas espaço-temporal

O código em Python da geração dos diagramas espaço-temporal recebe como entrada a amostra das redes *SmallWorld* e Rede Aleatória e também três configurações iniciais de reticulado para então plotar todos os diagramas necessários. Considerando que o modelo de Wolfram (1994) da rede regular produz 256 diagramas espaço-temporal para uma configuração inicial, cada rede produz também 256 diagramas espaço-temporal para cada configuração de reticulado.

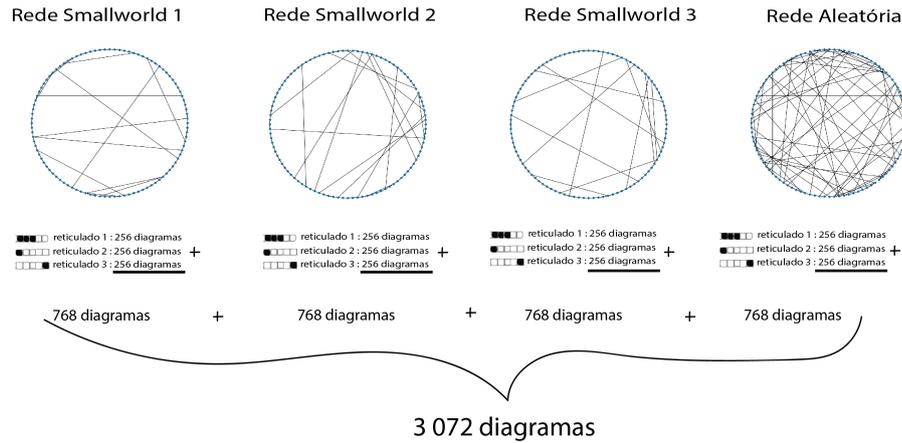


Figura 23 – Esquema do total de diagramas espaço-temporal

Nesse trabalho foram escolhidas 3 configurações iniciais de reticulado, então para cada rede foram gerados 768 diagramas espaço-temporal, totalizando 3 072 diagramas no trabalho, essa contagem é diagramada na Figura 23. Esses diagramas foram armazenados em formato de imagem para a próxima etapa, onde foi feita a análise e classificação de cada diagrama.

### 3.2 Fase de análise

Na fase de análise foram manualmente classificados os 3 072 diagramas espaço-temporal seguindo os critérios de Wolfram (1994). Para cada rede foi produzida uma matriz  $A$  de 256 linhas e 3 colunas. Cada linha  $i$  representa a classificação para a regra da Rede de Autômato Celular e cada coluna  $j$  sendo as classificações das regras segundo a configuração inicial de reticulado  $j$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \vdots & & \\ a_{255,1} & a_{255,2} & a_{255,3} \end{bmatrix}$$

Para cada  $a_{i,j}$  tem-se que  $a_{i,j} \in \{1,2,3,4\}$ , ou seja cada elemento da matriz assume uma classe possível, segundo o diagrama espaço-temporal da regra  $i$  com a configuração de reticulado  $j$ . Se ao analisar o diagrama foi constatado que o comportamento é simples e converge para um estado final com todas as células 0 ou 1 tem-se  $a_{i,j} = 1$ .

A Figura 24 apresenta exemplos de três diagramas espaço-temporal da classe 1, o primeiro diagrama é referente a rede *SmallWorld* 1, evoluindo a primeira configuração

de reticulado com a regra 135, o segundo é referente a rede *SmallWorld* 2, evoluindo a terceira configuração de reticulado com a regra 69.

No terceiro diagrama espaço-temporal está ilustrado a evolução da primeira configuração de reticulado na rede Aleatória com a regra 191 com a primeira configuração de reticulado. Em todos os três diagramas espaço-temporal ocorre a convergência de todas as células do reticulado para um estado apenas, sendo 0 ou 1, portanto na Rede *SmallWorld* 1  $a_{135,1} = 1$ , na rede *SmallWorld* 2  $a_{69,3} = 1$  e na rede Aleatória  $a_{191,1} = 1$ .

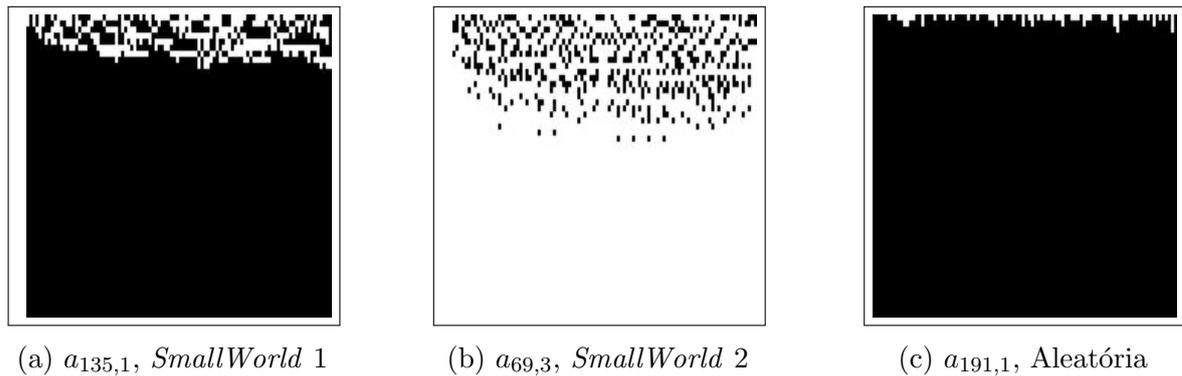


Figura 24 – Exemplo de diagramas com  $a_{i,j} = 1$

Caso o comportamento observado no diagrama espaço-temporal consiste em um conjunto de estruturas simples que se repetem com o tempo, tem-se  $a_{i,j} = 2$ . A Figura 25 ilustra diagramas com esse comportamento, no diagrama espaço-temporal da Figura 25a, referente a rede *SmallWorld* 3, na regra 175 na primeira configuração de reticulado, conforme ocorre a evolução da rede de Autômato Celular ocorre a convergência para uma mesma configuração de reticulado, esse comportamento é classificado como uma regra periódica, portanto na Rede *SmallWorld* 1,  $a_{175,2} = 2$ .

