INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *(LATO SENSU)*
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE CIENCIAS E MATEMÁTICA

AMAURY DA COSTA FRANCO

A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Campos Belos–GO
2021

AMAURY DA COSTA FRANCO

A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado a banca examinadora do curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática como requisito parcial para a obtenção de título de Especialista.

Orientador: Prof. Ma. Valéria Batista da Silva

Campos Belos–GO
2021

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano

Franco, Amaury da Costa
F489p A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA: UMA PROPOSTA DE ENSINO / Amaury da Costa Franco; orientadora Valéria Batista da Silva. -- Campos Belos, 2021.
22 p.

Monografia (Pós-graduação Lato Sensu em em Especialização em Ciências e Matemática) -- Instituto Federal Goiano, Campus Campos Belos, 2021.

1. Proporção áurea. 2. Ensino . 3. Matemática . 4. Fotografia. 5. Instagran. I. Silva, Valéria Batista da, orient. II. Título.

Responsável: Johnathan Pereira Alves Diniz - Bibliotecário-Documentalista CRB-1 n°2376

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

Identificação da Produção Técnico-Científica

[ ] Tese
[ ] Dissertação
[X] Monografia – Especialização
[ ] TCC - Graduação
[ ] Artigo Científico
[ ] Capítulo de Livro
[ ] Livro
[ ] Trabalho Apresentado em Evento
[ ] Produto Técnico e Educacional - Tipo: ___________________________________

Nome Completo do Autor: Amaury da Costa Franco
Matrícula: 2019106301140213
Título do Trabalho: A Proporção Áurea na Fotografia: Uma Proposta de Ensino

Restrições de Acesso ao Documento

Documento confidencial: [X] Não [ ] Sim, justifique: _______________________

____

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: __/__/__
O documento está sujeito a registro de patente? [ ] Sim [X] Não
O documento pode vir a ser publicado como livro? [X] Sim [ ] Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:
1. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
2. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
3. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Campos Belos - GO, 10/08/2021.
Local Data

Amaury da Costa Franco
Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Ciente e de acordo:

Valéria Batista da Silva
Assinatura do(a) orientador(a)

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Ata nº 21/2021 - CPPGI-CB/CMPCBE/IFGOIANO

ATA DO EXAME DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO

Amaury da Costa Franco

Aos 30 dias do mês de junho do ano de 2021, às dez horas, reuniram-se os componentes da banca examinadora em sessão pública por videoconferência, para procederem a avaliação da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso intitulado como "**A Proporção Áurea na Fotografia: Uma Proposta de Ensino**". em nível de Pós-graduação *Lato Sensu*, de autoria de Amaury da Costa Franco, discente do curso de Pós-graduação *Lato Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal Goiano – Campus Campos Belos. A sessão foi aberta pelo presidente da Banca Examinadora, Prof. *Ma. Valéria Batista da Silva*, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A palavra, a seguir, foi concedida a(o) discente para, no tempo de 20 a 30 min., proceder à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu a(o) examinada(o). Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo-se em vista as normas que regulamentam o curso de Pós-graduação *Lato Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática, e procedidas às correções recomendadas, o Trabalho de Conclusão de Curso foi **APROVADO SEM RESSALVAS** , considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de Especialista em Ensino de Ciências e Matemática, pelo Instituto Federal Goiano – Campus Campos Belos. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega definitiva do TCC e cumprimento de todos os requisitos necessários, em acordo com a orientação normativa 01/2021 da Coordenação de Pesquisa, Pós-graduação e Inovação. Cumpridas as formalidades da pauta, a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de Trabalho de Conclusão de Curso, e para constar, foi lavrada a presente Ata, que, após lida e achada conforme, será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

(*Assinatura Eletronicamente*)

Valéria Batista da Silva (Presidente da banca)

(*Assinatura Eletronicamente*)

Eudes Antônio da Costa (Examinador1)

(*Assinatura Eletronicamente*)

Fabiano Rodrigues de Sousa (Examinador 2)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Fabiano Rodrigues de Sousa**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 03/07/2021 14:58:30.
- **Eudes Antonio da Costa**, **Eudes Antonio da Costa - Professor Avaliador de Banca - Instituto Federal Goiano - Campus Campos Belos (10651417001220)**, em 02/07/2021 14:05:02.
- **Valeria Batista da Silva**, **PROF ENS BAS TEC TECNOLOGICO-SUBSTITUTO** , em 01/07/2021 22:16:40.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 01/07/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 286608
Código de Autenticação: e879507917

A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Amaury da Costa Franco[1]
Valéria Batista da Silva[2]

Resumo: Este artigo realiza um estudo sobre a proporção áurea e a sugestão de uma proposta de ensino para apresentar aos estudantes da Educação Básica a esse conceito matemático. Com o objetivo de despertar a curiosidade e a atenção para as aulas de Matemática, optamos por direcionar a atividade proposta para o cotidiano utilizando a fotografia como recurso para que os estudantes percebam que é possível ver a Matemática em sua realidade. A partir da pesquisa bibliográfica conhecemos alguns pontos importantes da história da proporção áurea, a relação com a sequência de Fibonacci, a construção do retângulo áureo e a aplicação desse conceito na arte, arquitetura, no design e na fotografia. Como uma forma de vincular o estudo teórico às aulas de Matemática, propomos uma atividade de ensino que contempla tanto os aspectos teóricos quanto o cotidiano do estudante por meio da utilização de fotografias feitas pelos mesmos empregando os conceitos estudados. Para os estudantes, espera-se incentivar a visualização da Matemática no corpo humano, na natureza e em diversas áreas; para os docentes, almejamos apresentar uma maneira de abordar o conteúdo matemático com ferramentas além das que dispõe em sala de aula.
Palavras-chave: Proporção áurea. Ensino. Matemática. Fotografia. Instagram.

Abstract: This article conducts a study on the golden ratio and the suggestion of a teaching proposal to introduce Basic Education students to this mathematical concept. In order to arouse curiosity and attention to Mathematics classes, we chose to direct the proposed activity to everyday life using photography as a resource for students to realize that it is possible to see Mathematics in its reality. From the bibliographical research we know some important points in the history of the golden ratio, the relationship with the Fibonacci sequence, the construction of the golden rectangle and the application of this concept in art, architecture, design and photography. As a way to link theoretical study to Mathematics classes, we propose a teaching activity that contemplates both theoretical aspects and the student's daily life through the use of photographs made by them using the studied concepts. For students, it is expected to encourage the visualization of Mathematics in the human body, in nature and in various areas; for teachers, we aim to present a way to approach mathematical content with tools beyond those available in the classroom.
Keywords: Golden proportion. Teaching. Math. Photography. Instagram.

1 INTRODUÇÃO

O trabalho exibe um estudo sobre o número irracional que é obtido da razão entre dois segmentos. Esse número é conhecido como proporção áurea ou número de ouro. Apresentamos a proporção áurea por um breve relato histórico, bem como a definição dada por Euclides de Alexandria, mostrando a relação com a sequência de Fibonacci e a conexão que envolve as medidas de uma figura geométrica - o retângulo áureo - as definições e construção deste e, também estudamos, a espiral áurea. Percebemos como a proporção áurea exerce uma forte influência na arte, arquitetura e na atualidade com o designer e a fotografia; do mesmo modo que possibilita várias relações, inclusive, envolvendo a sequência de Fibonacci com o universo, além das abordadas neste trabalho.

[1] Aluno da Pós-Graduação *Lato Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática/IF Goiano Campus Campos Belos-GO/ amauryb.u@uft.edu.br
[2] Orientadora/IF Goiano Campus Campos Belos-GO/ valeria.batista@ifgoiano.edu.br

Para melhor compreensão do tema a ser abordado, o estudo foi estruturado em seções, que relata um histórico da proporção áurea e sua obtenção a partir da razão entre dois segmentos; a relação com a sequência de Fibonacci; a construção do retângulo áureo e a contrução deste, a partir dos números de Fibonacci; e para finalizar o referencial teórico, a partir de curiosidades a seu respeito, mostraremos sua aplicação em algumas áreas do conhecimento humano, como no designer e fotografia.

Como aplicação no ensino de toda informação teórica, elaboramos uma proposta de atividade para ser utilizada em sala de aula, em que inserimos a fotografia como elo para ensinar a proporção áurea por meio do conhecimento que a maioria dos alunos tem, que é de tirar uma foto do celular ou câmera, mostrando que conceitos matemáticos fazem parte de seu cotidiano, além de instigar o aluno a compreender a Matemática em vários afazeres em seu dia a dia.

