INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO-CAMPUS URUTAÍ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VINÍCIUS VIEIRA DA SILVA DUTRA

UM ESTUDO FUNDAMENTAL SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS FAZENDO RELAÇÃO AOS NÚMEROS REAIS

Urutaí
2020

VINÍCIUS VIEIRA DA SILVA DUTRA

UM ESTUDO FUNDAMENTAL SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS FAZENDO RELAÇÃO AOS NÚMEROS REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Goiano-Campus Urutaí, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Aderval Alves dos Santos

Urutaí
2020

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano

D978e Dutra, Vinícius Vieira da Silva
Um Estudo Fundamental Sobre Números Complexos Fazendo Relação Aos Números Reais / Vinícius Vieira da Silva Dutra;orientador Aderval Alves dos Santos. -- Urutaí, 2020.
78 p.

Monografia (em Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal Goiano, Campus Urutaí, 2020.

1. Números Reais. 2. Números Complexos. 3. Conceitos. I. Santos, Aderval Alves dos, orient. II. Título.

Responsável: Johnathan Pereira Alves Diniz - Bibliotecário-Documentalista CRB-1 n°2376

INSTITUTO FEDERAL
Goiano

Repositório Institucional do IF Goiano - RIIF Goiano
Sistema Integrado de Bibliotecas

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

Identificação da Produção Técnico-Científica

[ ] Tese
[ ] Dissertação
[ ] Monografia – Especialização
[X] TCC - Graduação
[ ] Artigo Científico
[ ] Capítulo de Livro
[ ] Livro
[ ] Trabalho Apresentado em Evento
[ ] Produto Técnico e Educacional - Tipo: ____________________

Nome Completo do Autor: VINÍCIUS VIEIRA DA SILVA DUTRA
Matrícula: 2016101221230162
Título do Trabalho: UM ESTUDO FUNDAMENTAL SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS FAZENDO RELAÇÃO AOS NÚMEROS REAIS

Restrições de Acesso ao Documento

Documento confidencial: [X] Não [ ] Sim, justifique: ____________________

____

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: 01/09/2020
O documento está sujeito a registro de patente? [ ] Sim [X] Não
O documento pode vir a ser publicado como livro? [ ] Sim [X] Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

1. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
2. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
3. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Urutaí, 22/08/2020
Local Data

Vinícius Vieira da S. Dutra
Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Ciente e de acordo:

Adonal Alves dos Santos
Assinatura do(a) orientador(a)

INSTITUTO FEDERAL
Goiano

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia Goiano
Campus Urutaí
Rodovia Geraldo Silva Nascimento Km 2.5, 75.790-000, Urutaí – GO.
Fone: (64) 3465-1900 https://ifgoiano.edu.br/urutai

ATA DE REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE TRABALHO DE CURSO DE VINÍCIUS VIEIRA DA SILVA DUTRA – Reuniram-se, ao décimo sexto dia do mês de março do ano de dois mil e vinte (16/03/2020), às 17h00, em sessão pública realizada no Laboratório de Educação Matemática, os Professores Aderval Alves dos Santos, Jucelino Cardoso Marciano dos Santos e Dassael Fabrício dos Reis Santos, componentes da banca examinadora do trabalho de curso de graduação intitulado: **'Um Estudo Fundamental Sobre Números Complexos Fazendo Relação aos Números Reais'**, de autoria de Vinícius Vieira da Silva Dutra, discente do Curso de Licenciatura em Matemática. A sessão foi aberta por aquele que a presidiu, Aderval Alves dos Santos, o qual formalmente apresentou os demais membros da Banca e, então, passou a palavra ao autor do trabalho que, em cerca de 15 minutos, apresentou-o de maneira sistemática. Terminada esta etapa, a Banca arguiu o discente a fim de melhor compreender seu trabalho. Feitas as sugestões de correção, a monografia foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito à obtenção do título de **LICENCIADA EM MATEMÁTICA** pelo Intituto Federal Goiano. Às 17h45, cumpridas as formalidades de pauta, o presidente da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Aderval Alves dos Santos, lavrei a presente Ata que, depois de lida, foi assinada pelos membros da Banca em três vias de igual teor.

Membros	**Notas**
Aderval Alves dos Santos	8,5
Jucelino Cardoso Marciano dos Santos	7,2
Dassael Fabrício dos Reis Santos	9,5
Média	8,4

Aderval Alves dos Santos

Prof. Me Aderval Alves dos Santos
Presidente – IF Goiano – Campus Urutaí

Jucelino Cardoso Marciano dos Santos

Prof. Me Jucelino Cardoso Marciano dos Santos
Membro – IF Goiano – Campus Urutaí

Dassael Fabrício dos Reis Santos

Prof. Dr Dassael Fabrício dos Reis Santos
Membro – IF Goiano – Campus Urutaí

Vinícius Vieira da Silva Dutra

Um Estudo Fundamental Sobre Números Complexos Fazendo Relação aos Números Reais

Monografia defendida junto à coordenaçãoç de trabalho de curso da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Goiano – Campus Urutaí, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática, aprovada em 16 de março de 2020, pela Banca constituída dos Professores:

Aderval Alves dos Santos

Prof Me Aderval Alves dos Santos
IF Goiano – Campus Urutaí
Presidente da Banca

Jucelino Cardoso Marciano dos Santos

Prof Me Jucelino Cardoso Marciano dos Santos
IF Goiano – Campus Urutaí

Dassael Fabricio dos Reis Santos

Prof Dr Dassael Fabrício dos Reis Santos
IF Goiano – Campus Urutaí

Dedico esse trabalho aos meus pais, Maria Lucia Vieira da Silva Dutra e Margarido Vaz Dutra, e a minha Tia Erezita Dutra Martins (In Memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me ajudado nesta caminhada, dando forças para superar os diversos obstáculos.

Também agradeço às pessoas especiais que foram companheiras nesta jornada, como minha família por todo apoio e incentivo que tive no decorrer do curso.

Agradeço meu orientar Aderval, pelo tempo dedicado, pela paciência, pela compreensão, pelos ensinamentos, pela cobrança que não deixasse que eu me perdesse no desenvolvimento deste trabalho me incentivando e orientando.

Agradeço aos amigos e colegas de curso com os quais compartilhei momentos de dúvidas e momentos difíceis nos quais passei.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

Descartes

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo fazer um estudo fundamentado sobre os números complexos, apresentando de forma bem detalhada de todos os conceitos: definições, propriedades e proposições/teorema em relação aos números complexos. Além disso, também foi apresentado as representações geométricas de algumas operações envolvendo números complexos. Na abordagem metodológica foi optado pela pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico, que a partir dessa investigação percebeu-se algumas diferenças no comportamento de conceitos no conjunto dos números reais comparado com o conjunto dos números complexos. Esses conceitos dos números reais são aprendidos pelos alunos na disciplina de Matemática no ensino médio, ou seja, são noções aonde esses alunos estão já habituados. Em virtude desses aspectos, neste trabalho, o estudo realizado sobre os números complexos teve como objetivo construir uma narrativa do ponto de vista histórica, onde a história dos números complexos permite visualizar como e porque surgiram estes números, ou seja, seu aparecimento não foi por acaso, e sim, pela necessidade da resoluções das equações de grau 3.

Palavras–chave

Números Reais; Números Complexos; Conceitos.

Abstract

The present work has as objective to make a grounded study on the numbers complex, presenting in a very detailed way all concepts: definitions, properties and propositions/theorem in relation to complex numbers. In addition, the geometric representations of some operations involving complex numbers. In the methodological approach, the qualitative research of bibliographic nature, that from this investigation it was noticed some differences in the behavior of concepts in the set of real numbers compared to the set of complex numbers. These concepts of real numbers are learned by students in Mathematics in high school, that is, they are notions where these students are already used to. In view of these aspects, in this work, the study carried out on the complex numbers aimed to build a narrative from the historical point of view, where the history of complex numbers allows us to visualize how and why they arose these numbers, that is, their appearance was not by chance, but because of the need for resolutions of grade 3 equations.

Keywords

Real Numbers; Complex Numbers; Concepts.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Os Números Complexos possuem diversas aplicações tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Associados a outros conteúdos matemáticos, promovem técnicas alternativas de demonstração e resolução de problemas, resgatando conceitos e atribuindo significados. Há áreas do conhecimento em que são considerados essenciais e outras em que são importantes facilitadores de cálculos. Apesar disso, o conceito de números complexos não são explorados de forma ampla no ensino médio. Neste sentido, os alunos podem se questionar em qual seria o sentido de estudar os números complexos visto que, grande parte do currículo do ensino médio, é composto apenas por números reais

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica do mesmo.

Então, o presente trabalho está focado em apresentar os conceitos dos números reais aprendidos na disciplina de Matemática no ensino médio, e o que acontece quando se aplica esses conceitos no conjunto dos números complexos, ou seja, como esses conceitos aprendidos no ensino médio vão se comportar quando aplicado nos números complexos. A opção por este tema deveu-se ao fato também de que, a importância do ensino dos números complexos no Ensino Médio, pois, como esse conjunto numérico não aparece na matriz de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), há a impressão de que o mesmo não seja importante para o aluno de ensino médio.

Além disso, esse trabalho tem como objetivo apresentar de forma detalha as definições, as propriedades, as proposições e teoremas em relação aos números complexos. Uma boa compreensão do conjunto dos números complexos e suas manipulações algébricas e trigonométricas é retomado na graduação, quando o futuro professor de matemática amplia seus conhecimentos com a disciplina de Funções de Uma Variável Complexa. Naturalmente esse trabalho tem a precupação de trazer pontos importantes e detalhes sobre o conjuntos dos números complexos permitindo ao leitor uma compreensão com mais significada.

O trabalho está estruturado em três capítulos, da seguinte forma:

No primeiro capítulo, intitulado História dos Números Complexos, relataram os acontecimentos que culminaram com o no aparecimento dos números complexos, assim como a contribuição de diversos matemáticos nesse processo e os problemas de aceitação pelos quais esses números passaram em diferentes momentos da história.

No segundo capítulo, intitulado Números Complexos, definiu-se de maneira rigorosa os números complexos e apresentaram suas propriedades aritméticas básicas. Além disso, definiu-se o algarismo imaginário i e explicou-se como a definição formal de número complexos se relaciona com a representação desses números na forma $x+yi$, que é a forma usual. Definiu-se também, os conceitos de parte real e imaginária, conjugado e módulo de um número complexo. Outro fato importante apresentado, é a forma polar de um número complexo, além de definir o conceito de argumento. Foi mostrado que todo número complexo não nulo possui exatamente n raízes n-ésimas distintas, e exibiu-se uma fórmula para calcular essas raízes. Introduziu-se os conceitos de exponencial e logaritmo de um número complexo, além de definir as potências com expoentes complexos.

No terceiro capítulo, intitulado Funções Complexas, relatou-se como objeto principal uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ onde domínio A está contido em $\mathbb{C}$. Foram lembrado conceitos importantes sobre funções e em seguida, introduzido as funções de uma variável complexa. Álem de associar noções importantes sobre essas funções. Aprensentou-se exemplos importantes de funções complexas, tais como: funções racionais, funções polinomiais, função exponencial, funções trigonométricas e as funções hiperbólicas. Diante desses exemplos, foi estabelecido algumas propriedades importantes sobre essas funções.

E por fim, nas considerações finais será feito uma reflexão sobre comportamento dos números complexos em comparação ao caso real.

CAPÍTULO 1

HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Resolver equações sempre foi um assunto que seduziu matemáticos ao longo da história. Os Babilônicos por exemplo, já conseguiam resolver algumas equações do 2º grau baseados no que hoje chamamos de “completamento de quadrado”. Mesmo o resultado dessas equações estando corretos, os tabletes que contem essas soluções aparecem sem qualquer justificativa lógica do caminho que foi planejado, que “colocado de maneira assim tão obscura e imprecisa, até um matemático moderno teria dificuldade em entendê-lo [...]” (GARBI, 2009, p.10). Já os gregos, que tinham um grande domínio sobre a geometria, resolveram alguns tipos de equações do 2º grau usando a régua e compasso. A conquista da Grécia por Roma praticamente acabou com o domínio da Matemática Grega. Com o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, a Europa entrou na Idade das Trevas, que “nesse periódo, o fogo sagrado da Rainha das Ciências passou a ser velado por dois outros povos: os árabes e os hindus” (GARBI, 2009, p.21). Os matemáticos hindus avançaram nas pesquisas em Álgebra e Baskara é o nome que imediatamente vem à nossa memória quando falamos de equações do 2º grau. Contudo, o teorema de Baskara não foi descoberta por ele, mas sim pelo matemático hindu Sridhara, no século XI (GARBI, 2009).

Considerando a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, o Teorema de Baskara garante que suas raízes são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde, $\Delta = b^2 - 4ac$. E dependendo da equação quadrática, o Δ pode ser negativo. Mas isso não era considerado um problema para os matemáticos na época, pois eles simplesmente diziam que a equação não tinha uma solução. O interesse pelo estudo da Matemática ressurgiu na Itália, no século XVI. Voltara o interesse em meio da disputa entre dois matemáticos importantes, que são Cardano e Tartaglia, que estavam disputando pela resolução da equação do 3º grau, e naquele momento, perceberam que o conjunto dos números reais não eram suficientes, e as primeiras ideias da criação do conjuntos dos números complexos surgiram (LINTZ, 2007). Essa disputa merece ser falada com mais atenção.

Girolamo Cardano, ou simplesmente Cardano, nasceu em Pavia, no ano de 1501 e veio a falecer em Roma, em 1576. Sua vida foi marcada por contrastes e extremos. Apesar de ser invejoso, traidor, frio e tantas outras qualificações iguais ou piores, Cardano foi um excepcional cientista. Foi autor da obra *Liber de Ludo Aleae*, onde passava uma ideia de probabilidade e também ensinou maneiras de trapacear nos jogos. Sua maior obra, entretanto, foi *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, mais conhecida como *Ars Magna*, publicada na Alemanha em 1545, que na época era o maior compêndio algébrico existente, pois "quando publicou a *Ars Magna*, meia dúzia de anos depois, ele provavelmente era o mais competente algebrista da Europa" (BOYER, 2019, p.206).