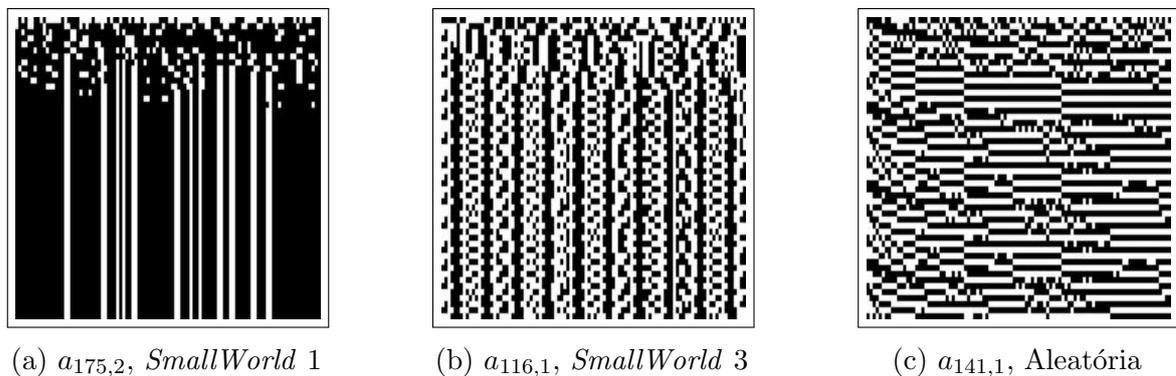


Figura 25 – Exemplo de diagramas com  $a_{i,j} = 2$

Nas Figuras 25b e 25c observa-se a ocorrência de um período maior do que na Figura 25a, representando respectivamente os diagramas das redes *SmallWorld* 3 na regra 116 com configuração de reticulado 1 e rede Aleatória na regra 141 com configuração de reticulado 1.

Porém se o comportamento em  $a_{i,j}$  não é fácil de se fazer previsões e possui características aleatórias, tem-se  $a_{i,j} = 3$ . Na Figura 26 é possível observar diagramas com esse comportamento. A Figura 26a ilustra o diagrama espaço-temporal da rede *SmallWorld* 1 na evolução da segunda configuração com a regra 88, já na Figura 26b está o diagrama referente a rede *SmallWorld* 2 na evolução da primeira configuração de reticulado com a regra 74, enquanto que na Figura 26c ilustra o diagrama espaço-temporal referente a Rede *SmallWorld* 3, na evolução da primeira configuração de reticulado com a regra 89.

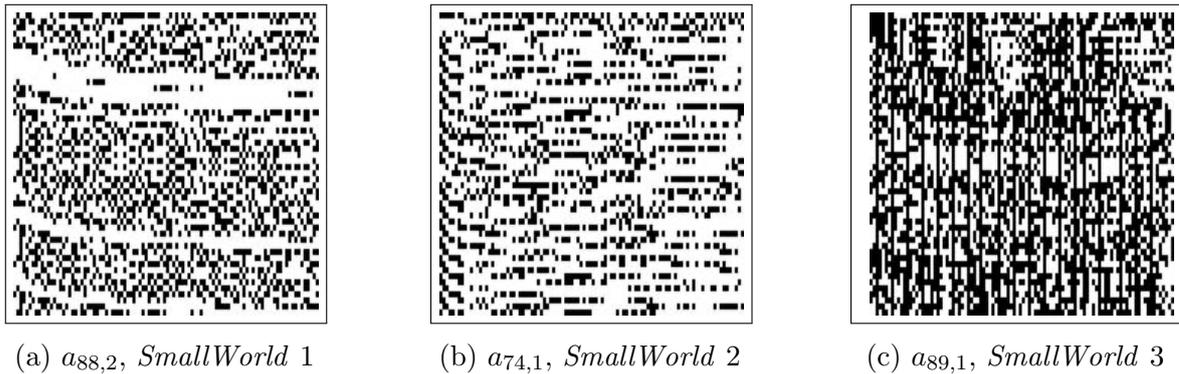


Figura 26 – Exemplo de diagramas com  $a_{i,j} = 3$

Ainda pode acontecer que ao analisar o diagrama da regra  $i$  na configuração de reticulado  $j$  o comportamento apresente uma mistura de estruturas ordenadas e aleatórias, onde estruturas locais são produzidas, porém interagem umas com as outras de maneira complicada, nesse caso tem-se  $a_{i,j} = 4$ . A Figura 27 ilustra três exemplos desse comportamento.

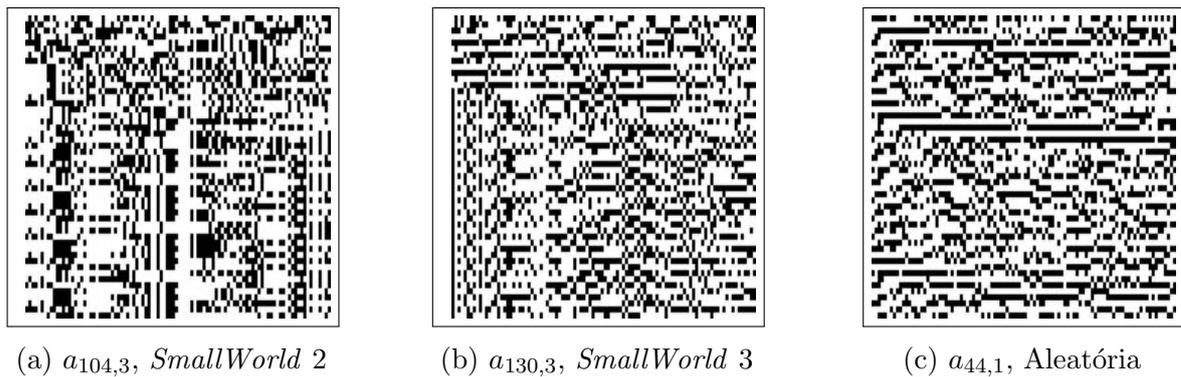


Figura 27 – Exemplo de diagramas com  $a_{i,j} = 4$

Considerando esses comportamentos foi produzido uma matriz  $A_i$  para cada rede. Nessa etapa então foi preciso inferir uma classe  $x_i$  segundo  $a_{i,1}$ ,  $a_{i,2}$  e  $a_{i,3}$ . Para obter para cada rede na regra  $i$  foi então feito a moda  $x(a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})$  entre os três diagramas de cada regra:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \vdots & & \\ a_{255,1} & a_{255,2} & a_{255,3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{moda}} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{255} \end{pmatrix}$$

Segundo Morettin (2015), a moda entre três valores pode trazer valores inconclusivos, por exemplo no caso da moda  $x(1,2,3)$ , que ocorre empate de frequência, gerando uma análise inconclusiva. Então na produção de cada matriz  $X_i$  referente a moda foi preciso fazer a próxima etapa, a fase de Tratamento de Exceções.

### 3.3 Fase de Tratamento de Exceções

Nessa fase foram corrigidos os resultados em que ocorreram empates na classificação (resultados inconclusivos) de cada rede  $i$  da etapa anterior. Para cada exceção foi plotado um novo diagrama espaço-temporal com uma quarta configuração inicial de reticulado. Após a plotagem, esses diagramas foram classificados e novamente feito a moda entre quatro valores, as três classificações referentes aos diagramas anteriores e também a classificação do novo diagrama. Essa fase produziu a Tabela 3.