A princípio, o objetivo da atividade seria apenas apresentar os conceitos relacionados a proporção áurea, a sequência de Fibonacci e mostrar sua utilização tendo como foco a fotografia. Porém, devido a necessidade de contextualizar a aplicação dos conteúdos ensinados aos nossos alunos nas escolas, surgiu a proposta de atividade com o intuito de ensinar os conceitos de forma diferente e interessante sem comprometer os requisitos do tema abordado. Sendo assim, a atividade aborda a fotografia vinculando-a ao conteúdo matemático que é a proporção áurea.

Sabemos que um dos principais desafios no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, é conquistar o interesse dos alunos e fazer com que possam buscar a motivação com experiências vividas no dia a dia. A abordagem do conteúdo matemático junto a situações cotidianas podem render bons resultados; e não só isso, fazer com que aqueles alunos mais dispersos, possam participar e agregar conhecimento à sua vivência.

Diante do exposto, nos propusemos a mostrar, nesta pesquisa, o estudo da proporção áurea e suas aplicações, levando em consideração que o tema na maioria das vezes não é discutido na graduação e nem faz parte do referencial curricular da Educação Básica, aparece em alguns livros de ambos os níveis de ensino. Sendo assim, o trabalho oportuniza o conhecimento de conteúdos não estudados no curso de Licenciatura em Matemática, uma compreensão e também experiência a partir da aplicação da proposta em uma sala de aula.

2 A PROPORÇÃO ÁUREA

A proporção áurea, também conhecida como o número de ouro, é muito popular entre os matemáticos e estudiosos como sendo o representante matemático da perfeição na natureza, pois aparece em quase todo lugar e principalmente, nas coisas que consideramos agradáveis aos olhos. É citado por matemáticos e estudiosos pelo fato de ter surgido cerca de 500 anos a. C. e desde então, até os dias atuais, ele vem sendo estudado. Segundo Leopoudino (2016, p.15) “conhecido desde a Antiguidade, o Número de Ouro recebeu títulos honoríficos no século XIX como número áureo, razão áurea e seção áurea; no século XVI chegou a ser chamado de Proporção Divina, [...]”, ocasionalmente, proporção áurea.

Segundo Huntley (1985, p.37),

> Sugeriu-se, no início do século atual (XX), que a letra grega ϕ a letra inicial do nome de Fídias fosse adotada para designar a razão áurea. A ubiquidade do ϕ (fi) na matemática despertou o interesse de muitos matemáticos na Idade Média e durante a Renascença. Em 1509, foi publicado um tratado de Luca Pacioli, De Divina Proportione, ilustrado por Leonardo da Vinci.

De acordo com Contador (2007, p.86) e Lívio (2008 apud Oliveira e Ferreira, 2010, p.65) a sugestão de homenagear Fídias foi do matemático americano Mark Barr (1871-1950). Embora Luca Paciole tenha publicado o livro com aplicações do número de ouro e ter o título De Divina Proporcione, segundo Huntley (1985, p.37), foi por meio de Johannes Kepler que a terminologia divina proporção, ou proporção divina foi popularizada. Dessa forma, foi tamanho o encanto que essa proporção exerceu sobre as pessoas que encontra admiradores até os dias atuais.

Conforme Lívio (2008 apud Oliveira e Ferreira, 2010, p.65),

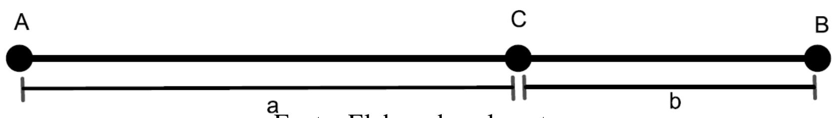
> A fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido bases de sua ubiqüidade e seu apelo. De fato, provavelmente, é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do qualquer outro número na história da matemática.

Além disso, alguns outros estudiosos acreditavam que o proporção áurea apresentasse alguma mensagem de Deus, já que está presente em distintos lugares na natureza, para Huntley (1985, p.36) “era um símbolo do universo”, afirmando ao comentar sobre o dodecaedro, que levou os gregos antigos a atribuir um significado especial, em que, suas doze faces regulares correspondia aos doze signos do zodíaco. Dessa forma, serviu de inspiração para matemáticos relevantes como Pitágoras, Euclides e pelo matemático italiano Leonardo de Pisa. Ele é muito encontrado na arte e na geometria; sua abrangência é universal, onde não se limita apenas a artes ou monumentos arquitetônicos, mas em uma grande diversidade de elementos no universo.

Segundo argumenta Lívio (2011 apud Leopoudino, 2016, p.10), “embora a descoberta deste número seja atribuída aos pitagóricos, a definição acima, que mais tarde se tornou conhecido com a razão áurea, foi dada por volta de 300 a.c., pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria (330 a.c.,-)” .

A primeira definição da proporção áurea foi dada no livro *“Os Elementos”* de Euclides de Alexandria, livro VI. Euclides nomeou-a como *“razão extrema e média”* que segundo Alonso (2017, p. 30) foi definida da seguinte forma: *“Um segmento de reta diz-se dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior do segmento é igual à razão entre o maior e o segmento todo."*

Figura 1 – Proporção Áurea representada por retas.



Fonte: Elaborada pelo autor

A proporção áurea é um número irracional, que pode ser obtido a partir da divisão de um segmento de reta $\overline{AB}$ em dois segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, de forma que o comprimento do segmento maior $\overline{AC}$ dividido pelo comprimento do segmento menor $\overline{CB}$, seja igual ao comprimento do segmento de reta completo $\overline{AB}$, dividido pelo comprimento do segmento $\overline{AC}$. Ou seja,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Neste caso, diremos que o ponto C corta o segmento $\overline{AB}$ em extrema e média razão. Mas, para isso, precisamos que $(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{CB})$ seja, nessa ordem, uma progressão geométrica. Com efeito, sejam $\overline{AC} = a$, $\overline{CB} = b$ e $\overline{AB} = a+b$. Se $(a+b,\ a,\ b)$ é uma progressão geométrica, então a razão entre termos consecutivos é constante. Assim, podemos dizer que

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}. \tag{1}$$

De (1), obtemos a equação

$$a^2 = ab + b^2 \ \Rightarrow\ a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Dividindo a equação por b^2, temos

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Então, determinar a razão entre os termos envolve resolver uma equação do segundo grau. O que chamamos de proporção áurea é a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Denotando

$$\frac{a}{b} = \phi,$$

temos

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação, obtemos que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como o número ϕ é a razão entre dois segmentos, o valor $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ não satisfaz, por se tratar de medida de comprimento. Logo,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Assim, $\phi \cong 1,6180339887498948482045868343656\ldots$. O número de ouro também é representado pela letra grega Φ (Phi).

3 FIBONACCI E A PROPORÇÃO ÁUREA

Um matemático que teve importante participação para a proporção áurea, segundo Contador (2007) foi Leonardo de Pisa ($1175-1250$), nasceu em Pisa na Itália, e também era conhecido como Leonardo Fibonacci, devido ao fato de que Fibonacci é a contração de fillius

Bonacci, que significa filho de Bonacci, pois o nome de seu pai era Guilielmo Bonacci. Inspirado por seu pai que trabalhava na Alfândega fez várias viagens ao Egito, Sicília, Grécia e Síria, assim conheceu vários matemáticos importantes e que contribuíram para o seu conhecimento. De acordo com Mol (2013, p. 78), "Fibonacci é hoje, no entanto, mais conhecido pela chamada Sequência de Fibonacci, apresentada no Liber Abaci como resposta para um problema envolvendo o crescimento de uma população de coelhos", que é enunciado da seguinte maneira:

Uma população de coelhos cresce de acordo com o seguinte modelo:

- no primeiro mês há apenas um casal de coelhos;
- os casais se reproduzem apenas no segundo mês de vida;
- todo mês, cada casal com pelo menos dois meses de vida tem um casal de filhos;
- os coelhos nunca morrem.