Nicolò Fontana, mais conhecido como Tartaglia, tinha único fator em comum com Cardano o enorme talento com a matemática, e a nacionalidade italiana. Tartaglia nasceu em Bréscia no ano de 1500, que durante sua infância muito pobre, no saque de Brescia por tropas francesas, refugiou-se na Catedral, mas foi gravemente ferido por golpes de sabre e, justamente por esse motivo, ficou com profunda cicatriz na boca que lhe provocou um permanente defeito na sua fala (LIMA, 1991). Foi daí que surgiu seu tão famoso apelidado de Tartaglia, que significa gago. No decorrer da sua vida, ele publicou diversas obras mas o que o colocou definitivamente nos registros da história da Matemática foram suas disputas com Cardano.

Sabe-se que, por volta dos anos de 1510, Scipione del Ferro, um matemático italiano da época, professor da Universidade de Bolonha, encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Sabe-se que ninguém superou seu feito, que "resolvendo um problema que tenha desafiado a argúcia dos matemáticos por mais tempo" (LIMA, 1991, p.14). Essa descoberta ocorreu provavelmente em torno de 1515. O mais curioso é que Ferro morreu e nunca publicou nada relacionado ao seu grande feito. Ao que se saiba, Ferro comunicou o segredo dos problemas do tipo "cubo e coisas igual a número" $(x^3 + px = q)$ e "cubo igual a coisas e número" $(x^3 = px + q)$ para seus discípulos, sendo eles Antônio Maria Fior, este que recebeu apenas a regra da solução, e não a prova. Com isso, Fior tentou ganhar conhecimento público com ela (LIMA, 1991). Nesse período, eram muito comuns os desafios entre sábios. Como Tartaglia era um nome que começava ganhar notoriedade no meio cultural na época, Fior fizera então um desafio para Tartaglia. Confiante, e acreditando no seu potencial, Tartaglia aceitou o desafio, apesar de ainda não saber resolver essas equações, que suas únicas armas eram confiar em seu sólido conhecimento e sua inteligência (LIMA, 1991). Tartaglia conseguiu ir além, que mesmo sabendo que Fior conhecia a solução da equações, ele não só deduziu a resolução para este caso, como também resolveu as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Como consequência desse desafio, foi que Fior saiu humilhado diante Tartaglia, que "recusou magnanimamente os 30 banquetes estipulados como prêmio ao vencedor” (LIMA, 1991, p.15). Após seu brilhante triunfo sobre Fior, desafio na qual o deixou muito famoso, Tartaglia então resolveu escrever em suas memórias: “Mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1531” (GARBI, 2006, p. 121).

Nesse período, Cardano estava escrevendo a *Pratica Arithmeticae Generalis*, com ensinamentos sobre as três grandes áreas da matemática: Álgebra, Aritmética e a Geometria. Cardano, ao saber da conquista de Tartaglia conseguiu achar a solução geral da equação de 3º grau, pediu-se para que Tartaglia revelasse, pois sua intenção era para que fosse publicada em seu próximo livro (BOYER, 2019). Obviamente, Tartaglia não concordou com o pedido de Cardano, alegando que ele mesmo iria publicar sua descoberta. Cardano acusou-o, dizendo que não gosta de partilhar da descoberta, chamando-o de egoísta, mas mesmo com a negativa, ele não desistiu.

Após muitas conversas entre Cardano e Tartaglia, com vários pedidos de forma insistente e permanentemente, Cardano então “depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução da cúbica” (EVES, 1995, p.303). Conforme o que seria muito previsível, Cardano quebrou todas as promessas e suplicas que fez, e no ano de 1545, publicou na Ars Magna a fórmula de Tartaglia. Em suma, como em muitos outros casos, após esses acontecimentos não fez justiça a brilhante descoberta de Tartaglia: sua fórmula é até hoje conhecida como a famosa “Fórmula de Cardano”, sendo o próprio admitindo isso em seu livro (BOYER, 2019).

Lembrando que Tartaglia conseguiu solucionar equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$ e não a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Inicialmente, vamos esclarecendo que qualquer equação geral pode ser transformada em qualquer um dos tipos especiais, aqui em mais especifico, a equação $x^3 + px + q = 0$, fazendo $x = y + m$ e calculando m de modo que o termo de grau 2 seja anulado (GARBI, 2009). Com isso, seja a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Se $x = y + m$, então:

$$a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0$$
$$a(y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3) + b(y^2 + 2ym + m^2) + cy + cm + d = 0$$
$$ay^3 + 3ay^2m + 3aym^2 + am^3 + by^2 + 2bym + bm^2 + cy + cm + d = 0$$

ou

$$ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3a^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Fazendo

$$b + 3am = 0$$

tem-se,

$$m = -\frac{b}{3a}$$

Com isso, a nova equação de grau 3 em y será do tipo $y^3 + py + q = 0$, e nesse caso souberam resolvê-la, e sendo capaz de encontrar que o valor de x que é $y + m$. Diante disso, quando Tartaglia encontrou a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, ele foi capaz de generalizar sua resposta, e não apenas ficando em casos particulares da problemática, o que aumenta ainda mais os méritos do seu feito (EVES, 2004).

Geralmente, as grandes descobertas constantemente partem de uma ideia fundamental. E no caso de Tartaglia, ele partiu do pressuposto que a solução procurada era composta de 2 parcelas. Então, assim ele supões:

$$x = A + B. \tag{1-1}$$

Elevando os dois lados da equação (1-1) ao cubo, temos

$$x^3 = (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

então,

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B), \tag{1-2}$$

como

$$A + B = x. \tag{1-3}$$

Substituindo (1-2) em (1-3), temos que:

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx,$$

ou ainda,

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

mas, ao mesmo tempo que

$$x^3 + px + q = 0.$$

Portanto,

$$p = -3AB \quad \text{e} \quad q = -(A^3 + B^3),$$

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \quad \text{e} \quad A^3 + B^3 = -q.$$

Considerando A^3 e B^3 como variáveis, assim o problema equivale satisfazer uma equação do 2º grau da forma:

$$z^2 - Sz + P = 0$$

onde,

$$S = \text{Soma das raízes } A^3 \text{ e } B^3$$
$$P = \text{Produto das raízes } A^3 \text{ e } B^3$$

isto é,

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

com isso, calculando o discriminante:

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}.$$

Note que,

$$A^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \quad \text{e} \quad B^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

mas, ao mesmo tempo

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad B^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Como $x = A + B$, portanto

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Com isso, a Fórmula de Cardano acabou gerando resultados que desafiavam os matemáticos nesse período. Resultados estes, que acabaram descobrindo o conjunto dos números complexos. Como por exemplo, a equação seguinte:

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Sabendo que as raízes da equação são: $x = 4, x = -2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$, todavia, ao aplicar a equação acima na Fórmula de Cardano, notamos que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

e assim, pode-se observar questões realmente intrigrantes. Além de ter um caso onde acontece extração de raízes quadradas de números negativos, como também extração de raíz cúbica de números desconhecidos, onde naquele momento mostrou-se que o conjunto dos números reais eram insuficientes, quando falou-se de equações algébricas. Isso também aconteceu com os Gregos na antiguidade, quando verificaram a insuficiência dos números racionais com construção do número irracional $\sqrt{2}$ (STEWART, 2016). Com isso o conceito de número precisava ser expandido. Mas um matemático conseguiu ir além do conjunto dos números reais, este, chamado de Rafael Bombelli, nascido na Itália no ano de 1530, onde se tornou um engenheiro hidráulico (IEZZI, 2002).

Bombelli teve uma ideia de supor que os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Note como foi a dedução de Bombelli:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} \tag{1-4}$$

e

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}. \tag{1-5}$$

Elevando os dois lados das equações (1-4) e (1-5) ao cubo, temos que:

$$2+\sqrt{-121} = (a+\sqrt{-b})^3 \tag{1-6}$$

e

$$2-\sqrt{-121} = (a-\sqrt{-b})^3. \tag{1-7}$$

Somando as equações (1-6) e (1-7) termo a termo, obtém-se:

$$2+\sqrt{-121}+2-\sqrt{-121} = (a+\sqrt{-b})^3+(a-\sqrt{-b})^3.$$

Aplicando-se as propriedades de produtos notáveis e das leis de cancelamento da soma, tem-se

$$-6ab = 4-2a^3$$

logo,

$$b = \frac{4-2a^3}{-6a}.$$

Para $a = 2$, então

$$b = \frac{4-2.2^3}{-6.2} = \frac{4-16}{-12} = 1.$$

Com isso, para

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121} \tag{1-8}$$

e

$$(2-\sqrt{-1})^3 = 2-\sqrt{-121}. \tag{1-9}$$

Somando as equações (1-8) e (1-9) termo à termo, temos que:

$$(2+\sqrt{-1})^3+(2-\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121}+2-\sqrt{-121}.$$

Aplicando-se as propriedades de produtos notáveis e das leis de cancelamento da soma, tem-se

$$8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}+8-12\sqrt{-1}-6+\sqrt{-1} = 4.$$

Assim,

$$x = (2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1}) = 4$$

que era o resultado que Bombelli esperava obter.

Diante disso, foi possível estabelecer algumas regras para resolver equações com $\sqrt{-1}$. Note que,

$$
\begin{aligned}
&(a)\ (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1\\
&(b)\ (-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1\\
&(c)\ (-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1\\
&(d)\ (\pm 1)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}\\
&(e)\ (\pm 1)(-\sqrt{-1}) = \mp\sqrt{-1}.
\end{aligned}
$$

Além disso, foi possível estender a regra para a soma de dois números da forma $m+n\sqrt{-1}$;

$$(a+b\sqrt{-1}+(c+d\sqrt{-1}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{-1}.$$

Neste sentido, a ***Teoria dos Números Complexos***, conhecido como um ramo gigantesco da Matemática, estava pronta para o desenvolvimento e aplicações em diversas áres do conhecimento humano.

Cardano foi precursor no manuseio dos números complexos. Desta forma é justo creditar a ele a honraria de ser o primeiro matemático a realizar algumas opeações com números complexos. Cardano constatou que se alguém tentar dividir 10 em duas partes de modo que seu produto seja igual 40, verificará que isto é impossível. Todavia, o problema pode ser resolvido da seguinte maneira, segundo Cardano:

$$
\begin{cases}
x+y=10 & \text{(1-10)}\\
xy=40. & \text{(1-11)}
\end{cases}
$$

Elevando os dois lados da igualdade de (1-10) ao quadrado, e multiplicando os dois lados da igualdade de (1-11) por 4. Logo, obtém-se:

$$
\begin{cases}
x^2+2xy+y^2=100 & \text{(1-12)}\\
4xy=160. & \text{(1-13)}
\end{cases}
$$

Substituindo (1-13) de (1-12) e aplicando-se manipulações matemáticas, tem-se

$$x^4-20x^2+1600=0.$$

Fazendo $u=x^2$, note que

$$u^2-20u+1600=0.$$

Calculando o discriminante, temos que

$$\Delta = (-20)^2 - 4(1)(1600) = 400 - 6400 = -6000$$

com isso,

$$u = \frac{-(-20) \pm \sqrt{-6000}}{2} = \frac{20 \pm 20\sqrt{-15}}{2} = 10 \pm 10\sqrt{-15}.$$

Diante disso, tem-se

$$x^2 = u$$

com isso,

$$x^2 = 10 \pm 10\sqrt{-15}.$$

Fazendo $x = a + bi$, tem-se

$$(a + bi)^2 = 10 + 10\sqrt{-15}$$

então

$$(a^2 - b^2 + 2abi) = 10 + 10\sqrt{15}i$$

logo,

$$(a^2 - b^2) = 10 \quad \text{e} \quad 2ab = 10\sqrt{15} \tag{1-14}$$

consequêntimente, da segunda equação (1-14), tem-se

$$a = \frac{5\sqrt{15}}{b}. \tag{1-15}$$

Substituindo (1-15) em (1-14), obtém-se

$$\left(\frac{5\sqrt{15}}{b}\right)^2 - b^2 = 10.$$

Aplicando-se algumas manipulações matemáticas, obtém-se

$$-b^4 - 10b^2 + 375 = 0.$$

Fazendo $v = b^2$, obtém-se

$$-v^2 - 10v + 375 = 0.$$

Calculando discriminante, tem-se

$$\Delta = (-10)^2 - 4(-1)(375) = 100 + 1500 = 1600$$

com isso,

$$v = \frac{-(-10) \pm \sqrt{1600}}{-2} = \frac{-10 \pm \sqrt{1600}}{2} = \frac{-10 \pm 40}{2}$$

logo,

$$v_1 = \frac{-10 + 40}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

e

$$v_2 = \frac{-10 - 40}{2} = \frac{-50}{2} = -25.$$

Diante disso, temos que

$$b^2 = v$$

para $v = -25$, temos

$$b^2 = -25 \quad \text{implica que} \quad b = \pm\sqrt{-25}.$$

Nesse caso, não temos solução para $b \in \mathbb{R}$, pois x^2 não pode ser negativo para $x \in \mathbb{R}$. Com isso, para $v = 15$, temos

$$b^2 = 15 \quad \text{implica que} \quad b = \pm\sqrt{15}.$$

Substituindo $b = \pm\sqrt{15}$ em (1-15), tem-se

$$a_1 = \frac{5\sqrt{15}}{b} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = 5$$

e

$$a_2 = \frac{5\sqrt{15}}{b} = \frac{5\sqrt{15}}{-\sqrt{15}} = -5.$$

Substituindo $a = \pm 5$ e $b = \pm\sqrt{15}$ em $x = a + bi$, obtém-se

$$x_1 = a + bi = 5 + \sqrt{15} \quad \text{e} \quad x_2 = a + bi = -5 - \sqrt{15}.$$

Analogamente, para $10 - 10\sqrt{15}i$, obtém-se

$$x_3 = -5 + \sqrt{15} \quad \text{e} \quad x_4 = 5 - \sqrt{15}.$$

Como x não pode ser negativo, temos como soluções:

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}. \tag{1-16}$$

Substituindo (1-16) em (1-10), tem-se

$$y = 5 \mp \sqrt{-15}.$$

Portanto,

$$x = 5 \pm \sqrt{-15} \quad \text{e} \quad y = 5 \mp \sqrt{-15}.$$

Diante do resultado acima, observa-se que as soma dos números resulta em 10 e que seu produto é igual a 40.