Tabela 3 – Tratamento das exceções

Rede	Regra	Final
SmallWorld 1	118	3.
SmallWorld 1	229	3.
SmallWorld 2	155	2.
SmallWorld 2	159	1.
SmallWorld 3	152	2.
SmallWorld 3	183	1.
Aleatória	183	2.

Na tabela cada linha representa uma exceção onde a moda calculada na etapa de análise foi inconclusiva, na coluna Final está descrito o resultado da moda dessa etapa. A partir desse tratamento, todas as regras nas quatro redes apresentaram uma classificação quanto ao comportamento, concluindo essa etapa do trabalho.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O principal resultado desse trabalho consiste na classificação dinâmica das regras de Autômatos Celulares Elementares quando aplicadas às redes *SmallWorld* e à rede aleatória, selecionadas conforme indicado na Seção 3.1. A discussão dos resultados levará em consideração a classificação das regras elementares proposta por Wolfram (1994). Nesse contexto o gráfico da Figura 28 ilustra o percentual de regras por classe no Autômato Celular Elementar. Esse gráfico será usado para fins de comparação com os resultados desse trabalho.

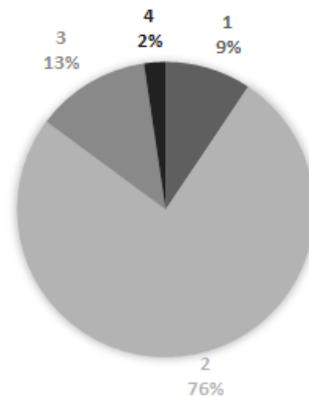


Figura 28 – Percentual de regras por classe no Autômato Celular Elementar

Fonte: Wolfram (1994)

No gráfico da Figura 28 observa-se que no Autômato Celular Elementar proposto por Wolfram (1994), as regras com comportamento heterogêneas ou periódicas (classe 2) são mais numerosas, compondo 76% das 255 regras, enquanto que as regras da classe 4 são as mais raras. As modificações na estrutura regular, na forma de Rede *SmallWorld* e Rede Aleatória, produziram um percentual diferente para as classes, isso será discutido nessa sessão.

Ao analisar os diagramas das redes *SmallWorld* e Aleatória e comparar sua classificação com o Autômato Celular Elementar nota-se que além das regras 255 e 0, outras 101 regras tiveram a mesma classificação vista no Autômato Celular Elementar. A listagem completa, indicando os números das regras e a sua manutenção (ou não) na mesma classificação, pode ser visualizada no Apêndice D.

Para exemplificar, a Figura 29 e 30 ilustramos diagramas obtidos para as regras 8 e 131, respectivamente. Essas regras não mudaram o comportamento observado em Wolfram (1994) mesmo alterando a estrutura do Autômato Celular para as redes investigadas nesse trabalho.

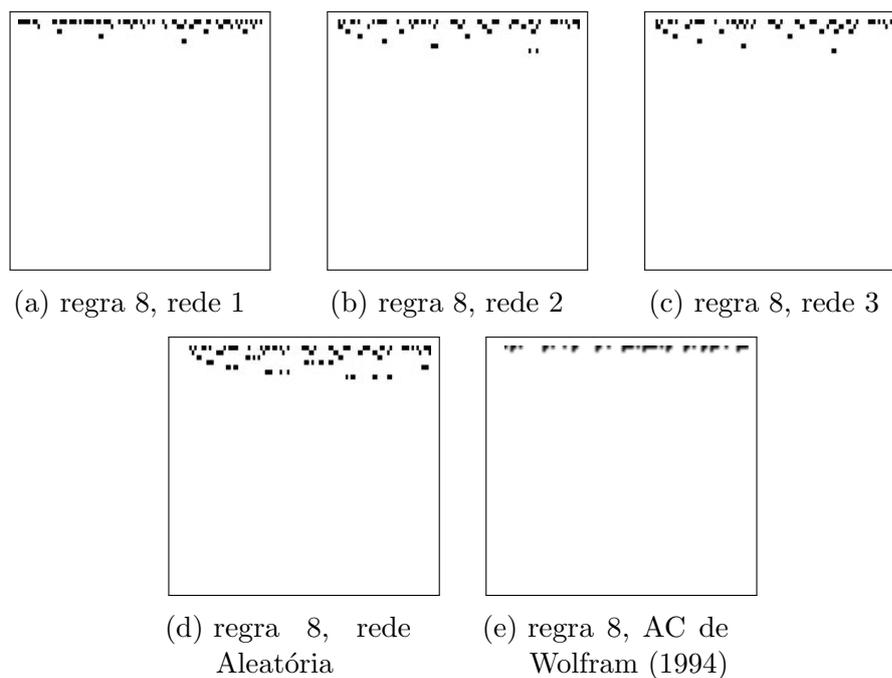


Figura 29 – A regra 8 foi classificada como 1 nas três redes *SmallWorld* e na rede Aleatória. No Autômato Celular de Wolfram (1994) essa regra pertence à classe 1

Fonte: O próprio autor

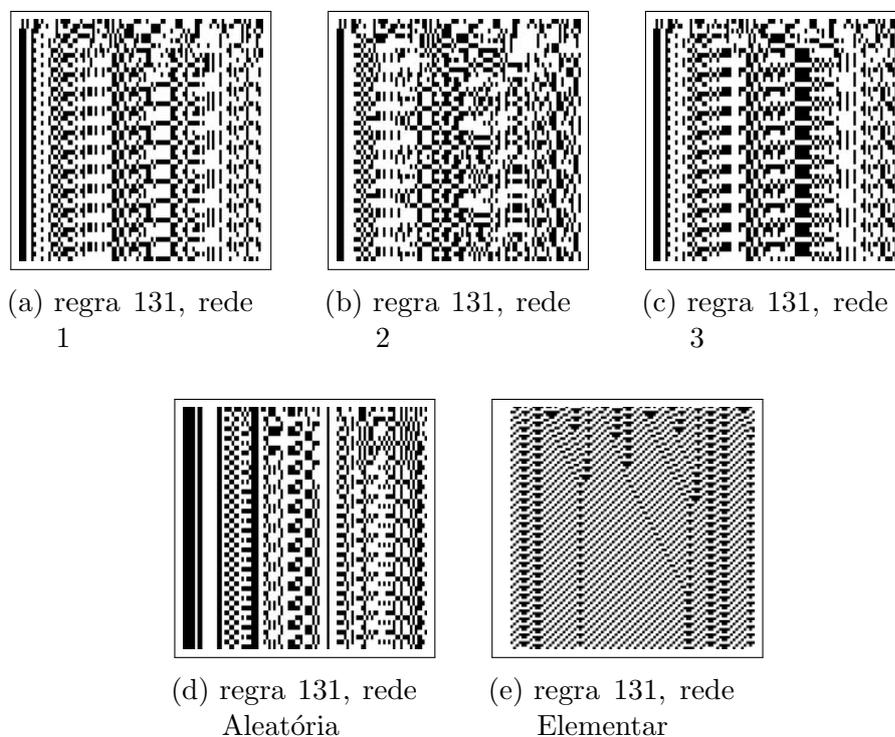


Figura 30 – A regra 131 foi classificada como 2 nas três redes *SmallWorld* e na rede Aleatória. No Autômato Celular de Wolfram (1994) essa regra pertence à classe 2