Assim, se f_n é o número de casais no início mês n, obtemos, de maneira recursiva,

$$F_n = \begin{cases} \mathrm{F}_1 = F_2 = 1 \\ \mathrm{F}_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2. \end{cases}.$$

Os primeiros números dessa sequência são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... e seus termos têm diversas propriedades interessantes. Por exemplo, dois termos consecutivos são sempre relativamente primos e o $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ é a razão áurea $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Em outras palavras, a razão entre dois números consecutivos de Fibonacci, aproxima-se cada vez mais de ϕ, à medida que n aumenta. Ou seja,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \cong 1,618\cdots$$

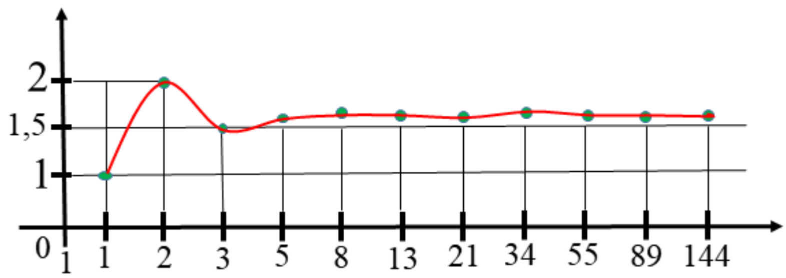
Note que, a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos oscila de 1 a 2 inicialmente, e converge para o valor do número de ouro, o que podemos ver na tabela abaixo.

$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$	$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,666\ldots$
$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$	$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625$	$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1615\ldots$	$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1,619\ldots$
$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1,617\ldots$	$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1,618\ldots$	$\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} = 1,617\ldots$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor

A partir do quarto termo da sequência de Fibonacci, temos a convergência dessa oscilação apresentada na Figura 2.

Figura 2 – Taxa da razão entre dois números consecutivos de Fibonacci.



Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo Oliveira (2013), a relação que acabamos de verificar acima foi dada em 1611 pelo famoso astrônomo alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), porém em 1753, ou seja, mais de cem anos mais tarde, o matemático escocês Robert Simson (1687 – 1768) comprovou-a.

4 O RETÂNGULO ÁUREO

Depois da formulação da *razão extrema e média*, feita por Euclides, mais tarde, Eudoxus de Cnidus (matemático grego que viveu em aproximadamente 408 a 355 a.C,) estudou, segundo Martins (2008), a teoria das proporções e descobriu as propriedades de um retângulo, que mais tarde ficaria conhecido como *retângulo áureo*, ou *retângulo de ouro*.

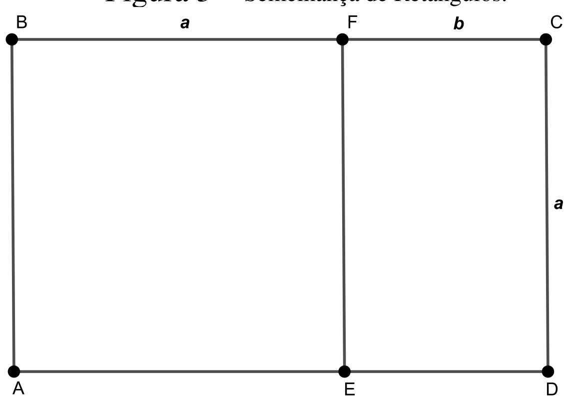
O retângulo áureo é o objeto que, segundo os estudiosos, exerceu e que ainda exerce tamanho prestígio por sua regularidade e harmonia. Este retângulo é utilizado como base para várias áreas do conhecimento humano, como a arquitetura, artes e também é encontrado na natureza por meio da sequência de Fibonacci. No retângulo de ouro, a razão entre seu lado maior e seu lado menor resulta no número ϕ.

O retângulo áureo está inteiramente associado à divisão áurea, ou seja, a *divisão em média e extrema razão* (Ávila, 2018). Sendo assim, o retângulo é apenas uma das formas de se usar a divisão áurea.

4.1 CONSTRUÇÃO DE UM RETÂNGULO ÁUREO

Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo $ABCD$, Figura 3, com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como $ABFE$, o retângulo restante, $CFED$, será semelhante ao retângulo original.

Figura 3 – Semelhança de Retângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor

Se $a+b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição de retângulo áureo se traduz em

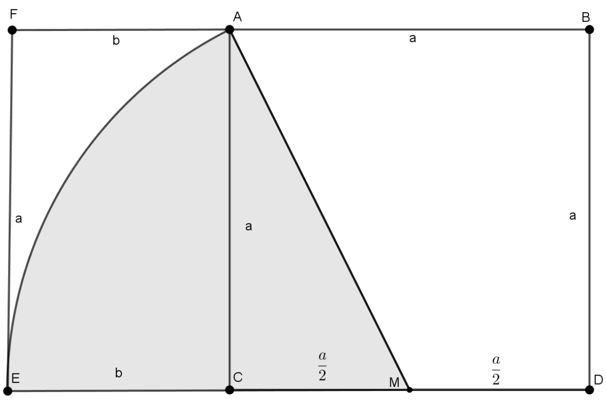
$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}.$$

A partir de um quadrado qualquer, determinaremos um retângulo de ouro. E desta forma, vamos elencar alguns pontos:

- Considere um quadrado $ABCD$ e no segmento $\overline{CD}$ tome M o seu ponto médio. Assim, $\overline{CM} = \overline{MD}$;
- Em seguida, trace o segmento $\overline{AM}$;
- Com o compasso fixado no ponto M, trace o arco de comprimento $\overline{MA}$. Denote por E a interseção desse arco com a semireta que contém MC;
- Trace por E um segmento de reta perpendicular à base do quadrado (a reta CD). Depois, denote por F a interseção dessa reta com a semireta S_{BA};

Dessa forma, podemos observar todos os caminhos tomados, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Retângulo Áureo.



Fonte: Elaborada pelo autor

Afirmamos que o retângulo obtido é um retângulo áureo. De fato, para verificar se o retângulo $BEFD$ é de fato áureo, observe que, por construção,

$$\overline{MA} = \overline{ME} = \frac{a}{2} + b.$$

Utilizando o Teorema de Pitagoras no triângulo MAC, temos

$$\left(b+\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

Assim,

$$b^2 + ab = a^2 \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

Logo, $EFBD$ é Áureo. Note que as equações (1) e (2) são iguais, ou seja, obtemos o Número de Ouro.

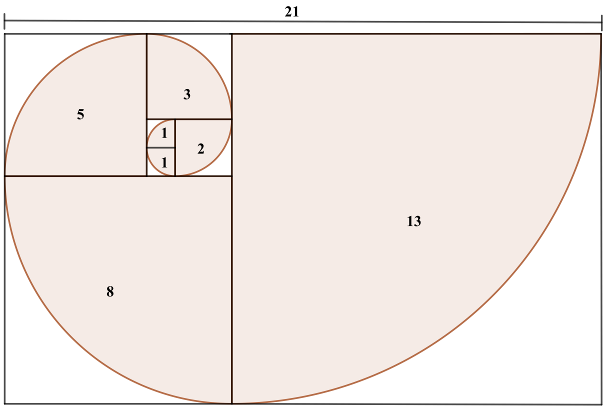
Para a construção sugerida, utilizamos o *Software* GeoGebra, porém, podemos também utilizar uma folha $A4$ com conhecimentos básicos de construção geométrica, e que pode ser visto em Landim (2014).

5 ESPIRAL ÁUREA

Sabemos que o quociente entre o sucessor e o antecessor dos números da sequência de Fibonacci se aproxima, gradativamente, do número ϕ. Assim, podemos observar na Figura 5, que o retângulo construído por quadrados, em que as medidas dos lados desses quadrados são os números de Fibonacci, formam um retângulo de áureo, pois a razão entre os seus lados, a partir do seu crescimento, se aproxima cada vez mais do número ϕ.

Por meio deste mesmo retângulo, a partir da origem dos quadrados, fazendo com que seus arcos concêntricos[3] passem pelos pontos das sucessivas divisões entre quadrados, encontramos uma espiral, como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Retângulo Áureo e a Espiral Áurea.



Fonte: Acervo pessoal

Figura 6 – Nautilus Marinho.

Fonte: Ferrer, 2005

Esta espiral é conhecida como Espiral Áurea ou Digital de Deus (por estar presente em estruturas naturais) ou Espiral Logarítimica. Podemos ver essa espiral no nautilus, este é um molusco que possui uma concha de estrutura espiralada como mostra a Figura 6.