Outra observação a ser feita, é quanto a um equivoco sobre à origem dos números complexos, que é frequentemente cometido por alguns professores e livros, onde afirmam que as equações de grau 2 que desencadearam a base teórica que havia naquela época. Trabalho que durou mais de dois século, até a ideia percursora de Bombelli.

Com o tempo, foram sendo descobertas relações entre números e formas, mesmo com as origens independentes da Aritmética e da Geometria. A ideia de empregar sistemas de coordenadas para definir posições de pontos no plano e no espaço já havia sido utilizada no século III a.C. por Apolônio, em seus trabalhos sobre secções cônicas. Todavia, a Geometria Analítica, como hoje é conhecida, foi inventada de forma independente e quase simultaneamente, por dois geniais matemáticas franceses na primeira metade do século XVII, sendo eles: Pierre de Fermat e René Descartes, que "só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados" (EVES, 2004, p. 383). Considerado como a pedra da Geometria Analítica, o trabalho denominado como *La Géométrie*, publicado em

1637 por Descartes, que escreveu no apêndice de seu mais famoso livro *Discurso Sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade nas Ciências*, ao contrario de Fermat, que não se preocupou em publicar suas ideias.

Descartes através do domínio que obteve com a Geometria Analítica, estudou entre outras coisas, as equações algébricas. Infelizmente, Descartes na Géométrie fez uma frase imprudente que acabou por consagrar uma denominação inapropriada para os números que envolvem a raiz quadrada de valores negativos. Em uma passagem do Discurso do Método, Descartes escreveu a seguinte frase: ***"Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias"***.

Por esse motivo, até hoje o número $\sqrt{-1}$ é chamado de "número imaginário", e foi, portanto, Descartes que o batizou. O termo que se consagrou juntamente com a expressão "números complexos". Infelizmente, são designações um tanto inadequadas, subjetivas e nada matemático, pois "tanto números reais como imaginários têm exatamente o mesmo status lógico. São conceitos humanos que modelam a realidade, mas não são reais em si mesmos" (STEWART, 2016, p.21).

Apareceram outros matemáticos importantes na história após Bombelli, que deram grandes contribuições para desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre eles o matemáticos Francês Abraham de Moivre. Leonhard Euler foi o matemático mais decisivo sobre o assunto, e além disso, fez o trabalho mais importante. Euler, nasceu no ano de 1707, em Basileia, Suíça, em um período quando o Cálculo Diferencial e Integral, inventado pelo seu mentor Newton e Leibniz, estavam em processo de expansão. Euler foi uma pessoa boa, bem humorada e bastante generoso, além de ter sido um dos matemáticos que mais produziu e publicou em todos os tempos. Perdera a vista esquerda aos 28 anos de idade e viveu totalmente cego os últimos 18 anos de sua vida, período em que continuou produzindo, pois era dotado de uma memória prodigiosa, e que falecerá no ano de 1783 (SIMMONS, 2002). Devido uma pergunta de seu amigo Jacques Bernoulli sobre juros compostos, Euler aprofundou-se sobre esse questionamento, através de pesquisas iniciadas por outros matemáticos, e foi capaz de descobrir os segredos do número e, que até hoje seu nome está ligado a esse número irracional, conhecido como número de Euler, e que aparece como uma importante ferramente para estudos no campo da Física, Engenharia e da Matemática Pura. Dentre as inúmeras contribuições de Euler foi notável seu empenho na melhoria da simbologia. Muitas das notações que conhecemos hoje foram introduzidas por ele, tais como a destaca-se o número i substituindo $\sqrt{-1}$. Euler passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo serão apresentadas algumas importantes definições sobre o conjunto dos números complexos, serão também demonstradas algumas propriedades, dentre elas a propriedade que caracteriza o conjunto dos números complexos como um *corpo*. Além disso, serão demonstrados alguns resultados importantes utilizando de técnicas de manipulação entre números complexos, como por exemplo, será exposto uma demonstração da lei dos cossenos. Serão discutidas também nesse capítulo as representações geoméricas de algumas operações envolvendo números complexos, onde essas representações foram elaboradas pelo autor utilizando o software Geogebra.

As definições, propriedades e teoremas deste capítulo foram baseadas nos textos dos livros: *Variáveis complexas e aplicações* de Geraldo Ávila [1], *Trigonometria e números complexos* de Manfredo P. do Carmo, Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner [3], *Introdução às funções de uma variável* de Cecília S. Fernandez e Nilson C. Bernades Jr [5].

2.1 Corpo dos Números Complexos

Seja $\mathbb{C}$ corpo dos números complexos, definido por:

$$\mathbb{C} = \left\{(x,y); x \in \mathbb{R} \; e \; y \in \mathbb{R}\right\},$$

possuindo as seguintes operações de adição e multiplicação, isto é: se $z = (x,y)$ e $w = (a,b)$ pertencem a $\mathbb{C}$, logo

$$z + w = (x + a, y + b) \quad \text{e} \quad zw = (xa - yb, xb + ya).$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de números complexos. Observe que o número complexo $(0,0)$ pode ser denotado simplesmente por 0 e o número complexo $(1,0)$ por simplesmente por 1. Para todo $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, definimos

$$-z = (-x, -y) \quad \text{e} \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Se $z \neq 0$, o número z^{-1} também pode ser denotado da forma $1/z$ ou $\frac{1}{z}$. Em seguida, serÃ¡ demonstrado uma proposição, que esta relacionada ao fato dos números complexos ser um corpo.

Proposição 2.1.1 *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:*

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$ *(associatividade da adição).*
$(b) z + w = w + z$ *(comutatividade da adição).*
(c) $0 + z = z$ *(elemento neutro).*
(d) $z + (-z) = 0$ *(elemento oposto).*
(e) $z(wt) = (zw)t$ *(associatividade da multiplicação).*
(f) $zw = wz$ *(comutatividade da multiplicação).*
(g) $1z = z$ *(elemento unidade).*
(h) $zz^{-1} = 1$ *se* $z \neq 0$ *(elemento inverso).*
(i) $z(w + t) = zw + zt$ *(distributividade da multiplicação em relação à adição).*
Demonstração. Todas as propriedades acima decorrem diretamente das definições das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$. Com isso,
(a) Se $z = (x, y)$, $w = (a, b)$ e $t = (c, d)$, então

$$\begin{aligned} z + (w + t) &= (x, y) + (a + c, b + d) = (x + (a + c), y + (b + d)) \\ &= ((x + a) + c, (y + b) + d) = (x + a, y + b) + (c, d) \\ &= (z + w) + t, \end{aligned}$$

usamos a associatividade da adição de números reais.
(b) Se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$, então

$$z + w = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) = (a + x, b + y) = (a, b) + (x, y) = w + z,$$

usamos a comutatividade da adição de números reais.
(c) Se $z = (x, y)$, então

$$0 + z = 0 + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y) = z,$$

usamos o elemento neutro de números reais.

(d) Se $z = (x,y)$, então

$$z + (-z) = (x,y) + [-(x,y)] = (x,y) + (-x,-y) = (x-x, y-y) = (0,0),$$

usamos o elemento unidade de números reais.
(e) Se $z = (x,y), w = (a,b)$ e $t = (c,d)$, então

$$\begin{aligned} z(wt) &= (x,y)[(a,b)(c,d)] = (x,y)[(ac+ad+bc+bd)] \\ &= (acx+adx+bcx+bdx+cy+ady+bcy+bdy) \\ &= [c(ax+bx+ay+by)+d(ax+bx+ay+by)] \\ &= [(ax+bx+ay+by)](c,d) = [x(a+b)+y(a+b)](c,d) \\ &= [(x,y)(a,b)](c,d) = (zw)t, \end{aligned}$$

usamos a associatividade da multiplicação de números reais.
(f) Se $z = x+yi$ e $w = a+bi$, então

$$zw = (x+yi)(a+bi) = (ax+bxi+ayi-by) = ax-by+(bx+ay)i$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} wz &= (a+bi)(x+yi) = (ax+ayi+bxi-by) \\ &= ax-by+(bx+ay)i \end{aligned}$$

logo,

$$zw = wz,$$

usamos a comutatividade da multiplicação de números reais.
(g) Se $z = (x,y)$, então

$$1z = 1(x,y) = (1x, 1y) = (x,y) = z,$$

usamos o elemento unidade de números reais.
(h) Se $z = (a+bi)$, então

$$zz^{-1} = (a+bi)\cdot\frac{1}{a+bi} = \frac{(a+bi)}{(a+bi)}\cdot\frac{(a-bi)}{(a-bi)} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1,$$

usamos o elemento inverso de números reais.
(i) Se $z = (x+yi)$, $w = (a+bi)$ e $t = (c+di)$, então

$$\begin{aligned} z(w+t) &= (x+yi)[(a+bi)+(c+di)] = (x+yi)[(a+c)+(b+d)i] \\ &= (ax+cx+ayi+cyi+bxi+dxi-by-dy) \\ &= [x(a+bi)+yi(a+bi)+x(c+di)+yi(c+di)] \\ &= [(x+yi)(a+bi)+(a+bi)(e+fi)] = zw+zt, \end{aligned}$$

usamos a distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais.

■

Através destas propriedades, pode-se deduzir todas as regras de operações aritméticas sobre o conjunto dos números reais, e por isso são tão fundamentais. Por exemplo, de (g), implica que $(-1)1 = -1$ e de (c), (g) e (i) implica que $a+a0 = a(1+0) = a1 = a$, ou seja, $a0 = 0$. Através das propriedades acima, pode-se deduzir a tão conhecida "regra dos sinais", isto é:

$$(-1)(-1) = 1.$$

Basta observar que

$$(-1)(-1)+(-1) = (-1)(-1)+(-1)1 = (-1)[(-1)+1] = (-1)0 = 0$$

logo,

$$(-1)(-1)+(-1)+1 = 1$$

donde implica que

$$(-1)(-1) = 1.$$

Daí para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $x^2 = xx$ com $x \geqslant 0$. Em outras palavras, no conjunto dos números reais não é possível encontrar um número elevado ao quadrado que seja um número negativo, essa impossibilidade é uma das justificativas para nascimento do conjunto dos números complexos. Querem que possam ser somados e multiplicados um conjunto de objetos, que chamaremos de números complexos,dispondo esses de forma que seja possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. De fato, querem além disso, que os números reais sejam objetos deste conjunto e que as operações de adição e multiplicação quando feitas sobre reais, deem o mesmo resultado que as operações que já conhecemos.

A definição dos números complexos em si é bastante variada, onde iremos adotar a seguinte definição:

Definição 2.1.1 *Os números complexos constituem um conjunto $\mathbb{C}$, onde estão definidas operações de adição e de multiplicação com as propriedades (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h) e (i). Além disso, os números reais estão incluídos em $\mathbb{C}$ e:*

(1) *Existe um número complexo i tal que acontece $i^2 = -1$.*

(2) *Para todo $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito de maneira única na forma $x + yi$, onde a, $b \in \mathbb{R}$. Usa-se a notação $\mathrm{Re}(a+bi) = a$ e $\mathrm{Im}(a+bi) = b$. Ou seja, a é chamado como a parte real de z, e b é chamado como a parte imaginária de z. Isto é,*

$$\mathrm{Re}\,(z) = x \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\,(z) = y.$$

Quando a parte real for igual a zero, diz-se que z é imaginário puro. Diz-se também, que i é a unidade imaginária de um número complexo.

Tendo definido as propriedades de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$ definiremos agora de maneira usual, as operações de subtração e divisão para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z - w = z + (-w) \quad \text{e} \quad \frac{z}{w} = zw^{-1} \text{ se } w \neq 0.$$

Também definido de maneira usual, a *potenciação* é dada seguinte maneira:

$$z^0 = 1, \quad z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \cdots z^{-1}}_{n \text{ vezes}} \text{ se } z \neq 0 \quad (n \geq 1).$$

Diversas propriedades das operaçẽs aritméticas de números reais são válidas para números complexos. Exemplo disso são a soma e o produto de duas frações z_1/w_1 e z_2/w_2 de números complexos, que podem ser obtidos pelas fórmulas

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \qquad \text{e} \qquad \frac{z_1}{w_1}\frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}.$$

Um conjunto onde estão definidas as operações de adição e multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas na **Proposição** (2.1.1) é chamado de corpo. É justamente por esse motivo que chamamos $\mathbb{C}$ de corpo dos números complexos. Isto também vale o por quê do $\mathbb{R}$ ser chamado de corpo dos números reais e $\mathbb{Q}$ chamado corpo dos números racionais.