Fonte: O próprio autor

Todas as demais regras (156 regras) mudaram seu comportamento ao alterar o Autômato Celular Elementar para as quatro redes estudadas. A Figura 31 exemplifica isso, diagramando o comportamento da regra 130 sobre as redes estudadas, na rede *SmallWorld* 1 a regra pertence a classe 2 (Figura 31a), porém na rede *SmallWorld* 2 e na Aleatória se comporta como classe 3 (Figura 31b e Figura 31d, respectivamente). Essa mesma regra quando alterado a estrutura elementar para a rede *SmallWorld* 3, foi classificada como classe 4.

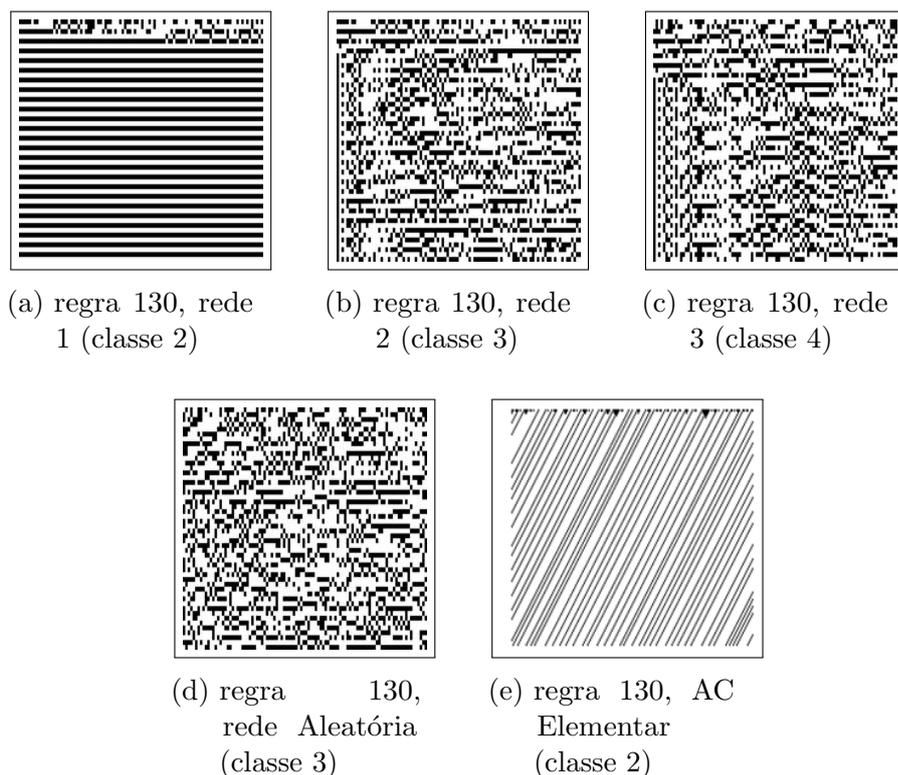


Figura 31 – A regra 131 foi classificada como 2 nas três redes *SmallWorld* e na rede Aleatória, essa regra no Autômato Celular de Wolfram (1994) é da classe 2

#### 4.1 Redes *SmallWorld*

A classificação das três redes *SmallWorld* está presente nesse trabalho no Apêndice B em forma de tabela. A Figura 32 ilustra o total de regras de cada rede *SmallWorld* segundo as quatro classes de Wolfram. Na rede *SmallWorld* 1 a porcentagem de regras da classe 1 dobrou ao alterar a estrutura regular para *SmallWorld*, e houve também uma queda na quantidade de regras classificadas como Complexas (classe 4).

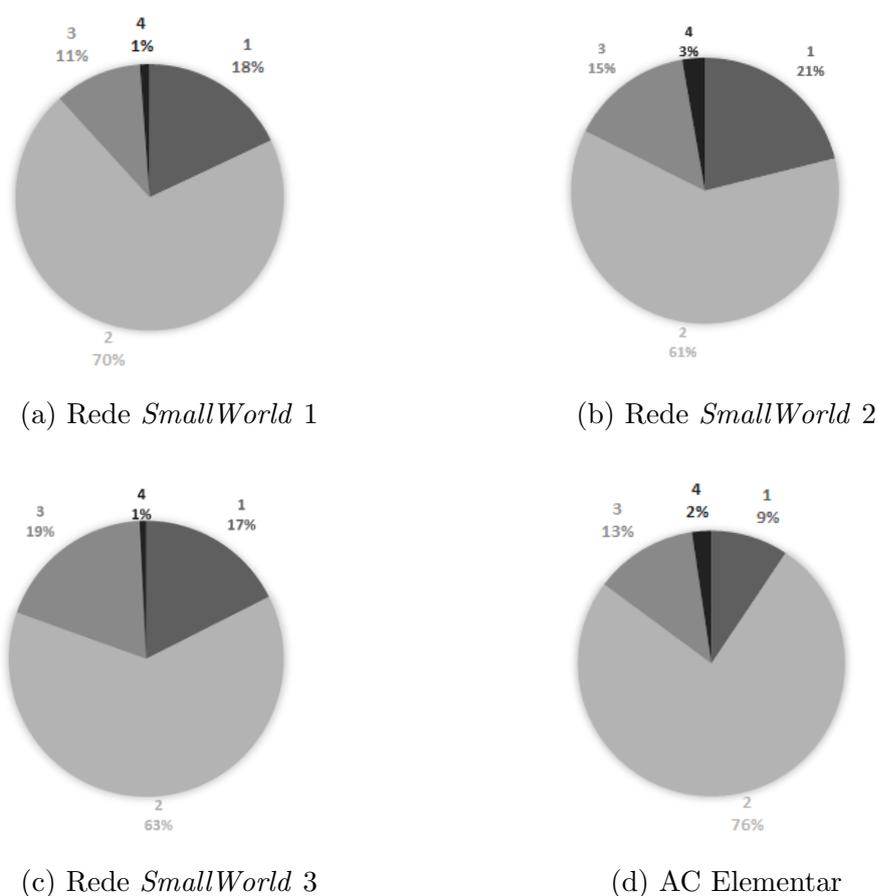


Figura 32 – Percentual de regras segundo a classe para cada rede *SmallWorld* e percentual para o Autômato Celular Elementar

Na área de Segurança da Informação, mais precisamente na Destruição de Dados Sensíveis, segundo Bergren (2005), muitos acreditam que quando a informação é excluída, ela é permanentemente apagada. No entanto, até que setores de um disco rígido sejam reutilizados para armazenamento de dados subsequente, se foi aplicado um comando de cancelamento de exclusão simples ou cancelamento de exclusão existem softwares que restauram facilmente os dados.