[3] Na geometria, se diz que dois ou mais objetos são concêntricos, coaxais, ou coaxiais quando eles compartilham o mesmo centro ou eixo.

6 APLICAÇÕES DA PROPORÇÃO ÁUREA

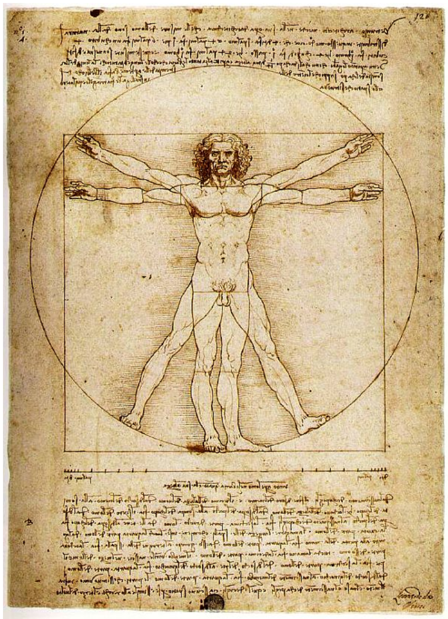
6.1 NA ARTE

A relação entre matemática e arte existe e sempre existiu, pois assim é possível explicar o realismo, a perfeição e sentir a beleza de um passado que ainda persiste presente (Contador, 2007). Desde a antiguidade a proporção áurea é empregada nas artes. Com a insistente busca pela beleza e perfeição. É frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, dos quais se destacam *Leonardo da Vinci (*1452 – 1519*)*.

> Leonardo da Vinci pensava que a Arte deve manifestar beleza e movimento. Assim, expressava movimento introduzindo rectângulos de ouro nas suas obras, pois o facto destes poderem definir espirais que curvam até ao infinito dão uma sensação de movimento. Ao introduzir a secção de ouro nas suas pinturas, permitia que estas se tornassem mais agradáveis à vista (VEIGA, 2006 p. 12).

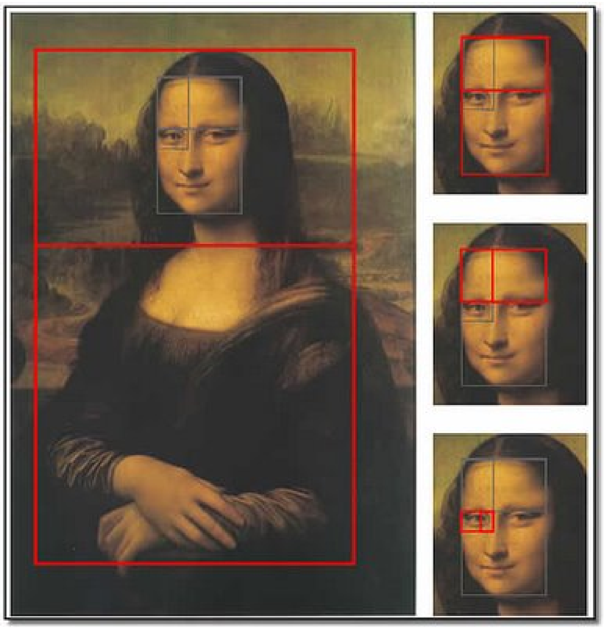
A ilustração de Leonardo da Vinci para o Livro "De Divina Proportioni", do monge Luca Pacioli, mostra as relações geométricas do homem com o universo. O chamado "Homem Virtruviano", como podemos ver na Figura 7, ilustra perfeitamente as medidas do corpo humano em que, a razão de suas medidas se aproxima da proporção do número ϕ, como: razão entre a medida que vai do ombro até a ponta do dedo médio, pela medida do cotovelo até a ponta do dedo médio; a razão entre a altura do indivíduo e a altura do umbigo; razão da altura dos quadris pela altura dos joelhos; razão da medida da cintura até a cabeça pela medida da cintura até o tórax, entre outras razões possíveis de serem analisadas nessa arte, que se aproximam da proporção áurea.

Figura 7 – O Homem Virtruviano, desenhado por Da Vinci em blocos de anotações.



Fonte: Oliveira e Ferreira (2010, p.71)

Figura 8 – Os retângulos áureos no quadro de Mona Lisa.



Fonte: Matemática Planetária, 2009.

Outra obra de grande repercussão de Da Vinci é a obra “Mona Lisa”. Como podemos observar na Figura 8, no quadro é possível verificar algumas referências a proporção áurea. Pois, se inserirmos um retângulo em torno do rosto de Madona Lisa Gherardini, obteremos um retângulo áureo. Ainda no mesmo retângulo, traçando uma linha horizontal na altura do eixo dos olhos na imagem, subdividimos-a em um quadrado e um retângulo áureo. Em outras áreas do corpo é possível encontrar a proporção áurea, como da altura do pescoço até o final do busto, e da altura deste, até o umbigo, além das próprias dimensões da tela, que também formam um retângulo de ouro.

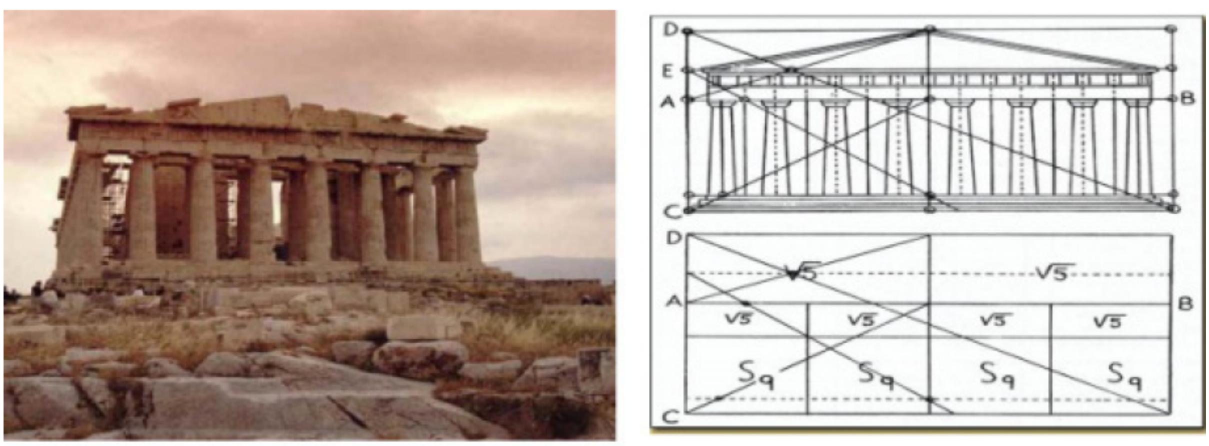
6.2 NA ARQUITETURA

Com a dinâmica de organização dos objetos naturais, a proporção áurea já foi encontrado por diversas partes de diversas áreas, criando formas de extraordinária beleza. Sendo assim, não é difícil encontrar exemplos da presença da proporção áurea, pois sua existência se estende na natureza, em uma simples planta até a galáxia; segundo Lívio (2008 apud Oliveira e Ferreira, 2010, p.80), “a atratividade do número de ouro origina-se, antes de mais nada, do fato de que ele tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera”.

Dessa forma, o homem passou a utilizar a proporção, como um dos exemplos, temos a arquitetura que de acordo com Contador (2007), os arquitetos buscam a beleza tanto estética quanto harmônica, através da matemática ou da geometria em várias proporções da natureza e do corpo humano.

Para retratar a utilização da proporção na arquitetura, apresentamos o Partenon, na Figura 9, que embora muitos arquitetos tenham usado a proporção áurea em outras construções, é o exemplo mais comentado e que de certa forma, desempenha grande relevância para a história. E dessa forma, o Partenon é um dos monumentos mais importantes da antiga civilização grega. Construído entre os anos de 447 a. C. e 432 a. C. e situado na Acrópolis, uma montanha no centro da cidade de Atenas.

Figura 9 – Partenon grego.



Fonte: Dias (2015, p.23)

Dedicado a deusa Atena, de acordo com Costa (2008, p. 194), o Partenon é marcado pela ideia de beleza e simetria do retângulo áureo. Ainda hoje, esse monumento é um dos exemplos que ressalta o conhecimento em geometria, pelos matemáticos e arquitetos gregos da época. Sendo assim, essa noção simétrica é estabelecida com a utilização do quase exato retângulo áureo na sua parte frontal. Porém, não há evidências históricas de que ao ser construido, os arquitetos de Péricles[4] tenham usado conscientemente o retângulo áureo.