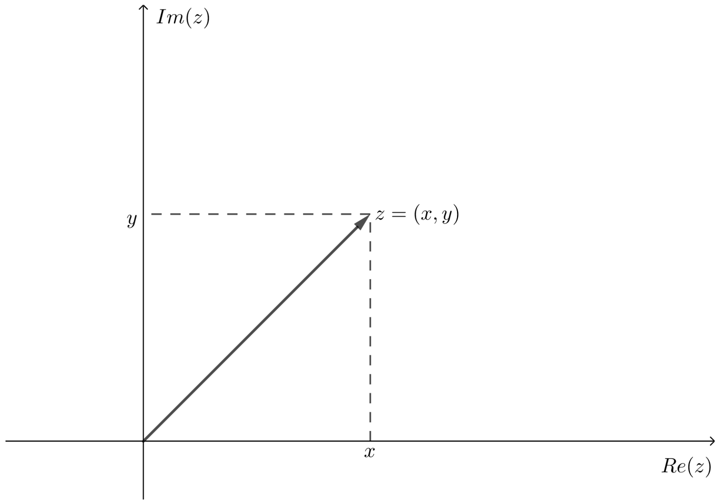
2.2 Conjugado e módulo

Ao definir conjugado e módulo de um número complexo é possível verificar algumas propriedades que facilitam os cálculos envolvendo esses números. Diante disso, o *conjugado* de um número complexo $z = x + yi$, é definido como sendo o número complexo

$$\overline{z} = x - yi.$$

Como um número complexo $z = x + yi$ é o par ordenado (x, y), podemos fazer a representação geométrica como o ponto do plano cartesiano de abscissa x e ordenada y, ou como o vetor que liga a origem a este ponto, como mostrado na **Figura** (2.1). Diante disso, chama-se o plano cartesiano de *plano complexo*, o eixo dos x de *eixo real*, e o eixo dos y de *eixo imaginário*.

Figura 2.1: *Módulo de um número complexo.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

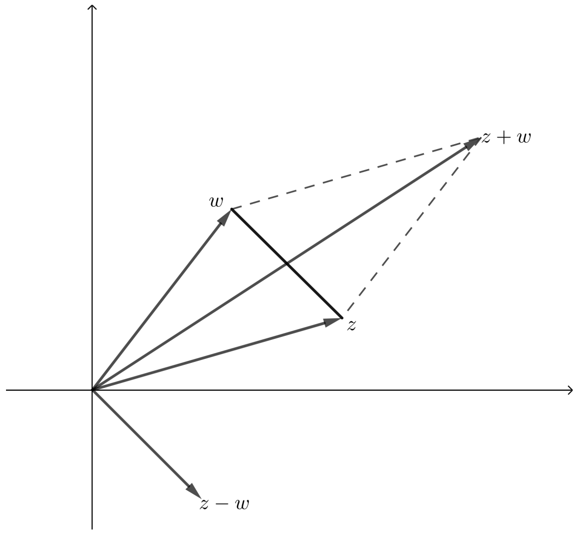
Abaixo, na **Figura** (2.2) as interpretações geométricas da adição e da subtração de números complexos.

A interpretração geométrica de $\overline{z}$ é obtido através da reflexão de z em relação ao eixo x. A operação de passar ao conjugado de um número complexo possui algumas propriedades úteis, que resumi-se na proposição abaixo.

Proposição 2.2.1 *Sejam os números complexos z, w e t, então as seguintes propriedades se verificam:*

(a) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ *e* $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
(b) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ *se* $w \neq 0$.
(c) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,z$ *e* $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,z$. (d) $z \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $\overline{z} = z$.
(e) z *é imaginário puro se e somente se* $\overline{z} = -z$.

Figura 2.2: *Soma e diferença entre números complexos.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. (a) Primeiramente provar que z = $\overline{\overline{z}}$. De fato, se $z = x + yi$, então

$$z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi \Rightarrow \overline{\overline{z}} = x + yi$$

portanto,

$$z = \overline{\overline{z}}.$$

Agora iremos provar que $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$. De fato, se $z = x + yi$ e $w = a + bi$, então

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{(x+yi)+(a+bi)} = \overline{(x+a)+(y+b)i} = (x+a)-(y+b)i\\ &= (x+a)+(-y-b)i = (x-yi)+(a-bi) = \overline{z}+\overline{w}.\end{aligned}$$

De maneira analógica, agora iremos provar que $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$. De fato, se $z = x + yi$ e $w = a + bi$, então

$$\begin{aligned}\overline{z-w} &= \overline{(x+yi)-(a+bi)} = \overline{(x-a)+(y-b)i} = (x-a)-(y-b)i\\ &= (x-a)+(-y+b)i = (x-yi)-(a-bi) = \overline{z}-\overline{w}.\end{aligned}$$

Por fim, iremos provar que $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$. De fato, se $z = x + yi$ e $w = a + bi$, então

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(x+yi)(a+bi)} = \overline{ax+bxi+ayi-by} = \overline{(ax-by)+(bx+ay)i} = (ax-by)-(bx+ay)i\\ &= (ax-by)+(-bx-ay)i = ax-by-bxi-ayi = ax-ayi-bxi+byi^2\\ &= x(a-bi)-yi(a-bi) = (x-yi)(a-bi) = \overline{(x+yi)}\;\overline{(a+bi)} = \overline{z}\,\overline{w}.\end{aligned}$$

(b) Se $z = x + yi$ e $w = a + bi$, então

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{x+yi}{a+bi}\right)} = \overline{\left(\frac{x+yi}{a+bi}\right)}\,\overline{\left(\frac{a-bi}{a-bi}\right)} = \overline{\left(\frac{x+yi}{a+bi}\right)\left(\frac{a-bi}{a-bi}\right)} = \overline{\left(\frac{ax-bxi+ayi+by}{a^2+b^2}\right)}$$
$$= \overline{\left(\frac{(ax+by)-(bx-ay)i}{a^2+b^2}\right)} = \frac{(ax+by)+(bx-ay)i}{a^2+b^2} = \frac{ax+by+bxi-ayi}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{a(x-yi)+bi(x-yi)}{a^2+b^2} = \frac{(a+bi)(x-yi)}{a^2-b^2i^2} = \frac{(a+bi)(x-yi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{(x-yi)}{(a+bi)}\frac{(a+bi)}{(a-bi)}$$
$$= \frac{x-yi}{a-bi} = \frac{\overline{x+yi}}{\overline{a+bi}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

(c) Primeiramente iremos provar que $z + \overline{z} = 2\text{Re}\,(z)$. De fato, se $z = x + yi$, então

$$z + \overline{z} = x + yi + x - yi = (x + x) + (y - y)i = 2x = 2\text{Re}\,(z).$$

Por fim, iremos provar que $z - \overline{z} = 2i\text{Im}\,(z)$. De fato, se $z = x + yi$ e $w = a + bi$, então

$$z - \overline{z} = x + yi - (x - yi) = (x - x) + (y + y)i = 2yi = 2i\text{Im}\,(z).$$

(d) Se $z \in \mathbb{R}$, note que $z = a$ com $\text{Im}\,(z) = 0)$ o que implica $\overline{z} = a$. Portanto, $\overline{z} = z$. Reciprocamente, se $\overline{z} = z$, então para que esse fato aconteça, deverá satisfazer as seguintes condições:

$$\text{Re}\,(z) = \text{Re}\,(\overline{z}) \quad \text{o que implica} \quad a = a$$

e

$$\text{Im}\,(z) = \text{Im}\,(\overline{z}) \quad \text{então} \quad b = -b \quad \text{consequentemente} \quad b = 0.$$

Portanto, z é um *número real*.

(e) De fato, se z é imaginário puro, então $z = bi$ consequentemente $-z = -bi$. Portanto, $\overline{z} = -z$. Reciprocamente, se $\overline{z} = -z$, então para que esse fato aconteça, deverá satisfazer as seguintes condições:

$$\text{Re}\,(z) = \text{Re}\,(\overline{z}) \quad \text{então} \quad -a = a \quad \text{consequentemente} \quad a = 0.$$

e

$$\text{Im}\,(-z) = \text{Im}\,(\overline{z}) \quad \text{o que implica} \quad b = b.$$

Portanto, z é *imaginário puro*.

■

Podemos deduzir através da noção de conjugado, a expressão do inverso de um número complexo $z = x + yi \neq 0$ da seguinte maneira:

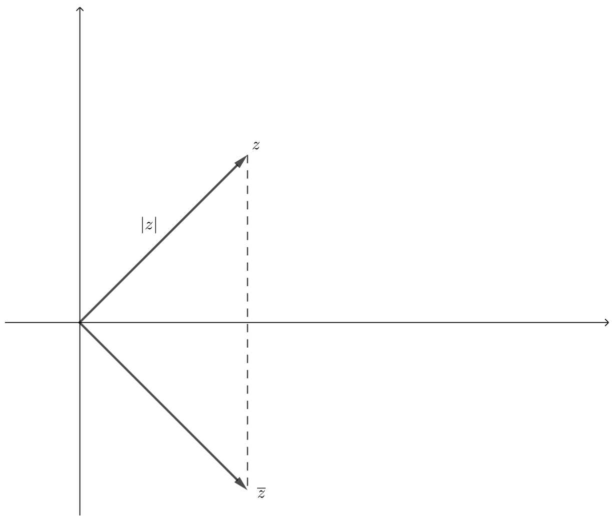
$$z^{-1} = \left(\frac{1}{x+yi}\right) = \left(\frac{1}{x+yi}\right)\left(\frac{\overline{x+yi}}{\overline{x+yi}}\right) = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)i.$$

O módulo de um número complexo $z = x + yi$ é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Analisando a interpretação geométrica, o número real $|z|$ nos dá o comprimento do vetor correspondente a z no plano complexo, como mostrado na **Figura** (2.3). Mais que isso, $|z-w|$ é a distância entre os pontos do plano que representam z e w.

Figura 2.3: *Módulo e o Conjugado.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na proposição abaixo, algumas propriedades dos conceitos de módulo de um número complexo.

Proposição 2.2.2 *As seguintes propriedades valem para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:*

(a) $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ e $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.
(b) $|z|^2 = z\bar{z}$, $|\bar{z}| = |z|$ e $|zw| = |z||w|$.
(c) $|z/w| = |z|/|w|$ se $w \neq 0$.
(d) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(e) $|z+w| \geq ||z|-|w||$.

Demonstração. (a) Primeiramente provar que $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$. De fato, se $z = x+yi$, então

$$z = x+yi \text{ o que implica } |z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |\operatorname{Re} z| \geq \operatorname{Re} z.$$

Portanto,

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|.$$

Agora iremos provar que $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$. De fato, se $z = x+yi$, então

$$z = x+yi \text{ o que implica } |z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{b^2} = |\operatorname{Im} z| \geq \operatorname{Im} z.$$

Portanto,

$$\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im}\, z| \leq |z|.$$

(b) Primeiramente iremos provar que $z^2 = z\overline{z}$. De fato, se $z = x+yi$, então

$$|z|^2 = |x+yi|^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2+y^2 = (x+yi)(x-yi) = z\overline{z}.$$

Agora iremos provar que $|\overline{z}| = |z|$. De fato, se $z = x+yi$, então

$$|\overline{z}| = |\overline{x+yi}| = |x-yi| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|.$$

Por fim, provaremos que $|zw| = |z||w|$. De fato, se $z = x+yi$ e $w = a+bi$, então

$$\begin{aligned}
|zw| &= |(x+yi)(a+bi)| = |ax+bxi+ayi-by| = |(ax-by)+(bx+ay)i| \\
&= \sqrt{(ax-by)^2+(bx+ay)^2} = \sqrt{a^2x^2-2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2} \\
&= \sqrt{x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)} = \sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)} = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2} \\
&= |z||w|.
\end{aligned}$$

(c) De fato, pelo item (b) da **Proposição** (2.2.1) e pelo item (b) da **Proposição** (2.2.2), temos que

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2 = \frac{z}{w}\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{z}{w}\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{z\overline{z}}{w\overline{w}} = \frac{|z|^2}{|w|^2}$$

portanto,

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ se } w \neq 0.$$

(d) De fato, se $z = x + yi$ e $w = a + bi$. Então:

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\text{Re}(z\overline{w}) + |w|^2. \tag{2-1}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{\overline{z}w} + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + [(x+yi)\overline{(a+bi)}] + [\overline{(x+yi)\overline{(a+bi)}}] + |w|^2 \\
&= |z|^2 + [(x+yi)(a-bi)] + [\overline{(x+yi)(a-bi)}] + |w|^2 \\
&= |z|^2 + [(x+yi)(a-bi)] + [(x-yi)(a+bi)] + |w|^2 \\
&= |z|^2 + (ax - bxi + ayi + by + ax + bxi - ayi + by) + |w|^2 \\
&= |z|^2 + (2ax + 2by) + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\text{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2,
\end{aligned}$$

pois,

$$z\overline{w} = (x+yi)(a-bi) = ax - bxi + ayi + by.$$

Assim,

$$\text{Re}\,(z\overline{w}) = ax + by \quad \text{e} \quad 2\text{Re}\,(z\overline{w}) = 2(ax+by).$$

Usando o item (b) da **Proposição** (2.2.1), tem-se

$$|z|^2 + 2\text{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

pelos itens (a) e (b) da **Proposição** (2.2.2), segue de (2-1) que

$$|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2.$$

Portanto,

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Observação 2.2.1 *A desigualdade (d) é conhecida como desigualdade triangular.*

(e) Pela desigualdade triangular,

$$|z| = |(z+w) - w| \leq |z+w| + |-w| = |z+w| + |w|,$$

donde

$$|z+w| \geq |z| - |w|.$$

Trocando os papéis de z e w na desigualdade acima, obtemos

$$|z+w| \leq |z| - |w| \quad \text{o que implica} \quad |w| - |z| \geq |z+w|$$

e

$$|z+w| \leq |z| - |w| \quad \text{o que implica} \quad |z| - |w| \leq -|z+w|$$

com isso,

$$-|z+w| \leq |z| - |w| \leq |z+w| \quad \text{o que implica} \quad ||z| - |w|| \leq ||z+w|| = |z+w|.$$

Portanto,

$$||z| - |w|| \leq |z+w|.$$

■

Pode-se observar, que se $z \neq 0$, o item (b) da **Proposição** (2.2.2) implica que

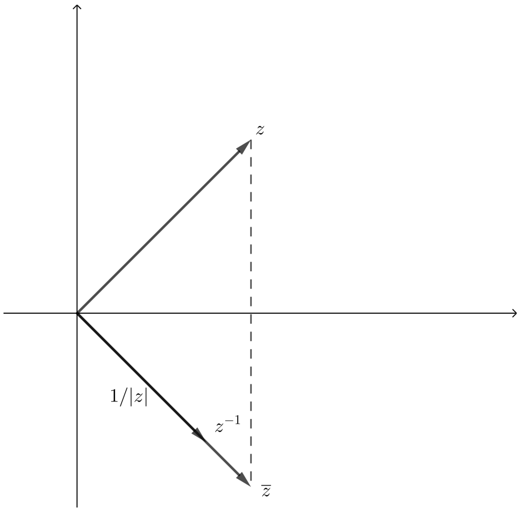
$$|z|^2 = z\overline{z} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

então,

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{2-2}$$

Em um caso particular, $z^{-1} = \overline{z}$ se $|z| = 1$. Pode-se observar que essa condição relaciona os dois conceitos: conjugado e módulo. A identidade (2-2) mostra como z e z^{-1} vão se comportar geometricamente, ou seja, z^{-1} na direção de $\overline{z}$ e tem módulo $1/|z|$, como mostrado na **Figura** (2.4).