Nesse sentido, segundo Wolfram (1994), regras da classe 1 evoluem para um único estado homogêneo, no qual todas as células têm o mesmo valor, logo sua evolução destrói completamente qualquer informação sobre o estado inicial. Portanto a maior variedade de regras da classe 1, obtida como efeito da mudança na estrutura do Autômato Celular Elementar para Rede de Autômato Celular do tipo *SmallWorld*, pode produzir modelos de destruição lógica de dados.

Continuando a análise dos resultados apresentados na Figura 32, houve uma alta na quantidade de regras da classe 1, de forma que a porcentagem de regras da classe 1 mais que dobrou ao alterar a estrutura regular. Diferente da rede *SmallWorld* 1, na rede 2 houve um aumento na quantidade de regras do tipo 4, ou seja, do tipo Complexas. Na

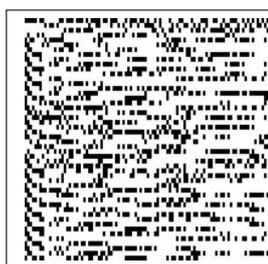
Rede *SmallWorld* 3, assim como as demais, houve uma alta na quantidade de regras da classe 1, porém houve mais regras classificadas com comportamento randômico (classe 3).

Segundo Wolfram (1994), no Autômato Celular Elementar, algumas regras pertencentes a classe 3 apresentam o surgimento de elementos triangulares que parecem ser regulares, como pode ser observado na 34. Entretanto, no experimento com as Redes *SmallWorld* não foi encontrado nenhum diagrama espaço-temporal com esses padrões.

Contudo, em alguns diagramas, nota-se um comportamento mais complicado e em muitos aspectos randômico, por isso as regras com o diagrama espaço-temporal como da Figura 33 foram classificadas como Caóticas.



(a) regra 88, rede 1



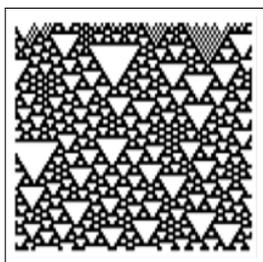
(b) regra 74, rede 2



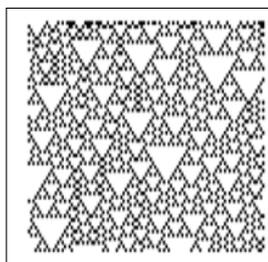
(c) regra 89, rede 3

Figura 33 – Exemplo de regras classificadas como aleatórias nas três redes do tipo *SmallWorld*

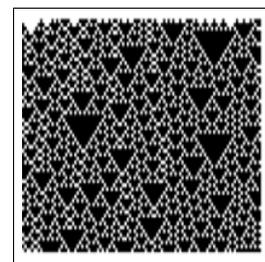
Fonte: O próprio autor



(a) regra 122



(b) regra 182



(c) regra 254

Figura 34 – Exemplo de regras classificadas como aleatórias no Autômato Celular Elementar

Fonte: Wolfram (1994)

## 4.2 Rede Aleatória

Nesse trabalho os resultados da classificação de cada uma das regras aplicadas à rede aleatória se encontram no apêndice C. Diferente das redes *SmallWorld*, na rede Aleatória houve uma alta na quantidade de regras da classe 3, regras do tipo Caóticas. A porcentagem de regras da classe 1 aumentou, mas não tão significativamente, como nas redes *SmallWorld*. Esses dados são ilustrados na Figura 35.

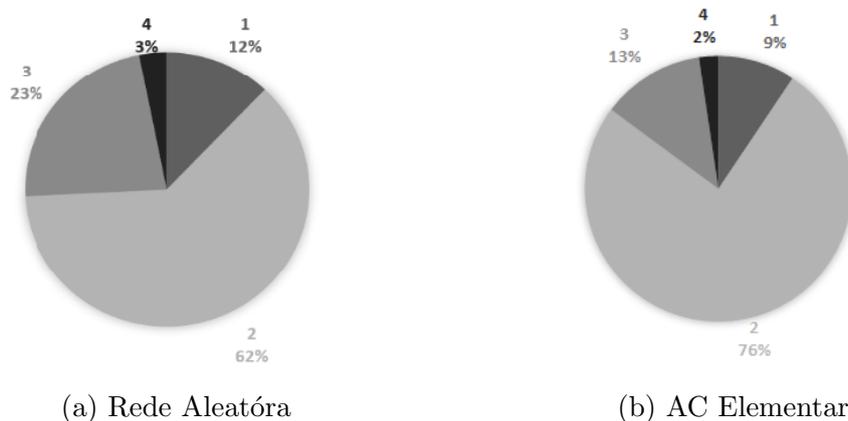


Figura 35 – Percentual de regras por classe na Rede Aleatória e percentual para o Autômato Celular Elementar