Segundo Ferrer (2005), a realização desta construção, foi designada a uma equipe de arquitetos e artistas liderada pelo escultor Fídia (ou Phídeas). Fídias era muito conhecido pela utilização da proporção áurea em seus trabalhos, e por isso, muitos historiadores acreditam que na construção do Partenon poderia não ser diferente.

6.3 NO DESIGNER

Atualmente, o designer é também uma das áreas que vem ganhando destaque por atribuir o uso da proporção áurea. Não diferente da fotografia, o grid[5] produzido pela proporção, ou melhor, o retângulo áureo que é mais utilizado para se alcançar a proporção áurea nos trabalhos, favorece formas e alinhamentos de projetos de designer em vários sentidos. No designer, o grid proporcionado pela razão tem mais liberdade e pode ser utilizado de várias formas, vários ângulos, podendo sobrepor vários grids, diferente da fotografia que é mais comum o grid na horizontal ou vertical. Dessa forma, tamanha liberdade, torna a proporção mais difícil para os designers.

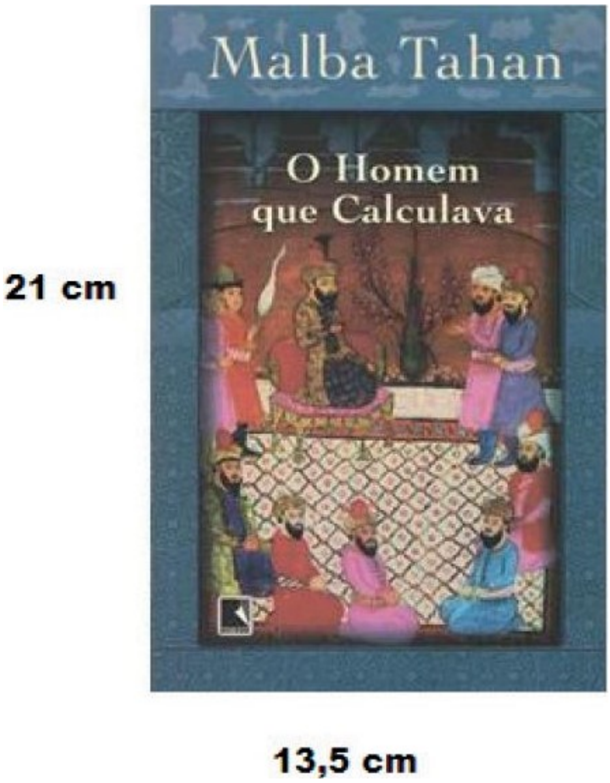
A proporção é uma ferramenta de auxílio, ou seja, “ter função não é o mesmo que fazer funcionar"(Mattos, 2015), pois a utilização da proporção não vai garantir total perfeição ao trabalho, porém não diminui a importância da mesma. Segundo Mattos (2015) “se a proporção áurea não fosse importante, não seria uma das técnicas de composição mais usada, principalmente em cartazes de cinema, que são mídias que precisam agradar praticamente o mundo inteiro”. Sendo assim, a proporção não é utilizada apenas nas artes visuais, pois está presente também no designer de aparelhos eletrônicios, formato do cartão de crédito, na engenharia automotiva, etc, pois acredita-se que essa forma agradará seus clientes.

É importante ressaltar que as dimensões reais de um cartão de crédito são $8,56\ cm$ por $5,39\ cm$, a razão é aproximadamente $1,59\ cm$ bem próximo de ϕ. Podemos observar que o livro O homem que Calculava de Malba Tahan, tem que suas medidas $21/13,5 = 1,555\ldots$ se aproximam do número ϕ, veja na Figura 11.

[4] Foi um importante, orador, estrategista militar e político grego. Nasceu em 492 a.C. na cidade de Atenas e faleceu em 429 a.C.Considerado um dos principais líderes de sua Atenas.

[5] Ferramenta formada por um conjunto de linhas na vertical e horizontal, responsável por auxiliar na ordenação, distribuição, alinhamento e dimensão dos elementos em uma estrutura.

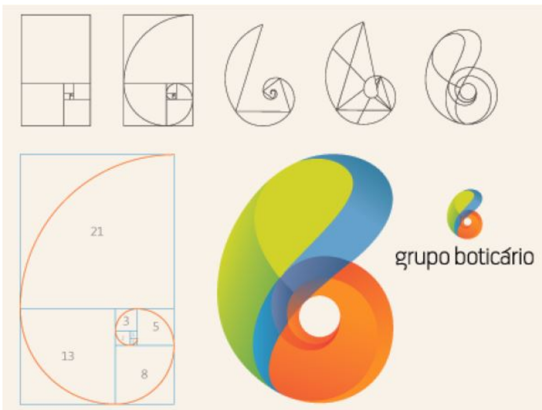
Figura 10 – Design do Livro de Malba Tahan.



Fonte: Moreira e Santos, (2019, p. 197)

Em seguida, temos a imagem de um designer gráfico do Grupo Boticário.

Figura 11 – Design por meio da Proporção Áurea.



Fonte: Logotipo27 apud Araújo, 2015, p. 80.

Assim como podemos observar na imagem, e de acordo com Araujo (2015), "na *brand book* [6] da marca do Grupo Boticário, é citada a relação entre o símbolo da marca e as figuras geométricas relacionadas à proporção áurea".

[6] Ob Manual da Marca ou Brandbook é um conjunto de informações que estabelecem a essência e a cultura da marca, e visam guiar o padrão da comunicação corporativa.

6.4 NA FOTOGRAFIA

Não podemos falar da proporção áurea na fotografia sem antes falar da regra dos terços, embora sejam parecidas, possuem resultados diferentes.

6.4.1 Regra dos terços

Um dos mais importantes princípios da composição fotográfica, a regra dos terços tem o principal objetivo de contribuir para a produção de uma fotografia visualmente equilibrada e interessante.

> A composição nada mais é do que a arte de dispor os elementos do tema, formas, linhas, tons e cores – de maneira organizada e agradável. Na maioria dos casos, não só sentimos mais prazer em olhar uma fotografia organizada, mas também, uma maior facilidade em entendê-la. (BUSSELE, 1979, p.16)

Essa regra é uma ferramenta em que as câmeras, inclusive as de smartphones, disponibilizam ao fotográfo no momento de compor uma imagem. É um grid que possibilita a organização visual dos elementos dentro de um espaço, ou seja, a tela/display de uma câmera ou smartphone, utilizando de linhas horizontais e verticais que se cruzam entre si, dividindo a tela em nove partes proporcionais. Os quatro pontos de intersecção formados pelas linhas, revelam os quatro pontos de interesse da imagem, ou seja, serão nessas zonas que o fotógrafo deverá posicionar os elementos mais atraentes a fotografar.

Muitos estudiosos, tanto da fotografia quanto das artes (pintores), chegaram a conclusão que quem observa uma imagem, olha mais precisamente para um dos pontos de intersecção do que para o centro da fotografia. A composição com a regra dos terços, não é mais do que evitar simplesmente centrar o elemento a fotografar, é posicioná-lo $\frac{1}{3}$ acima do fundo e $\frac{1}{3}$ à esquerda ou $\frac{1}{3}$ abaixo do topo e $\frac{1}{3}$ à direita e assim sucessivamente.“O fotógrafo deve procurar compor de forma semelhante ao olhar humano que direciona a sua atenção, para um determinado ponto de interesse, ignorando os detalhes menos importantes ao redor” (HEDGECOE, 1980).

Figura 12 – Regra dos terços referênciando o objeto na vertical esquerda.

Fonte: Acervo pessoal

Acima, temos a imagem que representa a aplicação desta regra, em que o objeto principal da foto se encontra localizado nos pontos interesse do cruzamentos das retas horizontais e a reta vertical a esqueda da foto, mostrando assim, uma representação de como aplicar a "regra dos terços".