Figura 2.4: *Inverso de um número complexo.*

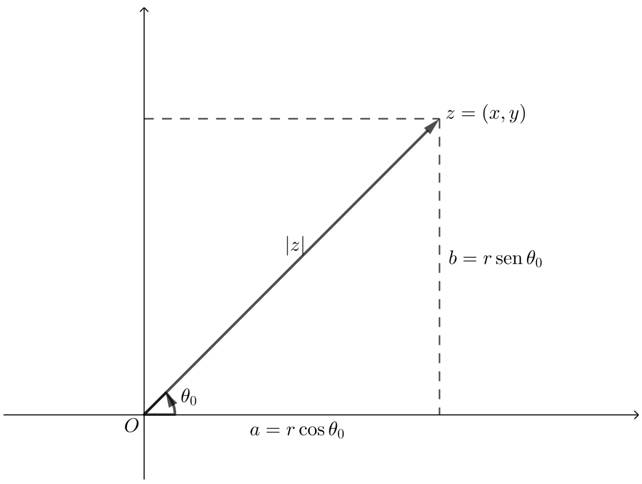


Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3 Trigonometria e a forma polar

Um número complexo $z = x + yi$ pode ser pensado como um ponto do plano, de coordenadas (x, y) ou como um vetor $\overrightarrow{Oz}$, de origem O e extremidade (x, y). A representação $z = x + yi$ da ênfase aos elementos geométricos do vetor $\overrightarrow{Oz}$ é obtida da seguinte maneira: Seja θ_0 o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor corresponde a z no sentido anti-horário, e indiquemos por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o comprimento de $\overrightarrow{Oz}$, como mostrado na **Figura** (2.5).

Figura 2.5: *Forma polar de um número complexo.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então

$$\frac{x}{|z|} = \cos\theta_0, \qquad \frac{y}{|z|} = \mathrm{sen}\,\theta_0$$

isto é,

$$z = x + yi = |z|\cos\theta_0 + |z|i\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = |z|(\cos\theta_0 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_0).$$

Com isso, é sempre possível representar z na forma

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta). \tag{2-3}$$

A representação $z = |z|(\cos\theta_0 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_0)$ é chamada a *forma trigonométrica* ou também conhecido como uma *representação polar* do número complexo z.

Nota-se que substituindo θ_0 na expressão acima por $\theta_0 + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, o complexo z não se altera. Isso significa que, se θ satisfaz (2-3), então $\cos\theta = \cos\theta_0$ e $\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\theta_0$, o que implica que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Diante disso, o conjunto $\arg z$ de todos argumentos de z é dado por

$$\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tomando como exemplo o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, temos

$$|z| = \sqrt{4} = 2,$$

e portanto

$$\frac{a}{|z|} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos\theta_0 = \dfrac{1}{2}$ e $\mathrm{sen}\,\theta_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, temos que $\theta_0 = \pi/3$, donde

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right),$$

que também pode ser escrito da forma

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right).$$

Tomando outro exemplo importante sobre esse conjunto $\arg z$, para fixar as ideias, isto é,

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{-7\pi}{4}\right) \quad \text{e} \quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{-7\pi}{4}\right).$$

são representações polares do número $1+i$; note que $\arg(1+i)=\{\pi/4+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. O único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi,\pi]$ é chamado o *argumento principal* de z e denotado por $\operatorname{Arg} z$. Por exemplo,

$$\operatorname{Arg} i=\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg}(-1-i)=-\frac{3\pi}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{Arg}(-2)=\pi.$$

A justificativa para os exemplos acima serão expostos em seguida. De fato, seja o número complexo $z=i$, então

$$|z|=\sqrt{1}=1.$$

donde implica que,

$$\cos\theta=\frac{0}{1}=0 \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{1}=1.$$

Com efeito,

$$\theta=\frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$\operatorname{Arg} i=\frac{\pi}{2}.$$

Agora provaremos que $\operatorname{Arg}(-1-i)=-\frac{3\pi}{4}$. De fato, se $z=-1-i$, então

$$|z|=\sqrt{2}$$

donde implica que,

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Com efeito,

$$\theta = -\frac{3\pi}{4}.$$

Logo,

$$\operatorname{Arg}(-1-i).$$

Por fim, provaremos que $\operatorname{Arg}(-2) = \pi$. De fato, se $z = -2$, então

$$|z| = \sqrt{4} = 2$$

donde implica que,

$$\cos\theta = \frac{-2}{2} = -1 \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{0}{2} = 0.$$

Com efeito,

$$\theta = \pi.$$

Logo,

$$\operatorname{Arg}(-2) = \pi.$$

A identidade

$$z = |z|(\cos\operatorname{Arg} z + i\operatorname{sen}\operatorname{Arg} z)$$

é chamada como a *forma polar de z*.

Sejam $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $w = |w|(cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)$ representações polares de dois números complexos z e w não nulos. Através desses dois números complexos, obteremos as representações polares da inversa de um número complexo z, e do produto entre dois números complexos z e w. Por (2-2),

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}}{|z|^2} = \frac{\overline{|z|}\ \overline{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}}{|z|^2} = \frac{|z|(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)}{|z|^2} \\ &= \frac{[\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)]}{|z|} \end{aligned}$$

logo,

$$z^{-1} = |z|^{-1}[\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)]. \tag{2-4}$$

A forma trigonométrica de um número complexo nos permite obter uma interpretação geométrica da operação de multiplicação de complexos. Inicialmente, fazendo-se uma interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos unitários, ou seja, o módulo desses complexos são iguais a 1. Note-se que um complexo unitário $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, é representado por um ponto do círculo unitário S^1. Donde

$$iz = i(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = -\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

e pode-se concluir que ao multiplicar z por i significa que está sendo efetuado uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$ no ponto z. Diante disso, seja $w = \cos\psi + i\operatorname{sen}\psi$, então

$$zw = w(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi) = w\cos\psi + iw\operatorname{sen}\psi,$$

ou seja, o vetor representado por zw é a soma dos vetores perpendiculares $w\cos\psi$ e $iw\operatorname{sen}\psi$. Agora tomando-se um sistema de coordenadas xOy, onde o eixo Ox coincide com Oz, donde será obtido que o ângulo de z com zw é ψ. Logo, conclui-se que ao multiplicar dois números complexos unitários z e w significa dizer, que ao analisar geometricamente, um dos vetores vai obter uma rotação positiva de ângulo igual ao ângulo do outro vetor.

Agora analisando-se o caso dos complexos não serem unitários. De fato, se $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $w = |w|(cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)$, então

$$\begin{aligned} zw &= [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)][|w|(cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)] = |z||w|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(cos\psi + i\operatorname{sen}\psi) \\ &= |z||w|(\cos\theta\cos\psi + i\cos\theta\operatorname{sen}\psi + i\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi) \\ &= |z||w|[(\cos\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi) + i(\cos\theta\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\theta\cos\psi)], \end{aligned}$$

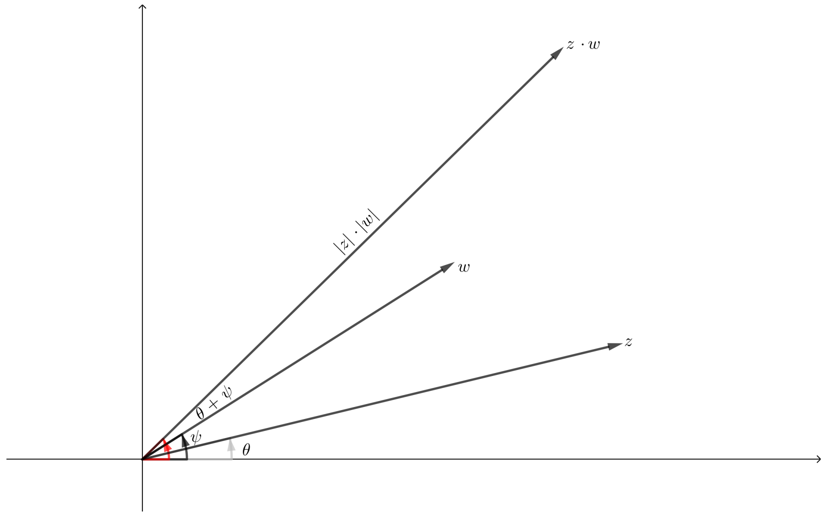
portanto

$$zw = |z||w|[\cos(\theta + \psi) + i\operatorname{sen}(\theta + \psi)]. \tag{2-5}$$

Onde zw tem valor absoluto $|z||w|$ e tem como um argumento $\theta + \psi$, como representado na **Figura** (2.6).

Pode-se observar, que a interpretação da multiplicação de complexos unitários, é dado como consequência imediata o seguinte Teorema abaixo, conhecido como *Teorema*

Figura 2.6: *Produto entre dois números complexos.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Fundamental da Trigonometria.

Teorema 2.3.1 *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$, *tem-se:*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$

Demonstração. Se x e y satisfazem à condição: $0 \le x < 2\pi$, $0 \le y < 2\pi$, então, escrevendo $z = \cos x + i \operatorname{sen} x$, e $w = \cos y + i \operatorname{sen} y$.

Pela interpretação geométrica do produto zw, ele é obtido de z por meio de uma rotação positiva de ângulo y. Logo,

$$zw = \cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y). \tag{2-6}$$

Em contrapartida,

$$zw = (\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

logo,

$$zw = (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) + i(\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x). \tag{2-7}$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (2-6) e (2-7), obtém-se

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \qquad \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x.$$

■

Definindo:

$$-A = \{-a; a \in A\} \qquad e \qquad A + B = \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\} \qquad (A, B \subset \mathbb{C}),$$

das identidades (2-4) e (2-5), que

$$\arg(z^{-1}) = -\arg z \qquad \text{e} \qquad \arg(zw) = \arg z + \arg w \tag{2-8}$$

pois,

$$\begin{aligned} \arg(z^{-1}) &= -\theta = -[\arg z] \\ &= -\arg z \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \arg(zw) &= \theta + \psi = [\arg z] + [\arg w] \\ &= \arg z + \arg w. \end{aligned}$$

Todavia, não são todos casos que valem $\operatorname{Arg} z^{-1} = -\operatorname{Arg} z$ e $\operatorname{Arg} zw = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$. A seguir será mostrado casos em que as igualdades acima não são verificadas. Tome $z = -1$. Então, $\operatorname{Arg} z^{-1} = \pi \neq -\pi = -\operatorname{Arg} z$. Logo,

$$\operatorname{Arg} z^{-1} \neq -\operatorname{Arg} z.$$

Tome $z = w = -i$. Então $\operatorname{Arg} zw = \pi \neq -\pi = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$. Logo,

$$\operatorname{Arg} zw \neq \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w.$$

De (2-4) e (2-5), obtém-se

$$\begin{aligned}
z &= |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \\
z^n &= [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n \\
&= |z|^n(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n \\
&= |z|^n \underbrace{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\ldots(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}_{n \text{ vezes}} \\
&= |z|^n \underbrace{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\ldots(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}_{n \text{ vezes}} \\
&= |z|^n \underbrace{[\cos(\theta+\theta) + i\operatorname{sen}(\theta+\theta)](\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\ldots(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}_{(n-1) \text{ vezes}} \\
&= |z|^n \underbrace{[\cos(\theta+\theta+\theta) + i\operatorname{sen}(\theta+\theta+\theta)](\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\ldots(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}_{(n-2) \text{ vezes}}
\end{aligned}$$

com isso,

$$z^n = |z|^n[\cos\underbrace{(\theta+\cdots+\theta)}_{n \text{ vezes}} + i\,\text{sen}\underbrace{(\theta+\cdots+\theta)}_{n \text{ vezes}}]$$

logo,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)) \tag{2-9}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Essa expressão acima é conhecida como *Fórmula de De Moivre*. Uma outra consequência imediata da interpretação geométrica do produto de dois complexos tem relação com essa expressão. Pode-se observar, que geometricamente, a fórmula de De Moivre significa que ao multiplicar o complexo unitário $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ por si próprio n vezes, significa que lhe é dado n rotações sucessivas de ângulo θ. Uma das utilidades dessa fórmula, é permitir a determinação de $\cos(n\theta)$ e $\text{sen}(n\theta)$ sem utilização das fórmulas da adição. Como por exemplo, será calculado o valor de $\cos(3\theta)$ e $\text{sen}(3\theta)$. Note que,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\,\text{sen}(3\theta) &= (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i^2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + i^3\,\text{sen}^3\theta \\ &= cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta + i(3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta).\end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias, obtém-se:

$$\cos(3\theta) = cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta, \qquad \text{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta.$$

Na próxima seção que tratará sobre extração de raízes de um número complexo, será exposto outra utilidade desta fórmula de De Moivre, que é a determinação de raízes complexas. Finalmente, para concluir as aplicações dos números complexos à trigonometria, no próximo exemplo vamos mostrar outra forma de obter a lei do cosseno.