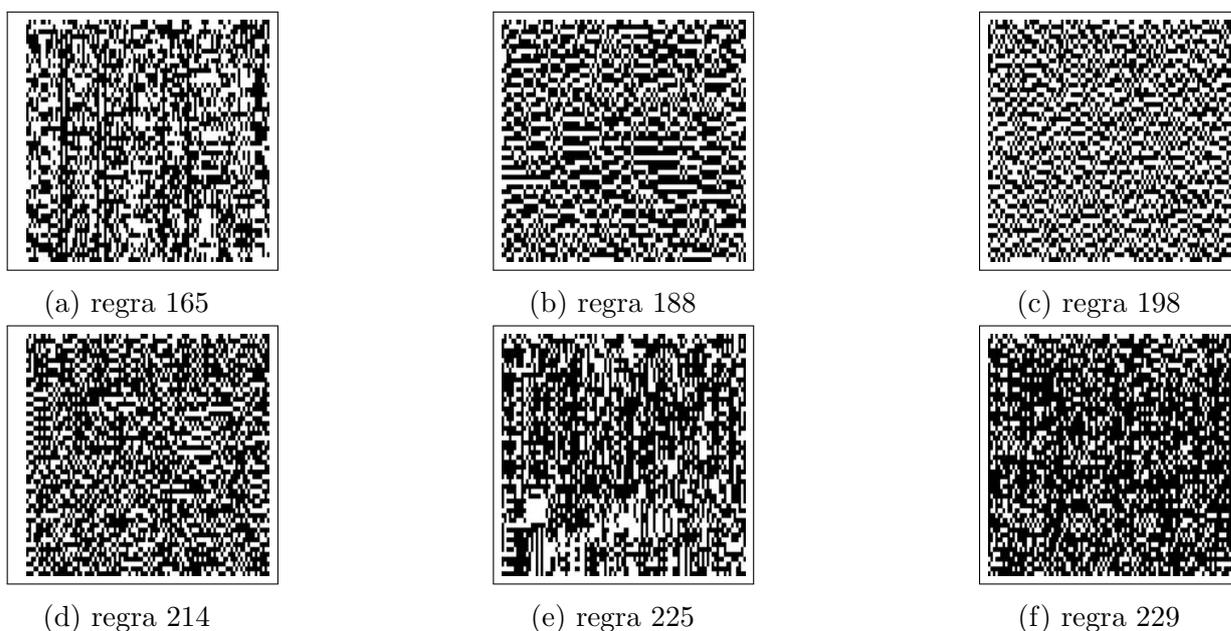


Figura 36 – Exemplos de diagramas de regras classificadas como Caóticas para a Rede Aleatória

Assim como no experimento com as Redes *SmallWorld*, na rede Aleatória não foi encontrado nenhum diagrama espaço-temporal com padrões triangulares, a Figura 36 ilustra esse comportamento. Contudo, devido ao comportamento aleatório obtido pela evolução dessas regras, é mais adequado classificá-las como pertencete a classe 3.

Considerando a alta no número de regras caóticas nesse experimento, a mudança da estrutura regular do Autômato Celular de Wolfram para Rede de Autômato Celular do tipo Aleatória pode ser interessante para aplicações que utilizam regras desse tipo.

As regras da classe 3 são empregadas em diversos sistemas criptográficos, devido a sua sensibilidade às configurações iniciais (WOLFRAM, 1986). Alguns exemplos de

trabalhos que se utilizam dessa classe de Autômato Celular são Oliveira et al. (2010), Oliveira, Coelho e Monteiro (2004) e Gutowitz (1996).

A classe 3 no Autômato Celular Elementar é também material de estudo para a investigação na área de Linguagens Formais e Autômatos, pois segundo Wolfram (1994), há evidências de que as regras caóticas parecem corresponder a classe de Linguagens Sensíveis ao Contexto. Devido a alta na quantidade de regras classificadas como caóticas, esse trabalho pode trazer ainda mais evidências para a investigação sobre esse tema.

## 5 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi apresentado e discutido a classificação das regras do Autômato Celular Elementar quando alterado sua estrutura para redes do tipo *SmallWorld*. Primeiramente, foram gerados os 3072 diagramas espaço-temporal para cada uma das três redes *SmallWorld* estudadas e para a rede Aleatória, depois foi feita a classificação manual de cada diagrama. Para cada regra em todas as redes analisadas foi feita a moda entre diagramas das configurações iniciais 1,2 e 3 de reticulado e então tratadas as exceções nos casos em que a moda resultou em resultados inconclusivos.

Depois disso, foi produzida a classificação das regras do Autômato celular quando alterado sua estrutura para as três redes *SmallWorld* (Apêndice B) e rede Aleatória (Apêndice C). A partir da classificação produzida foram discutidos os impactos da mudança da estrutura do Autômato Celular Elementar para as redes apresentadas. É importante destacar que a mudança na estrutura regular permite alcançar maior variabilidade de comportamento produzidas pelas regras de transição.

No Autômato Celular Elementar existem somente 32 regras da classe 3, que foram classificadas por Wolfram (1994), e que estão tabeladas neste trabalho no Apêndice A. Diante disso, as aplicações que utilizam de regras pertencentes a essa classe, como Gutowitz (1996), Oliveira et al. (2010) e Oliveira, Coelho e Monteiro (2004) estavam limitadas a essas 32 regras. Através da alteração na estrutura elementar para as redes vistas nesse trabalho é possível ter mais regras da classe 3. O mesmo acontece com regras da classe 1 que tiveram aumento ao alterar sua estrutura para as redes *SmallWorld*, a alteração produziu maior variabilidade que pode ser útil para aplicações que utilizam regras desse tipo, como na Destrução de Dados Sensíveis.

Em virtude do que foi mencionado, apesar da variabilidade de comportamento produzido no experimento, este trabalho considerou apenas três redes *SmallWorld* e uma rede Aleatória, ao adotar a estrutura de rede existem muito mais redes a serem aplicadas sobre a estrutura do Autômato Celular de Wolfram (1994). Como mostrado na seção 3, em um reticulado de 100 células podem ser analisadas até  $1,33 \cdot 10^{399}$  redes diferentes e essa quantidade de redes pode aumentar considerando um reticulado maior de células.

Considerando uma única configuração inicial de reticulado, devido a grande quantidade de redes possíveis é necessário o refinamento do problema para redes específicas como as Redes *SmallWorld*. Outro ponto dessa alteração na estrutura de Wolfram (1994) é que a classificação das regras de transição das quatro redes produziu 3072 diagramas espaço-temporal, como apresentado na seção 3.

A classificação foi feita manualmente observando o comportamento de cada diagrama, o número de diagramas poderia ter sido ainda maior ao adotar mais configurações iniciais de reticulado, isso iria concretizar uma dificuldade para o processo manual de

classificação. A seção a seguir apresenta sugestões de trabalhos futuros com o objetivo de encorajar a continuidade do trabalho desenvolvido.

### 5.1 Trabalhos Futuros

Em relação a trabalhos futuros este trabalho fornece algumas opções no que diz respeito a modificação na estrutura do Autômato Celular Elementar para redes do tipo *SmallWorld*. Recomenda-se estudar e aprimorar o processo de classificação dos diagramas espaço-temporal das Redes de Autômato Celular. Uma outra sugestão é explorar uma amostra maior de redes *SmallWorld* e fazer a sua classificação.

Outra pesquisa possível é examinar a afirmação de que as regras quando alterada a estrutura elementar para redes do tipo *SmallWorld* são capazes de realizar computação universal (Turing universal). Como visto na seção 4, recomenda-se investigar as regras da classe 3, pois podem ser evidências para a investigação em Linguagens Formais e Autômatos.