6.4.2 Regra de Ouro

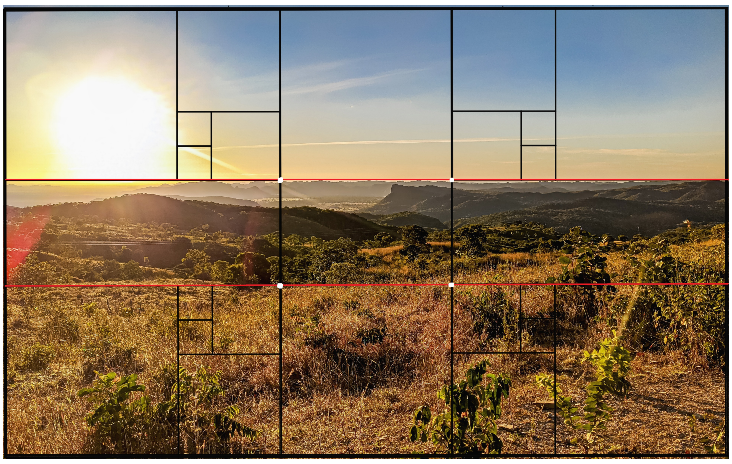
A fotografia, estabelece uma relação de grande importância com a Matemática, em que, deve-se pensar a divisão e a porporção de espaço, exigindo do fotógrafo a busca de uma imagem enquadrada e nas medidas, de forma que agrade o espectador. Lima (1988) nos deixa explicito que, a sensibilidade ótica tem na fotografia um elemento de fundamental importância, que muitas vezes chega a romper com a lógica matemática.

Na fotografia a razão áurea é conhecida por quase todos os nomes já citados, porém o nome mais famoso é a "regra de ouro". Não muito diferente da regra dos terços, a regra de ouro é uma perfeita "ferramenta" na composição de uma fotografia. Ela possibilita a criação de fotografias mais originais; de certa forma, ela gera uma composição muito enriquecida, ou seja, muito interessante, diferente e criativa, que faz com que essa regra se diferencie da regra dos terços. Sendo assim, os fotógrafos não a considera como uma pequena variante da regra dos terços, pois a diferença é notável.

Diferente da regra dos terços, a regra de ouro não possui um grid disponível como ferramenta de suporte nas câmeras e smartphones. Nela, os fotógrafos aplicam o grid inconscientemente no momento da produção da foto, ou melhor, no momento do click. Essa técnica exige tempo de estudos e práticas dos profissionais, pois é essa dificuldade que eleva o nível de um trabalho fotográfico e faz com que a regra seja tão interessante, além do grid, o fotógrafo pode estar utilizando a espiral áurea para posicionar os elementos de acordo com ela.

Utilizando o retângulo áureo, pode-se construir um grid, semelhante a da regra dos terços. Que consiste em sobrepor quatro retângulos de Fibonacci de forma aleatória, ou seja, mudando as posições dos pontos centrais de forma que se espelhem.

Figura 13 – Linha horizontal superior guiando o horizonte.



Fonte: Acervo pessoal

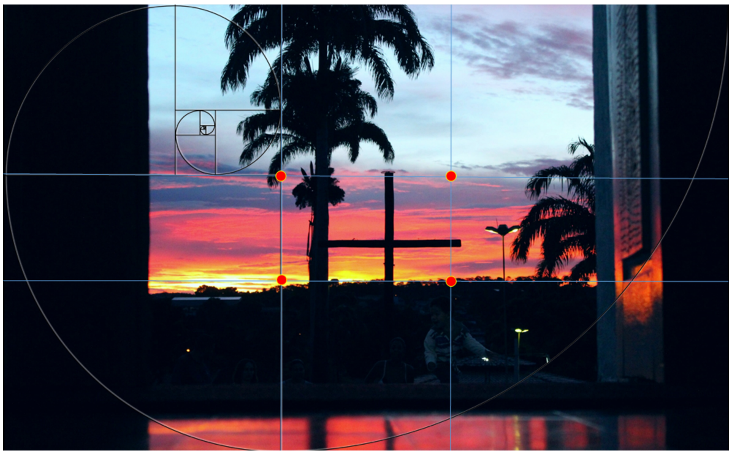
Assim como foi visto na seção 5, Figura 5, o grid sobre esta imagem é criada a partir dos valores da sequência de Fibonacci, onde os dois quadrados centrais de lado 1 por 1 dão início a construção do retângulo, a soma do lado dos dois quadrados determina o lado do próximo quadrado e assim por diante, e cada quadrado equivale respectivamente a um número da sequência de Fibonacci de acordo com o seu crescimento.

Dessa forma, sobrepondo quatro grids obteremos quatro pontos centrais, a partir da interseção das retas traçadas verticalmente e horizontalmente. Então, podemos observar a execução dessa teoria na Figura 13, em que foram sobrepostos quatro retângulos áureos um sobre o outro e formando um grid, em que foi necessário apenas traçar as retas em vermelhos para que esse grid se assemelhasse ao grid da regra dos terços. E podemos observar, a linha superior da horizontal guiando o horizonte na imagem, a composição por essa técnica pode acontecer de várias formas, de acordo com o objeto que o fotógrafo deseja registrar, ou seja, a mesma foto poderia ter outras diferentes composições, por exemplo,

- utilizar a linha inferior, horizontal, para guiar o horizonte, com foco no céu.
- colocar o sol na parte superior esquerda da imagem.
- aplicar a espiral de Fibonacci e colocá-la como ponto de início o sol.

Logo, a composição por esse método varia de acordo com a pessoa que a aplica. E para retratar melhor, segue mais alguns exemplos de aplicação. Na Figura 14, podemos observar um dos pontos colocados acima, em que a composição fotográfica, usou a linha inferior horizontal para guiar a linha do horizonte, dando então, um maior destaque ao céu, ou seja, a parte superior da foto.

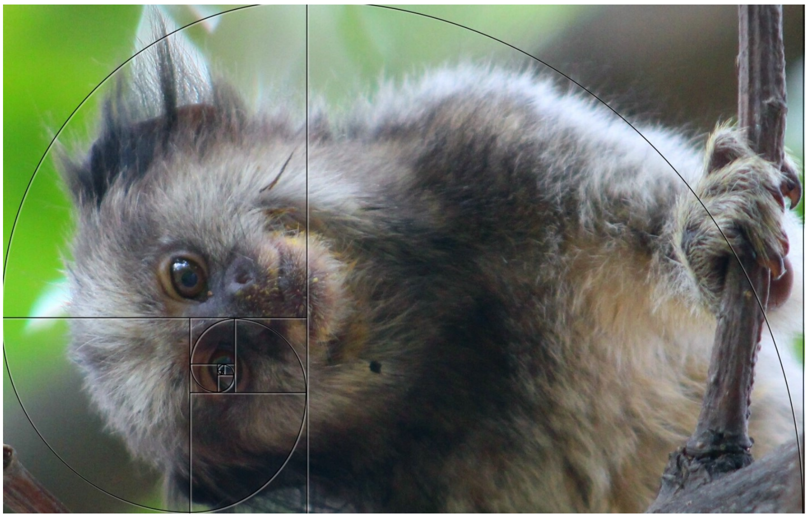
Figura 14 – Linha horizontal inferior guiando o horizonte.



Fonte: Acervo pessoal

Na Figura 15, podemos observar uma outra forma de composição a partir da proporção, em que o ponto central da espiral áurea partiu do olho direito do animal, e a espiral foi contornando o movimento corporal em que o macaco posou.

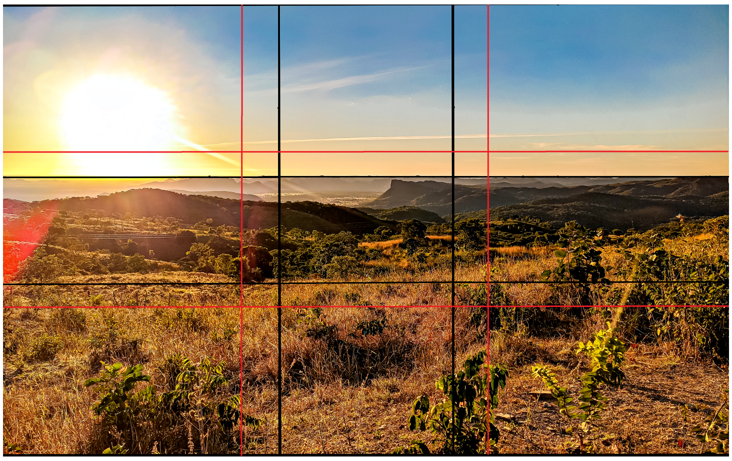
Figura 15 – O ponto ϕ exatamente no olho do macaco.