Proposição 2.3.1 *Em um triângulo ABC qualquer, tem-se que*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\hat{A}$$

onde a, b e c são lados opostos aos vértices A, B e C, de forma respectiva.

Demonstração. Tomando um sistema de coordenadas xOy de modo que A coincida com a origem 0 e B coincida com o eixo $0x$. Seja $z = |z|$ o número complexo representado por B e $w = |w|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ o número complexo representado por C. Fazendo $|z-w|^2 = a^2$, note que

$$|z-w|^2 = (z-w)\overline{(z-w)} = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z}+w\bar{w}-(w\bar{z}+z\bar{w}).$$

Como é valido

$$w\bar{z} = |w|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)|z|, \qquad z\bar{w} = |z||w|(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta).$$

Somando as equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} w\bar{z}+z\bar{w} &= |w|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)|z| + |z||w|(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta) \\ &= |z||w|\cos\theta + |z||w|i\,\text{sen}\,\theta + |z||w|\cos\theta - |z||w|i\,\text{sen}\,\theta \\ &= 2|z||w|\cos\theta \end{aligned}$$

e diante disso,

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= |z|^2+|w|^2-w\bar{z}-z\bar{w} \\ &= |z|^2+|w|^2-w\bar{z}-2|z||w|\cos\theta. \end{aligned}$$

Fazendo,

$$b=|z|, \qquad c=|w| \qquad \text{e} \qquad \hat{A}=\theta$$

tem-se,

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}.$$

■

2.4 Extração de raízes

Dado um número complexo w e um número natural $n > 0$, dizem-se que para $z \in \mathbb{C}$ é uma *raiz n-ésima* de w se

$$z^n = w.$$

É fácil observar para $w = 0$, que $z = 0$ é única solução válida da equação $z^n = w$. Diante disso, o número 0 possui uma única raiz n-ésima, que é ele próprio. Em seguida, verem-se que para $w \neq 0$, a equação $z^n = w$ possui exatamente n soluções distintas. Formalmente, dado um número complexo w querem-se encontrar todos os números complexos z, tais que $z^n = w$. Primeiramente, suponha-se que para $n > 0$, pela fórmula de De Moivre, temos o seguinte.

Chamando $z = |z|(cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e $w = |w|(\cos\psi + i\,\text{sen}\,\psi)$, e como $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta))$, obtém-se:

$$z^n = w \Leftrightarrow |z|^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta)) = |w|(\cos\psi + i\,\text{sen}\,\psi).$$

Logo

$$|z| = \sqrt[n]{|w|} \qquad \text{e} \qquad n\theta = \psi + 2k\pi \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Conclui-se que as soluções da equação $z^n = w$ são números complexos da forma

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.4.1 *Fixando $n \in \mathbb{N}^*$. Todo número complexo $w \neq 0$ possui exatamente n raízes n-ésimas complexas distintas, ou seja,*

$$\sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\text{Arg}\,(w) + 2k\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{\text{Arg}\,(w) + 2k\pi}{n}\right)\right] \tag{2-10}$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Demonstração. Denotando-se z_k o número complexo dado em (2-10), para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\text{Arg}\,(w) + 2k\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{\text{Arg}\,(w) + 2k\pi}{n}\right)\right].$$

Pondo $w = |w|(\cos\psi + i\,\text{sen}\,\psi)$, onde $\psi =$ Arg (w). Estando-se com o objetivo de procurar todos os números complexos $z = |z|(cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ para os quais é válido que

$$z^n = w.$$

Por (2-9), a equação acima pode ser reescrita da forma

$$|z|^n[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta)] = |w|(\cos\psi + i\,\text{sen}\,\psi),$$

isso é equivalente que

$$|z|^n = |w|, \qquad \cos(n\theta) = \cos\psi \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{sen}\psi.$$

Nota-se que a primeira condição é satisfeita quando $|z| = \sqrt[n]{|w|}$, e já as outras ultimas são satisfeitas quando $n\theta = \psi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, quando $\theta = \frac{\psi+2k\pi}{n}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Fazendo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ obtemos distintas raízes n-ésimas de w. Todavia, os demais valores de k nos dão apenas repetições das raízes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. De fato, tomando $k \in \mathbb{Z}$ de forma arbitrariamente, escrevendo-se

$$k = qn + r$$

com $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < n$.

Como

$$\frac{\psi + 2k\pi}{n} = \frac{\psi + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{\psi + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

com isso, temos que $z_k = z_r \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

■

Ao fazer $k = 0$ em (2-9), a raiz n-ésima de w é chamada como a raiz *n-ésima principal* de w, sendo denotado por $\sqrt[n]{w}$. É fácil observar que esta notação é coerente com a notação $\sqrt[n]{|w|}$, que indica a única raiz real positiva de $|w|$. Logo,

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg}(w)}{n}\right)\right].$$

Como a única raiz n-ésima de zero é o próprio zero, então denotando-se convencionalmente como $\sqrt[n]{0} = 0$. Outro observação a ser feita, é que o símbolo $\sqrt{w}$ também é usado no lugar de $\sqrt[2]{w}$.

Nota-se que todas as n raízes n-ésimas de w possuem o mesmo módulo, ou seja, $\sqrt[n]{|w|}$. Diante disso, elas vão ser representadas geometricamente por n pontos sobre a circunferência com centro na origem e possuindo o raio $\sqrt[n]{|w|}$. Além disso, devido à relação existente entre seus argumentos, estes pontos vão estar espaçados ao longo desta circunferência. Para fixar as ideias, vamos considerar as raízes cubicas de 8 como exemplo. Pelo **Teorema** (2.4.1), obtém-se

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(8) + 2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{Arg}(8) + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad \text{para } k = 0, 1, 2.$$

Como $\operatorname{Arg}(8) = 0$, pois

$$\cos(\operatorname{Arg}(w)) = \frac{x}{|w|} = \frac{8}{8} = 1$$

e

$$\operatorname{sen}(\operatorname{Arg}(w)) = \frac{y}{|w|} = \frac{0}{8} = 0$$

ou seja,

$$\operatorname{Arg}(8) = 0.$$

Portanto,

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{3}\right). \tag{2-11}$$

Substituindo em (2-11), quando $k = 0$, obtém-se

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{2(0)\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2(0)\pi}{3}\right) = 2(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = 2(1 + i0) = 2.$$

Para $k = 1$, obtém-se

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2(1)\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2(1)\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + i\sqrt{3}.$$

Para $k = 2$, obtém-se

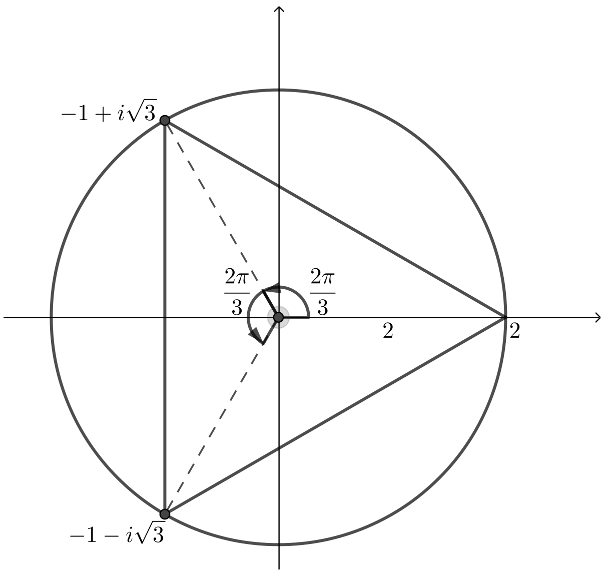
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{2(2)\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2(2)\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = -1 - i\sqrt{3}.$$

Tem-se que z_0, z_1 e z_2 dividem a circunferência com centro na origem e raio 2, em três partes congruentes, como representado na **Figura** (2.7).

2.5 Exponencial

Nosso objetivo nessa seção será definir a exponencial de um número complexo e obter algumas propriedades. Antes disso, será necessário fazer algumas considerações

Figura 2.7: *Triângulo inscrito na circunferência de raio 2 e centro na origem.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

para motivar o leitor.

Os primeiros estudos relacionados a disciplina de cálculo diferencial e integral, a expansão em série de Taylor da função e^t, com $t \in \mathbb{R}$, é da forma

$$e^t = \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots. \tag{2-12}$$

Substituindo t por iy na equação (2-12), com $y \in \mathbb{R}$, obtém:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(\frac{y^0}{0!} - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{y^1}{1!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \frac{y^7}{7!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

onde essas duas últimas séries são as expansões em séries de Taylor de $\cos y$ e de $\operatorname{sen} y$, respectivamente. Podendo e^{iy} ser interpretado na forma $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Para mais, a seguinte propriedade $e^{s+t} = e^s e^t$ se $s, t \in \mathbb{R}$, pode ser definida de maneira usual $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Diante dessas considerações feitas, seja z um número complexo da forma $z = x + yi$, definimos a *exponencial* de z como

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Pode-se observar que a notação $\exp z$ é bastante usual no lugar de e^z. Com $z = iy$

obtemos que

$$\begin{aligned} z &= iy \\ x + iy &= iy \\ x &= iy - iy \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \tag{2-13}$$

A equação (2-13) é conhecida como a *fórmula de Euler*. A seguir mostraremos exemplos para fixar as ideias, assumindo que $y = \frac{\pi}{2}$, tem-se

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0 + i(1) = i.$$

Para $y = 1 + \pi$, obtém-se

$$\begin{aligned} e^{(1+\pi i)} &= \cos(1+\pi) + i \operatorname{sen}(1+\pi) \\ &= \cos 1 \cos \pi - \operatorname{sen} 1 \operatorname{sen} \pi + i(\operatorname{sen} 1 \cos \pi + \cos 1 \operatorname{sen} \pi) \\ &= -\cos 1 - \operatorname{sen} 1(0) + i(-\operatorname{sen} 1 + \cos 1(0)) \\ &= -\cos 1 - i \operatorname{sen} 1 \\ &= -(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) \\ &= -(e^{i}) \\ &= -e^{i}. \end{aligned}$$

Para $y = \left(\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
e^{(\pi-\frac{\pi i}{2})} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos\pi\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{sen}\,\pi\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} + i\left(\mathrm{sen}\,\pi\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right)\\
&= i(-cos\pi(1))\\
&= -i(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)\\
&= -ie^{\pi i}.
\end{aligned}$$

Para $y = \pi$, obtém-se

$$e^{\pi}i = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1 + i(0) = -1.$$

Podemos notar diretamente da definição de exponencial de números complexos, que

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z} \quad \text{e} \quad \arg(e^z) = \{\mathrm{Im}\,z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2-14}$$

Justificativa para (2-14) vindo abaixo:

Primeiramente provando-se que $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z}$. De fato, se $e^z = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$, então

$$\begin{aligned}
|e^z| &= |e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)| = |e^x\cos y + ie^x\,\mathrm{sen}\,y| = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\,\mathrm{sen}^2\,y}\\
&= \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \mathrm{sen}^2\,y)} = \sqrt{e^{2x}} = \sqrt{(e^x)^2} = e^x = e^{\mathrm{Re}\,z}.
\end{aligned}$$

Agora iremos provar que $\arg(e^z) = \{\mathrm{Im}\,z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. De fato, se $e^z = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$ e pela definição acima, temos que

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z} = e^x,$$

e portanto,

$$\frac{a}{|z|} = \frac{e^x\cos y}{e^x} = \cos y \qquad\qquad \frac{b}{|z|} = \frac{e^x\,\mathrm{sen}\,y}{e^x} = \mathrm{sen}\,y.$$

Observe que para $\cos\theta_0 = \cos y$ e $\mathrm{sen}\,\theta_0 = \mathrm{sen}\,y$, é necessário que $\theta_0 = y$. Diante disso,

$$\arg(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Temos $e^z \neq 0$ para todo número complexo z. Fazendo $e^z = z$ na equação (2-9), implica que

$$\begin{aligned}(e^z)^n &= [e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)]^n = [|e^z|(\cos y + i\operatorname{sen} y)]^n = |e^z|^n(\cos y + i\operatorname{sen} y)^n \\ &= |e^z|^n(\cos ny + i\operatorname{sen} ny) = e^{nz}\end{aligned}$$

para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Tomando um caso particular $n = -1$, temos que

$$(e^z)^{-1} = e^{-z}.$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Se $z = x + yi$ e $w = a + bi$ são dois números complexos, através da equação (2-5) é possível mostrar que

$$e^z e^w = [e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y][e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b] = e^{x+a}[\cos(y+b) + i\operatorname{sen}(y+b)] = e^{z+w}$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Proposição 2.5.1 *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, tem-se*

$e^z = e^w$ se e somente se $z = w + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja os números complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$ com $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Se $e^z = e^w$, então acontece que,

$$e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b),$$

e isto implica que $e^z = e^w$, e ainda $x = a$ e além disso, $y = b + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, concluímos que $z = w + 2k\pi$

Reciprocamente, se $z = w + 2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$, então

$$e^z = e^{w+2k\pi i} = e^w e^{2k\pi i} = e^w(\cos 2k\pi + i\operatorname{sen} 2k\pi) = e^w.$$