Os Autômatos Celulares, segundo Wolfram (1986), podem ser aplicados na modelagem de sistemas termodinâmicos, outra área de pesquisa é investigar se as Redes de Autômato Celular do tipo *SmallWorld* podem ser utilizadas em modelagens desses sistemas físicos. Aplicações, como em Gutowitz (1996), na área da criptografia se utilizam de regras do Autômato Celular Elementar chamadas de reversíveis, como pesquisa futura vale investigar se as modificações na estrutura do AC Elementar para redes do tipo *SmallWorld* produz regras reversíveis.

Por fim, sugere-se analisar problemas os quais foram empregados Autômatos Celulares, como o problema da tarefa de classificação de densidade, que é o problema de encontrar regras de autômato celular unidimensional que realizem com precisão a votação por maioria. A sugestão é utilizar o modelo com estrutura de rede *SmallWorld*.

## Apêndices

**APÊNDICE A – Tabelas de classificação do Autômato Celular Elementar de Wolfram**

Tabela 4 – Classificação do Autômato Celular Elementar de Wolfram (1994)

Classe	Regras
1	0,8,32,40,64,96,128,136,160,168,192,224,234,235,238,239, 248,249,250,251,252,253,254,255
2	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21,23,24,25,26,27,28,29,31,33, 34,35,36,37,38,39,41,42,43,44,46,47,48,49,50,51,52,53,55, 56,57,58,59,61,62,63,65,66,67,68,69,70,71,72,74,76,77,78, 79,80,81,82,83,84,85,87,88,91,92,93,94,95,97,98,99,100, 103,104,107,108,111,112,113,114,115,116,117,118,119,121, 123,125,127,130,131,132,133,134,138,139,140,141,142,143, 144,145,148,152,154,155,156,157,158,159,162,163,164,166, 167,170,171,172,173,174,175,176,177,178,179,180,181,184, 185,186,187,188,189,190,191,194,196,197,198,199,200,201, 202,203,204,205,206,207,208,209,210,211,212,213,214, 215,216,217,218,219,220,221,222,223,226,227,228,229,230, 231,232,233,236,237,240,241,242,243,244,245,246,247
3	18,22,30,45,60,73,75,86,89,90,101,102,105,106,109,120,122, 126,129,135,146,149,150,151,153,161,165,169,182,183,195,225
4	54,110,124,137,147,193

**APÊNDICE B – Tabelas de classificação das Redes *SmallWorld***

Tabela 5 – Classificação da Rede *SmallWorld* 1

Classe	Regras
1	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21,22,23,72,73,79,95, 109,111,127,135,143,151,159,175,199, 207,215,223,237,239,245,247,253,255
2	24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38, 39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53, 54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68, 69,70,71,74,75,76,77,78,80,81,82,83,84,85,87, 88,90,91,92,93,94,96,98,99,102,103,106,107, 112,113,114,115,116,117,119,120,121,122,123, 125,128,129,130,131,132,133,136,138,139,140,141, 142,144,146,147,152,153,155,157,160,161,162,163, 164,167,168,169,170,171,172,174,176,177,178,179, 180,181,182,183,184,185,186,187,188,189,190,191, 192,193,194,195,196,197,200,202,203,204,205,206, 208,209,210,211,212,213,216,218,219,220,221,222, 224,225,226, 227,228,231,232,233,234,235,236,238, 240,241,242,243,244,246,248,249,250,251,252,254
3	86,89,97,100,101,104,105,108,110,118, 124,134,145,148,149,150,154,156,158, 165,166,173,198,201,214,217,229
4	126,137,230

Tabela 6 – Classificação da Rede *SmallWorld* 2

Classe	Regras
1	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16, 17,18,19,20,21,22,23,64,65,68,69,70,79,80, 81,83,84,85,111,135,143,159,167,175,207,211, 213,215,219,221,223,239,245,247,249,253,255
2	24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37, 38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51, 52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,66,67, 71,72,73,74,75,76,77,78, 82,87,89,91,92,93, 95,96,98,99,103,107,112,113,114,115,116, 117,118,119,121,122,123,125,126,127,128, 129, 131,132,136,138,139,140,141,142,144, 145,146,147,151,152,155,157,160,161,162, 163,168, 170,171,172,174,176,177,178,180, 181,183,184,185,186,188,189,191,192,193, 194,195,196, 199,200,202,203,204,205,206, 208,209,210,212,216,217,220,222,224,226, 227,228,231,232, 234,235,236,237,238,240, 241,242,243,244,246,248,250,251,252,254
3	86,88,90,94,100,101,102,105,106,108,109,110, 120,124,130,133,134,137,148,149,150,154,156, 158,164,165,166,169,190,197,198,201,214,218,225,229, 230,233
4	97,104,153,173,179,182,187

Tabela 7 – Classificação da Rede *SmallWorld* 3

Classe	Regras
1	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21,22,23,79,82,135,151, 183,209,211,213,215,217,219,221,223,241, 243,245,247,249,251,253,255
2	24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39, 40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55, 56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71, 72,73,75,76,77,78,80,81,83,84,85,87,91,93,95,96, 97,98,99,103,107,111,112,113,114,115,116,117,118, 119,121,122,123,125,127,128,131,132,136,137,138, 139,140,141,142,143,144,146,147,152,155,159,160, 161,162,163,167,168,171,172,174,175,176,177,178, 180,181,182,184,185,186,188,189,190,191,192,193, 194,195,196,199,200,202,203,204,205,206,207,208, 210,212,216,220,222,224,226,227,228,231,232,234, 235,236,237,239,240,242,244,246,248,250,252,254
3	74,86,88,89,90,92,94,100,101,102,104,106,108,109,110, 120,124,126,129,133,134,145,148,149,150,153,154,156, 157,158,164,165,166,169,170,173,179,187,197,198,201, 214,218,225,229,230,233,238
4	105,130

## APÊNDICE C – Tabelas de classificação da Rede Aleatória

Tabela 8 – Classificação da Rede Aleatória

Classe	Regras
1	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14, 15,16,17,18,20,21,22,79,82,95,111,215, 223,245,253,255
2	19,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36, 37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51, 52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66, 67,68,69,70,71,75,76,77,80,81,83,84,85,86,87, 91,93,96,97,98,99,107,112,113,114,115,116,117, 118,119,120,123,125,127,128,131,132,135,138,139, 140,142,143,147,151,155,159,160,161,162,163,167, 168,171,172,174,175,176,177,178,179,181,183,184, 185,186,187,189,191,192,195,196,200,202,203,204, 206,207,208,209,211,212,213,216,217,219,220,221, 222,224,226,227,228,230,231,232,233,234,235,236, 237,238,240,241,242,243,244,247,248,249,250,251, 252,254
3	72,73,74,88,89,90,92,94,101,102,104,105,106, 108,109,110,122,124,126,129,130,133,134,136, 137,145,146,148,149,150,152,153,154,156,158,164, 165,166,169,173,180,182,188,190,193,194,197,198,199, 201,205,210,214,218,225,229,239,246
4	78,100,103,121,141,144,157,170

## APÊNDICE D – Regras que mantiveram e que não mantiveram a classificação

Tabela 9 – Nessa tabela, na primeira linha, regras que mantiveram a mesma classe do Autômato Celular Elementar, e na segunda linha regras que não mantiveram a classe observada no Autômato Celular Elementar durante o experimento.