Fonte: Acervo pessoal

A aplicação da regra de ouro, não garante total perfeição ao trabalho fotográfico. O seu uso requer estudo e prática. A proporção áurea na fotografia é diferente da regra dos terços, pois possui outro conceito matemático, em que na regra dos terços, o grid é dividido em partes iguais, e na regra de ouro, o grid se baseia na proporção áurea, ou *"razão extrema e média"*, o que faz a foto ser mais dinâmica e menos previsível.

Figura 16 – Regra do Terço e Regra de Ouro.



Fonte: Acervo pessoal

Diante do exposto sobre a aplicação das regras, na Figura 16 podemos ver em vermelho a regra dos terços e em preto a regra de ouro. Assim, temos a diferença de posição e localização uma da outra.

7 A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA - UMA PROPOSTA PARA A SALA DE AULA

Nesta seção, apresentamos uma sugestão de como pode ser feita uma aproximação entre a proporção áurea e a fotografia na sala de aula, com o objetivo de exibir um conteúdo matemático relacionado a uma atividade que todos conhecem, que é tirar uma foto. Em relação ao número de ouro, Landin (2014) comenta que , "dificilmente é trabalhado no Ensino Médio e, em alguns casos, é pouco trabalhado no ensino superior, inclusive alguns graduados em Matemática nunca estudaram algo sobre este número na graduação".

Alguns conteúdos que podem ser estudados com os alunos do Ensino Médio com o número ϕ são equações do segundo grau, sequências númericas por meio da sequência de Fibonacci, proporção e geometria, esse último com auxílio de um Laboratório de Matemática (LEM), porém, sabemos que na maioria das escolas não possui estrutura para o mesmo.

Dessa forma, nossa intenção, é mostrar que possui diversas possibilidades de aplicação do conteúdo, tanto para escolas que possuem laboratório, quanto para aquelas em que não possuem laboratório, ou seja, as escolas que tem um LEM ou um Laboratório de Informática, o professor tem a chance de aproveitar ao máximo aquilo que está a seu alcance; já as escolas que não possui, o professor pode sugerir aos alunos materiais disponíveis.

Para inserir o assunto da proporção áurea no ensino de Matemática, pensamos no uso de redes sociais, com o aplicativo Instagram (rede social de compartilhamento de fotos instantâneas), como forma de tentar atrair a atenção dos alunos para o assunto, tendo em vista que a influência das ferramentas digitais tem apresentado mais entusiamo por oferecer diversas opções de interação para o aluno. Pensamos também, que uma grande parte dos alunos do Ensino Médio possui um aparelho celular e faz uso do aplicativo; ressaltamos que o ponto principal é o conteúdo matemático vinculado a fotografia, o aplicativo será utilizado apenas na última parte da atividade.

No trabalho feito por Landim (2014) foi desenvolvida uma atividade para ensinar geometria por meio do *software* GeoGebra, no intuito de diferenciar as aulas e proporcionar uma melhor visualização das figuras geométricas por parte dos alunos. O autor relata que,

> foi abordado um pouco sobre a Razão Áurea, trabalhando a parte teórica, como definição e aplicações deste número em várias outras áreas. Levando para a parte prática, iremos fazer um passo a passo da construção do Retângulo de Ouro e do Triângulo de Ouro através das ferramentas do GeoGebra. (LANDIM, 2014, p.59)

Uma segunda atividade desenvolvida por Landim (2014) com os alunos, foi o problema clássico da sequência de Fibonacci, o "problema dos coelhos", em que apresenta o problema para os alunos tentarem resolver, e após um tempo, soluciona junto com eles por meio de uma discussão, mostrando a relação da sequência Fibonacci e a proporção áurea.

Outro trabalho que nos auxiliou para a construção da sugestão das atividades é o de Melo (2017); a autora desenvolveu o trabalho intitulado "Razão Áurea e Fibonacci na fotografia: um projeto de trabalho diversificado". De acordo com o que foi proposto pela autora, descreveremos sete momentos com o objetivo de complementar cada passo e a linearidade da apresentação dos conceitos aos alunos. Cada momento equivale a uma aula de 50 minutos. Nosso público-alvo são os professores com turmas a partir do nono (9º) ano.

1º momento: Por meio de um data show, apresentar com explicações a proporção áurea e a sequência de Fibonacci, a relação de ambas e as aplicações que ao longo dos anos se destacaram na arte, arquitetura, fotografia, no desing e com descobertas na natureza, de forma que os alunos possam fazer conexões do assunto e entender melhor o desenvolvimento da atividade, ou seja, tratando essas relações de forma geral.

2º momento: Ainda com o auxílio do data show, apresentar a pintura do "Homem Virtruviano" de Leonardo Da Vinci, com a explicação sobre as relações métricas na pintura e a proporção áurea, pedir que os alunos se dividam em duplas ou trios e meçam seus corpos buscando relações com a proporção áurea verificando a ideia do "Homem Virtruviano".

3º momento: Sugerir que os alunos verifiquem se há proporção em determinados objetos, explicar que pode ser considerado qualquer material encontrado no seu cotidiano, ou seja, o que estiver disponível para o aluno (por exemplo, a tela de uma TV; tela de um celular; um caracol por meio da espiral áurea; uma calculadora e etc). Explicar que se a razão se aproximar do número $1,61\ldots$ existe a proporção áurea. O objetivo é despertar o interesse dos alunos para que eles possam se indagar e procurar diversos objetos que provalvemente verificará a proporção áurea seja na natureza ou não.

4º momento: De acordo com o que foi proposto no trabalho de Melo (2017), em nossa atividade também sugerimos a construção de um retângulo áureo proporcional ao tamanho das telas dos celulares dos alunos, utilizando papel A4, caneta/lápis e um compasso. Com um pedaço de plástico transparente (acetato) que pode ser encontrado em papelaria e um pincel permanente, fazer a transposição da construção do retângulo áureo para o pedaço de acetato, que ao ser finalizado, será colocado com o auxílio de uma fita adesiva na tela do celular, e dessa forma os alunos terão referência na hora de tirar as fotos buscando a composição por meio da proporção áurea. Podemos verificar um exemplo disso na Figura 17.

Figura 17 – Material de acetado com o desenho do retângulo áureo.

Fonte: Melo (2017)

5º momento: Inserir a fotografia baseado em Melo (2017), para que os alunos possam fazer a análise e identificar como a harmonia se encontra na composição das fotos, podem ser apresentados vários artistas, como, por exemplo, o fotógrafo Henri Cartier Bresson entre outros. O intuito desse momento, é fazer com que os alunos discutam sobre enquadramento, composição das fotos e inspirá-los. Após este momento, o aluno poderá ter o prazo de uma semana, para que possa fazer os seus registros com base no que aprendeu.

Figura 18 – Trabalho do fotógrafo Bresson

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/242631498645121651/

Na Figura 18 temos uma fotografia, em que Bresson usou a espiral áurea como inspiração para a composição. Ao ver as fotos os alunos poderão procurar imagens em seu redor parecidas com as apresentadas.

6º momento: A partir do 5º momento, após os registros fotográficos dos alunos, recomendamos a apresentação do Instagram, em que os alunos poderão fazer publicações. Uma forma de publicação que o aplicativo permite, é a de enquete comparativa que poderá ser feita das composições de foto, no qual publicarão uma foto seguindo a proporção áurea e outra foto sem o uso e pedir para que os seguidores decidam qual foto ficou mais bonita, harmoniosa, organizada e atraente.

7º momento: O professor vai estimular um diálogo em sala de aula, colocando como ponto de discussão qual a reflexão que tiveram após os resultados das enquentes publicadas no aplicativo Instagram, levando em conta todo o conteúdo trabalhado. Assim temos alguns questionamentos como sugestão para o debate:

- Qual das regras (regra dos terços e regra de ouro) eles se sentiram mais confortáveis na hora da composição da fotos?
- Durante a composição das fotos, quais as preocupações tiveram em relação a proporção áurea?
- A regra de ouro foi útil na composição estética da foto?
- Quais as dificuldades tiveram ao aproximar a proporção áurea e a fotografia?
- O que o conteúdo matemático motivou na composição das fotos?