■

Diante da **Proposição** (2.5.1), é possível observarmos que diferentemente do que acontece com o conjunto dos reais, é possível obter $e^z = e^w$ com $z \in w$. Sendo um caso particular onde isso acontece, tome $e^0 = e^{2\pi i} = 1$. Visto que todo número complexo $z \in 0$ possui uma representação polar $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, onde θ é o argumento de z. Com as noções aprendidas nessa seção de exponencial, esta igualdade pode ser reescrita de uma maneira mais simples, tal que

$$z = |z|e^{i\theta}. \tag{2-15}$$

Observando-se também, que na equação (2-10) da seção 2.5, vimos que as raízes n-ésimas de um número complexo não nulo w, como mostrando em (2-10), podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sqrt[n]{|w|}e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(w)+2k\pi}{n}\right)}$$

para algum $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Em um caso particular, as raízes *n-ésimas da unidade* são determinadas por:

$$\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

para algum $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Nota-se também que ao multiplicar a raiz n-ésima principal $\sqrt[n]{w}$ de w pelas raízes da unidade, é possível obter as n raízes n-ésimas de w. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{|w|}e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(w)+2k\pi}{n}\right)} &= \sqrt[n]{|w|}e^{i\left(\frac{\mathrm{Arg}(w)}{n}\right)}e^{\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)} \\
&= \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}(w)+2k\pi}{n}\right)+\mathrm{sen}\left(\frac{\mathrm{Arg}(w)+2k\pi}{n}\right)\right]e^{\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)} \\
&= \sqrt[n]{w}e^{\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)} \\
&= \sqrt[n]{w}\zeta_k
\end{aligned}$$

para algum $k = 0, 1, , n-1$. Para fixar as ideias, vamos supor que $n = 2$, então $\zeta_0 = 1$ e $\zeta_1 = -1$. De fato,

$$\zeta_0\sqrt{w} = 1\sqrt{w} = \sqrt{w} \qquad \text{e} \qquad \zeta_1\sqrt{w} = -1\sqrt{w} = -\sqrt{w}.$$

2.6 Logaritmos

Definindo-se o logaritmo de um número complexo, mas antes, lembremos que um número real s é dito o logaritmo natural, isto é, logaritmo na base e de um número $t \in \mathbb{R}$, com $t > 0$ (em símbolos, significa que $s = \ln t$) quando $e^s = t$. Diante desses conceitos, dizendo-se que um número complexo w é um *logaritmo* de um número complexo não nulo z se $e^w = z$. Será visto nessa seção, que um número complexo não nulo possui uma infinidade de logaritmos, isto é justamento o que diferencia em relação ao caso real, pois um número real positivo possui apenas um único logaritmo. Será denotado por $\log z$ o conjunto de todos os logaritmos de um número complexo não nulo z. De fato, para todo número complexo não nulo z,

$$\log z = \{w \in \mathbb{C}; e^w = z\}.$$

Agora irão-se determinar $\log z$. Supondo que $w = \ln|z| + i\theta$ com $\theta \in \arg z$, então

$$e^w = e^{\ln|z|+i\theta} = e^{\ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = z.$$

Supondo-se ainda, que $w \in \log z$. Então implica que $e^w = z$, o que é equivalente

$$e^{\operatorname{Re} w} = |e^w| = |z| \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im} w = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \ \text{ para algum } k \in \mathbb{Z},$$

daí que $w = \ln|z| + i\theta$ com $\theta \in \arg z$. Com isso,

$$\log z = \{\ln|z| + i\theta; \theta \in \arg z\}$$

Logo,

$$\log z = \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2-16}$$

Pondo $k = 0$ na equação (2-16), obtém-se o *logaritmo principal* de z, sendo denotado por $\operatorname{Log} z$. Diante disso,

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \tag{2-17}$$

Substituindo (2-17) em (2-16), tem-se

$$\operatorname{Log} z = \{\operatorname{Log} z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2-18}$$

Pode-se observar que de agora em diante será utilizado apenas a notação de $\operatorname{Log} x$ em vez de $\ln x$, quando x for um número real positivo, isto é, quando $\operatorname{Log} x = \ln x$. Para fixar as ideias, tome alguns exemplos: Supondo $z = -1$, então

$$\operatorname{Log}(-1) = ln|-1| + i\operatorname{Arg}(-1) = \ln(1) + \pi i = \pi i.$$

Para $z = e^2 i$,

$$\operatorname{Log}(e^2 i) = ln|e^2| + i\operatorname{Arg}(e^2 i) = ln(e^2) + \frac{\pi}{2}i = 2 + \frac{\pi}{2}i.$$

Para $z = 1+i$,

$$\text{Log}(1+i) = ln|1+i| + i\text{Arg}(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}i = \text{Log}(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}i.$$

Definindo

$$A - B = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\} \qquad \text{e} \qquad mA = \{ma : a \in A\}$$

para $A, B \subset \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{Z}$, onde essa definição será importante para provar a proposição logo abaixo.

Proposição 2.6.1 *Dados dois números z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, tal que z_1 e $z_2 \neq 0$, temos que*

(a) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$.
(b) $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$.
(c) $\log(z_1^m) = m \log z_1 \ \forall m \in \mathbb{Z}^*$.

Demonstração. (a) Primeiramente, provando que $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$. De fato, por (2-16), então

$$\begin{aligned}
\log z_1 z_2 &= \ln(|z_1 z_2|) + i(\text{Arg}(z_1 z_2) + 2k\pi) \text{ com } k \in \mathbb{Z} \\
&= \ln|z_1||z_2| + i \arg z_1 z_2 \\
&= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2) \\
&= [\ln|z_1| + i \arg z_1] + [\ln|z_2| + i \arg z_2] \\
&= \log z_1 + \log z_2.
\end{aligned}$$

(b) Agora provando que $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$. De fato, por (2-16), então

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\left(\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2k\pi\right) \\
&= \ln\frac{|z_1|}{|z_2|} + i \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \\
&= [\ln|z_1| - \ln|z_2|] + i(\arg z_1 - \arg z_2) \\
&= [\ln|z_1| + i \arg z_1] - [\ln|z_2| + i \arg z_2] \\
&= \log z_1 - \log z_2.
\end{aligned}$$

(c): Por fim, provando que $\log(z_1^m) = m\log z_1$ para todo $m \in \mathbb{Z}^*$. De fato, por (2-16), então

$$\begin{aligned}
\log(z_1^m) &= \ln|z_1^m| + i(\text{Arg}(z_1^m) + 2k\pi) \\
&= \ln|\underbrace{z_1 \dots z_1}_{\text{m vezes}}| + i\arg(\underbrace{z_1 \dots z_1}_{\text{m vezes}}) \\
&= \underbrace{\ln|z_1| + \cdots + \ln|z_1|}_{\text{m vezes}} + i(\underbrace{\arg z_1 + \cdots + \arg z_1}_{\text{m vezes}}) \\
&= m\ln|z_1| + i(m\arg z_1) \\
&= m(\ln|z_1| + i\arg z_1) \\
&= m[\ln|z_1| + i(\text{Arg} z_1 + 2k\pi)] \\
&= m\log z_1.
\end{aligned}$$

■

Diante disso, pode-se observar que não é sempre verdade que $\text{Log}(z_1z_2) = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2$, nem que $\text{Log}(z_1/z_2) = \text{Log}z_1 - \text{Log}z_2$ e nem que $\text{Log}(z_1^m) = m\text{Log}z_1$. A justificativa para essas afirmações vem logo abaixo, então:

Primeiramente mostrando-se um contra-exemplo para o caso $\text{Log}(z_1z_2) = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2$. De fato, tome $z_1 = z_2 = -i$, então $\text{Log}(z_1z_2) = \pi i \neq -\pi i = \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2$. Agora mostrando um contra-exemplo para o caso $\text{Log}(z_1/z_2) = \text{Log}z_1 - \text{Log}z_2$. De fato, tome $z_1 = -i$ e $z_2 = i$, então $\text{Log}(z_1/z_2) = \pi i \neq -\pi i = \text{Log}z_1 - \text{Log}z_2$. E por fim, mostramos que $\text{Log}(z_1^m) \neq m\text{Log}z_1$. De fato, analogamente ao primeiro exemplo, tome $z_1 = -i$, então $\text{Log}z_1^m = \pi i \neq -\pi i = m\text{Log}z_1$. Portanto,

(a) $\text{Log}(z_1z_2) \neq \text{Log}z_1 + \text{Log}z_2$.

(b) $\text{Log}(z_1/z_2) \neq \text{Log}z_1 - \text{Log}z_2$.

(c) $\text{Log}(z_1^m) \neq m\text{Log}z_1$.

2.7 Potências Complexas

Antes de definir a potência de um número complexo, considere $t \in \mathbb{R}$, onde $t \geq 0$ e $a \in \mathbb{R}$, sendo a arbitrário, é usual definir potência t^a pela fórmula

$$t^a = e^{a\ln t}.$$

Diante disso, ao tentar definir no contexto dos números complexos de maneira análoga, ou seja, definindo-se a potência z^λ, onde z é um número complexo não nulo e λ é um número complexo arbitrário. Com isso, chega-se na seguinte problemática: um número complexo z possui uma infinidade de logaritmos! Logo, para cada $w \in \log z$, o número complexo $e^{\lambda w}$ é chamado como λ*−potência de z associado ao logaritmo w*. Nesse caso então, serão utilizados todos os logaritmos de um número complexo z. Além disso, o número complexo e é chamado por λ*-potência principal de z*, quando $w = \mathrm{Log}\, z$. Essa potência λ de z será denotado de maneira usual z^λ. Com isso, z^λ também denotará a λ-potência principal de z, ou seja,

$$z^\lambda = e^{\lambda \mathrm{Log}\, z}. \tag{2-19}$$

Para fixar as ideias, considere o seguinte exemplo:

$$(-i)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(-i)} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{-\pi}{2}\right)} = e^{\frac{-\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2-i\sqrt{2}}}{2}.$$

De maneira que, para todo logaritmo de z é da forma $\mathrm{Log}\, z + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, implica que as λ-potências de z são os números que podem ser representado na forma

$$e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda \tag{2-20}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Agora iremos analisar o que ocorre quando λ é um número inteiro, isto é, digamos que $\lambda = n$. De maneira que $e^{2k\pi\lambda i} = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, por , segue que todas as potências de λ de z se reduzem ao número complexo z^n, como definido na seção 2.2. Diante disso,

$$e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda = 1 e^{n \mathrm{Log}\, z} = z^n,$$

já que pelo item (c) da **Proposição** (2.6.1), $n \log z$ é um logaritmo de z^n. Analisando-se agora o caso quando ocorre para $\lambda = 1/n$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Por (3-3), segue que o conjunto das λ-potências de z coincide com o conjunto das raízes n-ésimas de z, que são apresentadas no **Teorema** (2.4.1), pois

$$\begin{aligned} e^{2k\pi\lambda i} z^\lambda &= \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{Log}\, z}{n}\right) \\ &= \exp\left[\frac{\mathrm{Log}\, z}{n} + i\left(\frac{\mathrm{Arg} + 2k\pi i}{n}\right)\right] \\ &= \exp(\mathrm{Log}\sqrt[n]{|z|}\exp\left[i\left(\frac{\mathrm{Arg} + 2k\pi i}{n}\right)\right] \\ &= \sqrt[n]{|z|}\exp\left[i\left(\frac{\mathrm{Arg} + 2k\pi i}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Em uma implicaç ao direta, temos,

$$z^{1\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}. \tag{2-21}$$

Embora que seja verdade para $z^{\lambda+\mu} = z^{\lambda} z^{\mu}$, pois

$$z^{\lambda+\mu} = e^{(\lambda+\mu)\mathrm{Log}z} = e^{\lambda\mathrm{Log}z+\mu\mathrm{Log}z} = e^{\lambda z} e^{\mu\mathrm{Log}z} = z^{\lambda} z^{\mu},$$

nem sempre são válidas de maneira genérica outras ‵regras de exponenciação′. Como por exemplo, nem sempre é válido que $(zw)^{\lambda} = z^{\lambda} w^{\lambda}$ e nem para $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$, pois

$$(zw)^{\lambda} = e^{\lambda\mathrm{Log}zw} =$$

Tome $z = w = -i$, então

$$\begin{aligned} e^{\lambda\mathrm{Log}(-i)(-i)} &= e^{\lambda\mathrm{Log}(-1)} = e^{\lambda\pi i} \neq e^{-\lambda\pi i} = e^{\lambda\mathrm{Log}(-i)} e^{\lambda\mathrm{Log}(-i)} \\ &= e^{\lambda\mathrm{Log}z} e^{\lambda\mathrm{Log}w} = z^{\lambda} w^{\lambda}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(zw)^{\lambda} = z^{\lambda} w^{\lambda}.$$

Além disso,

$$(z^{\lambda})^{\mu} = (e^{\lambda\mathrm{Log}z})^{\mu} =$$

Tome $z = -i$, então

$$\begin{aligned} (e^{\lambda\mathrm{Log}(-i)})^{\mu} &= (e^{\lambda(-\frac{\pi}{2}i)})^{\mu} = \left(\cos\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\mu} = \left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\lambda}\right)^{\mu} \\ &= (0-(1)i)^{\lambda})^{\mu} = ((-i)^{\lambda})^{\mu} \neq (-i)^{(\lambda+\mu)} = (-i)^{\lambda}(-i)^{\mu} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\lambda} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\mu} \\ &= e^{\lambda\pi i} e^{\mu\pi i} = e^{\lambda\mu\pi i} = e^{\lambda\mathrm{Log}(-i)} = e^{\lambda\mathrm{Log}(z)} = z^{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES COMPLEXAS

Neste capítulo, tendo em vista que já foi estudado o corpo dos números complexos no Capítulo anterior, agora será iniciado o estudo das funções de uma variável complexa, ou seja, funções definidas como $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ onde domínio de A está contido em $\mathbb{C}$. Tais funções constituem como principal objeto de estudo nesse Cappítulo, onde inicialmente, será lembrado alguns conceitos importantes sobre funções e será introduzido as funções complexas de uma variável, assim como também será lembrado algumas propriedades importantes sobre tais funções. Serão apresentados alguns exemplos importantes sobre funções complexas de uma variável, dentre elas: funções racionais, funções polinomiais, funções exponenciais, funções trigonométricas, e por fim, as funções hiperbólicas. Em virtudes do que foi apresentado, serão demonstrados alguns resultados importantes utilizando de técnicas de manipulação entre números complexos, como por exemplo, será exposto uma demonstração para fórmula que determina a soma de dois arcos, tanto para a função seno como para a função cosseno.