Classificação	Regras
mantiveram a classe	0,8,24,25,26,27,28,29,31,33,34,35,36,37,38,39,41,42,43,44,46, 47,48,49,50,51,52,53,55,56,57,58,59,61,62,63,66, 67,71,76,77,87,91,93,98,99,101,107,112,113,114, 115,116,117,119,123,125,131,132,138,139,140,142,149,150, 155,162,163,165,171,172,174,176,177,178,181,184,185,186, 189,191,196,200,202,203,204,206,208,212,216,220,222,226, 227,228,231,232,236,240,242,244,253,255
Não Mantiveram a classe	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,30,32,40, 45,54,60,64,65,68,69,70,72,73,74,75,78,79,80,81,82,83,84,85, 86,88,89,90,92,94,95,96,97,100,102,103,104,105,106,108,109,110, 111,118,120,121,122,124,126,127,128,129,130,133,134,135,136,137, 141,143,144,145,146,147,148,151,152,153,154,156,157, 158,159,160,161,164,166,167,168,169,170,173,175, 179,180,182,183,187,188,190,192,193,194,195,197,198,199, 201,205,207,209,210,211,213,214,215,217,218,219,221,223, 224,225,229,230,233,234,235,237,238,239,241,243,245,246, 247,248,249,250,251,252,254

## Referências

- AYER, V.; MIGUEZ, S.; TOBY, B. Why scientists should learn to program in python. **Powder Diffraction**, v. 29, p. S48–D64, 12 2014. Citado na página 18.
- BAR-YAM, Y.; MCKAY, S.; CHRISTIAN, W. Dynamics of complex systems (studies in nonlinearity). **Computers in Physics**, v. 12, p. 335, 07 1998. Citado na página 1.
- BERGREN, M. Data destruction. **The Journal of school nursing : the official publication of the National Association of School Nurses**, v. 21, p. 243–6, 09 2005. Citado na página 27.
- CHEN, Y. et al. Academic insights and perspectives: Cellular automata and production scheduling. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2020, p. 1–15, 08 2020. Citado na página 2.
- EBEL, H.; DAVIDSEN, J.; BORNHOLDT, S. Dynamics of social networks. **Complexity**, v. 8, p. 24–27, 01 2003. Citado na página 2.
- ENGELEN, G. et al. Using cellular automata for integrated modelling of socio-environmental systems. **Environmental Monitoring and Assessment**, v. 34, p. 203–214, 01 1995. Citado na página 11.
- FOURRATE, K.; LOULIDI, M. Disordered cellular automata traffic flow models. 06 2020. Citado na página 2.
- FRISCH, U.; HASSLACHER, B.; POMEAU, Y. Lattice-gas automata for the navier-stokes equation. **Physical review letters**, v. 56, p. 1505–1508, 05 1986. Citado na página 2.
- GREMONINI, L.; VICENTINI, E. Automatos celulares: revisao bibliografica e exemplos de implementacoes. **Revista Eletronica Lato Sensu – UNICENTRO**, v. 6, 01 2008. Citado na página 1.
- GUTOWITZ, H. Cryptography with dynamical systems. 08 1996. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 32.
- HERNANDEZ G. E HERRMANN, J. Cellular automata for elementary image enhancement. **Graphical Models and Image Processing**, ScienceDirect, v. 1, n. 1, 1996. Citado na página 1.
- LUVALLE, B. The effects of boundary conditions on cellular automata. **Complex Systems**, v. 28, p. 97–124, 03 2019. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.
- MELOTTI, G. **Aplicação de Autômatos Celulares em Sistemas Complexos : Um Estudo de Caso em Espalhamento de Epidemias**. 116 p. Tese (Doutorado), 02 2009. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 4.
- MORETTIN, P. **Basic Statistics (Estatística Basica, in Portuguese)**. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 23.
- OLIVEIRA, G.; COELHO, A.; MONTEIRO, L. Cellular automata cryptographic model based on bidirectional toggle rules. **International Journal of Modern Physics C - IJMPC**, v. 15, p. 1061–1068, 10 2004. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

OLIVEIRA, G. et al. Secret key specification for a variable-length cryptographic cellular automata model. In: . [S.l.: s.n.], 2010. p. 381–390. ISBN 978-3-642-15870-4. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

OLIVEIRA, G. M. B. Autômatos celulares: aspectos dinâmicos e computacionais. **III Jornada de Mini-cursos em Inteligência Artificial**, Sociedade Brasileira de Computação, v. 1, n. 8, p. 297–345, 2003. Citado na página 8.

SANTOS LUIZ FELIPE RAMOS TURCI, R. M. A. Everton dos. Avaliação de modelo probabilístico de propagação de incêndios florestais utilizando autômatos celulares aplicado a pequenas áreas. **Ciencia Florestal**, SciELO Analytics, v. 29, n. 4, 2019. Citado na página 1.

SMITH, I. A. Real-time language recognition by one-dimensional cellular automata. **Journal of Computer and System Sciences**, Journal of Computer and System Sciences, v. 6, n. 1, 1972. Citado na página 1.

TOMASSINI, M. Generalized automata networks. In: . [S.l.: s.n.], 2006. p. 14–28. Citado 7 vezes nas páginas 2, 4, 6, 7, 10, 11 e 14.

VIEIRA, E. Desenvolvimento de sistemas em tecnologia. p. 31, 01 2020. Citado na página 18.

WATTS, D. **Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness**. [S.l.: s.n.], 2018. ISBN 9780691188331. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.

WATTS, S. H. S. D. J. Collective dynamics of small world networks. p. 301–303, 01 2006. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.

WOLFRAM, S. Theory and applications of cellular automata. **World Scientific**, Elsevier, v. 1, n. 1, 1986. Citado 7 vezes nas páginas 1, 2, 8, 12, 13, 29 e 32.

WOLFRAM, S. **Universality and Complexity in Cellular Automata**. 1. ed. 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300: Westview Press, 1994. Citado 19 vezes nas páginas , 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31 e 34.

WOLFRAM, S. Cryptography with cellular automata. In: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.], 2018. p. 487–490. ISBN 9780429494093. Citado na página 2.