De certa forma, indagar o aluno se o conteúdo teórico apresentado foi útil, o que ele pode levar para o seu cotididiano; se consegue visualizar a matemática com mais facilidade nos objetos, principalmente a proporção áurea. E assim, o professor poderá fazer qualquer outro questionamento durante a discussão. Este deve ser o momento da reflexão dos resultados que podem ser alcançados com a proposta.

A aplicação dessa atividade pode contribuir com grandes resultados. A proporção áurea por dispor de um contexto histórico muito longo e ao mesmo tempo atual por suas aplicações, poderá chamar a atenção e despertar nos alunos o interesse maior pela ciência matemática, tendo em vista, que após todo o processo teórico, planejamento, aplicação e discussão da atividade, os alunos terão a oportunidade de conhecer e verificar a aplicação em várias situações, desde coisas naturais até os objetos feitos pelo homem, como é o caso da fotografia.

Consequentemente, a fotografia na sugestão da atividade, vai ter o papel de fazer a ponte entre o aluno e a atividade sugerida, por ser uma ação comum, que se encontra no cotidiano dos alunos. A utilização de meios tecnológicos e entre outros métodos como estratégia de ensino, é um recurso pedagógico que pode apresentar bons resultados, e Melo (2017) destaca que,

> Ensinar matemática com fotografia motivou os alunos a pesquisarem, produzirem e participarem mais das atividades. O envolvimento dos alunos foi muito grande com troca de ideias e sugestões, contribuindo assim para o desenvolvimento dos conteúdos.

Tendo em vista a evolução tecnológica, a inserção do Instagram foi pensada devido a afinidade em que os jovens tem com o aplicativo, como forma de chamar a atenção e aproximá-los do objeto matemático por intermédio da fotografia. Logo, pode-se obter uma maior afinidade do aluno e o conteúdo matemático, além de poder propiciar uma certa identificação com a fotografia.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo apresentamos a proporção áurea, fragmentos do seu contexto histórico e suas relações. A pesquisa teve início na graduação, fizemos alguns recortes do que foi apresentado no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e nesta versão, pensamos em uma abordagem voltada para a construção de uma proposta de ensino que evidencia o conteúdo matemático a uma atividade para ensinar os alunos da Educação Básica a perceberem a proporção áurea na fotografia e, pelas lentes de uma câmera, visualizá-la em coisas de seu cotidiano.

Diante do leque de possibilidades em que a proporção áurea permite, apresentamos uma proposta de ensino, mostrando o conteúdo da proporção áurea por meio da fotografia, buscando aproximar o aluno do conteúdo matemático. Tendo em vista a afinidade das pessoas com o mundo tecnológico, e que se atualiza a cada instante, buscamos criar situações em que tanto o professor, quanto o aluno, utilizem o conhecimento em seu cotidiano.

Levamos em consideração que a atividade por si só não garante o êxito, sendo assim, para que seja efetiva, o professor necessita estudar e planejar estratégias para sua execução. Durante a aplicação, que os alunos conheçam não só as tarefas, mas seus objetivos e finalidade, e a cada passo da ação, mesmo que a proposta não abra precendentes, realizar uma discussão, para que os alunos sintam-se familiarizados com a atividade e o professor possa acompanhar e auxiliá-los com as dúvidas de cada momento.

Expressamos a aplicabilidade da proporção áurea no ensino, que se estende não só à Matemática, mas a outras áreas do conhecimento. E assim, desejamos que essa proposta seja explorada em sala de aula, pois temos o objetivo de ajudar o professor quanto ao redimento dos alunos, além de sugerir o uso de um recurso, que é uma fotografia ao torná-la mais harmoniosa por meio de um conteúdo matemático.

Como professor atuando no momento, e de acordo com algumas experiências vividas durante aplicações de projetos com aulas diferenciadas, percebi que isso contribui de forma importante para o desenvolvimento profissional, pois permite pensar em circunstâncias planejadas e aplicadas e traz benefícios visíveis para o ensino e a aprendizagem dos discentes. Sendo assim, os alunos atendem com muita receptividade aulas inovadoras, sempre possui dúvidas no primeiro momento, porém são solucionadas no decorrer das atividades tornando fonte de enriquecimento para o conhecimento dos alunos.

Portanto, pretendemos com este estudo, mostrar uma alternativa de vincular a proporção áurea à fotografia para a sala de aula de modo que os alunos estudem os conceitos explorando as relações apresentadas na natureza e no corpo, ou seja, além da sala de aula.

9 REFERÊNCIAS

ALONSO, Melanie Hernández. **Elementos de Euclides: Libros V-VI.** 2017. 51 f. Universidad de La Laguna, San Cristóbal de La Laguna - Espanha, 2017. Cap. 3. Disponível em: <https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/6179/Ele-mentos de Euclides, Libros V y VI.pdf? sequence=1isAllowed=y>. Acesso em: 12 dez. 2020

ARAÚJO, Sharlene Melanie Martins. **Fundamentos geométricos aplicados em design de marcas**. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Comunicação e Expressão, Programa de Pós-Graduação em Design e Expressão Gráfica, Florianópolis, 2015. Disponível: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/132973?show=full, acesso: 22, abril, 2017. Acesso em: 29, jan. 2021

ÁVILA, Geraldo. Retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, Brasília – Df, n. 06, p.1-10, 18 abr. 2018.

BUSSELE, Michael. **Tudo sobre Fotografia**. São Paulo: Pioneira. 1979.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins.**A matemática na arte e na vida**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

COSTA, Eudes Antonio da. A Beleza pela (na) Matemática. **Estudos**, Goiânia, v. 35, n. 2, p. 187-199, mar./abr. 2008.

FERRER, Joseane Vieira.**O Número de Ouro na Arte, Arquitetura e Natureza: Beleza e Harmonia.** 2005. Licencianda em Matemática. Universidade Católica de Brasília, 2005.

HEDGECOE, John. **Curso Completo de Fotografia**. São Paulo: Melhoramentos. 1980

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção**. Trad. Luís Carlos Ascênio Nunes. Editora Universidade de Brasília, 1985

LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros. **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea: Aplicações no Ensino Básico.** 2016. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, UFRN, Natal, 2016.

LIMA, Ivan. **A Fotografia é a Sua Linguagem**. Rio de Janeiro, 2 ed. Espaço e Tempo, 1988.

LÍVIO, Mario. **Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARTINS, Patricia Camara. **O Número de Ouro e a Divina Proporção.** Colegiado do Curso de Matemática – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel – PR – Brasil.

MATEMÁTICA PLANETÁRIA. **Leonardo da Vinci e o Retângulo Áureo**. Disponível em: <https://goo.gl/NjFnn1>. Acesso em: 05 de mar. de 2021

MATTOS, Walter. **Proporção áurea: ferramenta ou mito?** 28 de abril de 2015. Disponivel em: https://waltermattos.com/artigos/proporcao-aurea-ferramenta-ou-mito/> . Acesso em: 25 de fev. de 2021.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática** / Rogério S. Mol. -Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 138 p.

MOREIRA L. S.; SANTOS G. O. **A Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea**.Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019.

OLIVEIRA, Edson de ; FERREIRA Thiago Emanuel. O Número de Ouro e suas Manifestações na Natureza e na Arte. **Revista Complexus** – Instituto Superior De Engenharia Arquitetura E Design – Ceunsp, Salto-Sp, Ano. 1, N.2, P. 64-81 , Setembro de 2010. Disponível em: <www.Engenho.Info>. Acesso em: 09 de dez. de 2020

OLIVEIRA, José Jackson de. **Sequência de Fibonacci: possibilidades de aplicações no ensino básico.** Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Salvador, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/22821/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20-%20Jos%c3%a9%20Jackson.pdf>. Acesso em: 09 de jan. de 2021

VEIGA, Leila E. M. **A volta do número de Ouro**, 58 páginas. Instituto Superior de Educação, Salvador-BA, 2006. Disponível em:<http://www.portaldoconhecimento.gov.cv/bitstream/10961/2242/1/monog.actual.pdf>. Acesso em 15 de jan. de 2021.

LANDIM, Nilo Pinheiro. **Razão áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2014. 70f.

Disponível em: <https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Nilo-Pinheiro.pdf>. Acesso em: 17 de fev. de 2021.

MELO, Maria Isabel Afonso. **Razão áurea e números de Fibonacci : da teoria à prática através da fotografia**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, 2017, 80 f. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/33080/33080.PDF>. Acesso em: 17 de fev. de 2021.