As definições, propriedades e teoremas deste capítulo foram baseadas nos textos dos livros: *Variáveis complexas e aplicações* de Geraldo Ávila [1], *Trigonometria e números complexos* de Manfredo P. do Carmo, Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner [3], *Introdução às funções de uma variável* de Cecília S. Fernandez e Nilson C. Bernades Jr [5].

3.1 Funções de uma variável complexa

Esse Capítulo inicialmente, relembrará algumas definições e propriedades básicas relacionados às funções.

Definição 3.1.1 *Dados dois conjuntos A e B, uma função f de A em B é uma regra de correspondência que a cada elemento a de A, ele associa um elemento $f(a)$ de B, chamado o valor de f em a.*

Pode-se observar, que as seguintes notações $f : A \longrightarrow B$ e $f : a \in A \longrightarrow f(a) \in B$ são usadas para indicar que f é uma função. O conjunto A é chamado *domínio* de f, e B

é chamado de *contradomínio* de f. Se $S \subset A$, então definimos que a imagem de S por f sendo o conjunto $f(S) = \{f(a) : a \in S\}$. O conjunto $f(A)$ é chamado como a *imagem* de f. Quando $f(A) = B$, dizemos que a f é *sobrejetiva*. Se $f(a_1) \neq f(a_2)$ sempre que $a_1 \neq a_2$ $(a_1, a_2 \in A)$, dizemos então que f é uma *função injetiva*. Portanto, f é dita *função bijetiva*, quando f for injetiva e sobrejetiva.

Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$ são ambas funções, tais que $f(A) \subset C$, definindo-se então a composição de f por g como sendo a função $g \circ f : A \longrightarrow D$ dada da seguinte maneira:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

para todo $a \in A$. Se $f : A \longrightarrow B$ é bijetora, então vai existir uma única função $h : B \longrightarrow A$ tal que $(h \circ f)(a) = a$ para todo $a \in A$ e $(f \circ h)(b) = b$ para todo $b \in B$. Essa função h é chamada de *inversa* de f sendo denotada por f^{-1}. Nesse Capítulo, estamos interessados em funções do tipo $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ onde o domínio A é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Tal função é chamada de *função de uma variável complexa*. Com isso, sempre que considerando uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, assumindo-se assim de maneira implícita que $A \subset \mathbb{C}$, a menos que se for considerado o contrário de forma explícita.

Pode-se notar, que é bastante comum definir uma função de uma variável somente dando uma expressão explícita dos valores desta função. Exemplo disso, são as funções $f(z) = (2z+1)/(z^2+1)$ e $g(z) = z/\operatorname{Re} z$. Nesta situação, o domínio dessas funções é o conjuntos de todos os números complexos os quais a expressão seja satisfeita. Como vimos nos exemplos acima, temos que seus respectivos domínio são $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0\}$.

Seja as funções $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{C}$ e um número complexo c, definindo:
(a) $(cf)(z) = cf(z)$ (função *multiplo*).
(b) $(f \pm g)(z) = f(z) \pm g(z)$ (função *soma e diferença*).
(c) $(fg)(z) = cf(z)$ (função *produto*).
(d) $(f/g)(z) = f(z)g(z)$ (função *quociente*).
Para melhor comprenssão, considere os seguintes exemplos:

Exemplo 3.1.1 *Determine o domínio da seguinte função:*

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} \quad \textit{onde } z \in \mathbb{C}$$

Solução. De fato, então como a função complexa acima é uma função racional, então

$z^2 + 1$ tem que ser diferente de zero, isto é,

$$z^2 + 1 \neq 0 \quad \text{então} \quad z^2 \neq -1 \quad \text{o que implica} \quad z \neq \pm i.$$

Portanto,

$$D_f = \{z \in \mathbb{C} / z \neq \pm i\}.$$

Exemplo 3.1.2 *Expresse a parte real e imaginária da seguinte função:*

$$f(z) = \frac{z}{(z)^2 + 1}, \ para \ z = 2 + 3i$$

Solução.

$$\begin{aligned} f(2+3i) &= \frac{2+3i}{(2+3i)^2+1} = \frac{2+3i}{4+12i+9i^2+1} = \left(\frac{2+3i}{-4+12i}\right) = \left(\frac{-4-12i}{-4-12i}\right) \\ &= \frac{-8-24i-12i-36i^2}{16+144} = \frac{28-36i}{160} = \frac{28}{160} - \frac{36i}{160}. \end{aligned}$$

Pode-se observar que o domínio de cf é o próprio conjunto A, os domínios de $f \pm g$ e fg são o conjunto $A \cap B$ e o domínio de f/g é o conjunto $\{z \in A \cap B : g(z) \neq 0\}$. Definindo-se também, o *conjugado* e o *módulo* de f respectivamente, por

$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)} \quad \text{e} \quad |f|(z) = |f(z)|.$$

com $z \in A$. Considere a seguinte função, se $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = z^2$, para todo $z = x + yi$, temos que

$$\overline{f}(z) = \overline{(z^2)} = (\overline{z})^2 = (\overline{x+yi})^2 = (x-yi)^2 = (x^2-y^2) - 2xyi$$

e

$$|f|(z) = |z^2| = |z|^2 = |x+yi|^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2 + y^2.$$

É muito comum em algumas ocasiões expressarmos uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, na forma

$$f = u + iv$$

ou seja, expressar em termos da sua *parte real* e *parte imaginária*, onde

$$u(z) = \mathrm{Re}[f(z)] \quad \text{e} \quad v(z) = \mathrm{Im}[f(z)]$$

para todo $z \in A$. Para melhor compreensão, observe o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.3 *Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ dada pela seguinte lei de formaçao $f(z) = z^2 + 2z + 1$ onde $z = x + yi$, determine $u(z)$ e $v(z)$ de:*
(a) $\overline{f}(z)$
(b) $|f|(z)$.

Solução. (a) De fato,

$$\begin{aligned}\overline{f}(z) &= \overline{z^2 + 2z + 1} = \overline{(x+yi)^2 + 2(x+yi) + 1} = \overline{x^2 + 2xyi - y^2 + 2x + 2y + 1}\\ &= \overline{(x^2 - y^2 + 2x + 2y + 1) + (2xy)i} = x^2 - y^2 + 2x + 2y + 1 - 2xyi\end{aligned}$$

logo,

$$u(z) = x^2 - y^2 + 2x + 2y + 1 \quad \text{e} \quad v(z) = -2xy.$$

(b) De fato,

$$\begin{aligned}|f|(z) &= |f(z)| = |z^2 + 2z + 1|^2 = |(z+1)^2| = |z+1|^2 = |x + yi + 1|^2 = (\sqrt{(x+1)^2 + y^2})^2\\ &= x^2 + y^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

logo,

$$u(z) = x^2 + y^2 + 2x + 1 \quad \text{e} \quad v(z) = 0.$$

Pode-se observar que u e v são funções reais domínio de f. Podemos considerar u e v como funções reais de duas varíaveis reais, se tomarmos um número complexo $z = (x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$u(z) = u(x,y) \quad \text{e} \quad v(z) = v(x,y). \tag{3-1}$$

Tem-se como por exemplo a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sendo dada por $f(z) = z^2 + 1$ então temos que as partes real e imaginária da função:

$$u(z) = u(x,y) = x^2 - y^2 + 1 \quad \text{e} \quad v(z) = v(x,y) = -2xy.$$

Tomando uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ e um $S \subset A$, dizendo-se que f é uma função *limitada* em S se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M$$

para todo $z \in S$. Diante disso, tem-se como exemplo a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$, onde ele é limitada em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, mas não é limitada em $\mathbb{C}$.

No estudo sobre as funções reais de uma variável real, era dado bastante importância em relação à visualização destas funções através de seus gráficos. Apesar que essa visualização possua limitações, ela auxilia no desenvolvimento da nossa intuição e a compreensão de muitos conceitos importantes, tais como os conceitos de derivada e integral. Já em relação as funções complexas de uma varíavel, os gráficos dessas funções são subconjuntos de $\mathbb{C}^2$, que é comumente reconhecido ao espaço gráficos 4-dimensional $\mathbb{R}^4$. Com isso, perde-se a capacidade de desenhar esses tipos de gráficos.

3.2 Funções racionais

Uma função é dita uma *função racional* se

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

cujo o domínio f é $\{z \in \mathbb{C} / b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots b_m x^m \neq 0\}$, onde os *coeficientes* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $b_0, b_1, \ldots, b_m$ são números complexos.

Uma função racional dada por

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{3-2}$$

é chamada de *função polinomial*. De (3-2), tem-se que se $a_n \neq 0$, então f é uma função de polinomial de n-ésimo grau. Pode-se observar que a função polinomial nula é dada por $f(z) = 0$, isto é, não é atribuído grau a esse tipo de polinômio. Vejamos algumas funções racionais especiais.

(a) Funções constantes: São as funções da forma

$$f(z) = c,$$

onde c é uma constante complexa. Se $c = 0$ temos que a função identicamente nula.

(b) Funções Tranlação: São as funções da forma

$$f(z) = z + b,$$

onde b é uma constante complexa. Se $b = 0$ temos a função identidade.
(c) Função Rotação: São as função da forma

$$f(z) = az,$$

onde a é uma constante complexa de módulo 1.
(d) Função Homotetia: São as funções da forma

$$f(z) = az,$$

onde a é uma constante real não nua. Dizemos que f é uma dilatação se $a > 1$ e uma contração se $0 < a < 1$.
(e) Função Inversa: É a função

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

(f) Função n-ésima potência: É a função

$$f(z) = z^n,$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$.

Dada uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ é chamado de zero da função (ou raiz de f) se

$$f(z_0) = 0.$$

Para fixar as ideias, tome o seguinte exemplo:

Exemplo 3.2.1 *Encontre o zero da função das seguintes funções complexas:* (a) $f(z) = 2\overline{z} + i$
(b) $f(z) = z^2 + 4z + 5$

Solução. (a) De fato, se z pertencesse aos complexos raíz da função, então $f(z) = 0$. Com isso,

$$\begin{aligned} 2\overline{z} + i &= 0 \\ 2\overline{z} &= -i \\ \overline{z} &= \frac{-i}{2} \quad \text{o que implica} \quad z = \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

(b) De fato,

$$f(z) = z^2 + 4z + 5$$
$$z^2 + 4z + 5 = 0.$$

Calculando o discriminante, temos

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4.$$

Com isso,

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

logo,

$$z_1 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i.$$

Proposição 3.2.1 *Seja a função $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ uma função polinomial. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de f, então $z - z_0$ é um fator de f, isto é, existe uma função polinomial g tal que*

$$f(z) = (z - z_0) g(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Por hipótese, $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz, isto é,

$$f(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \cdots + a_n z_0^n = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) - f(z_0) \\ &= a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n - (a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n) \\ &= a_1(z - z_0) + a_2(z^2 - z_0^2) + \cdots + a_n(z^n - z_0^n). \end{aligned}$$

Note que,

$$z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}).$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)(z+z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}))\\
&= (z-z_0)(a_1+a_2(z+z_0)+\cdots+a_n(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+a_n(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1})
\end{aligned}
$$

Portanto, existe g tal que

$$g(z)=a_1+a_2(z+z_0)+\cdots+a_n(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1})$$

onde $f(z)=(z-z_0)g(z)$.

■

Proposição 3.2.2 *Toda função polinomial de grau $n \geq 0$ tem no máximo n raízes.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n. Se $n=0$ temos um polinômio de grau zero, onde um polinômio de grau zero não possui raiz, logo, o resultado é verdadeiro para $n=0$.

Suponha-se que o resultado seja verdadeiro para um certo k. Devendo-se mostrar que o resultado é verdadeiro para $n=k+1$.

Se f uma função polinomial de grau $k+1$.

Se f não possui raiz não temos nada que provar.

Suponhamos ainda, que f possui uma raiz z_0. Pela **Proposição** (3.2.1), existe uma função polinomial de grau k tal que

$$f(z)=(z-z_0)g(z) \tag{3-3}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Aplicando a hipótese de indução sobre a função polinomial g, obtém-se que g possui no máximo k raízes.

Nota-se por (3-3), que as raízes f são z_0 e as raízes de g.

Portanto, f possui no máximo $k+1$ raízes.

■

3.3 Função Exponencial e as Funções Trigonométricas

A função exponencial é a função $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$exp(z) = e^z.$$

Considere $z = x + yi \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{(x+yi)}| = |e^x e^{yi}| = |e^x||e^{yi}| = e^x|\cos y + i\,\text{sen}\,y| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \text{sen}^2\,y} \\ &= e^x \neq 0. \end{aligned}$$

Com isso,

$$exp(z) \neq 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Uma outra importante caracterítica da função exponencial é que ela é periódica de período $2\pi i$, ou seja,

$$exp(z + 2\pi i) = exp(z).$$

De fato,

$$e^{(z+2\pi i)} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos(2\pi) + i\,\text{sen}\,(2\pi)) = e^z(1 + i(0)) = e^z.$$

Para todo $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$e^{yi} = \cos y + i\,\text{sen}\,y \quad \text{e} \quad e^{-yi} = \cos y - i\,\text{sen}\,y.$$

Com isso,

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$$

É natural definir seno e cosseno de um número complexo z dado por

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}.$$

As outras quatro funções trigonométricas são definidas em termos das funções seno e cosseno pelas relações usuais. Com isso,

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \quad \text{e} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\cos z \neq 0$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \quad \text{e} \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{sen} z \neq 0$.

Proposição 3.3.1 *Tem-se que*

$$\cos z = 0 \textit{ se e somente se, } z = \pi/2 + k\pi \textit{ com } k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\operatorname{sen} z = 0 \textit{ se e somente se, } z = k\pi \textit{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, os zeros do cosseno e do seno complexos são os zeros do cosseno e do seno reais, respectivamente.

Demonstração. Começando-se lembrando do seno e cosseno hiperbólico, isto é

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Seja $z \in \mathbb{C}$ com $z = x + yi$, com isso,

$$\begin{aligned}
\cos z = \cos(x+yi) &= \frac{e^{(x+yi)i} + e^{-(x+yi)i}}{2} = \frac{e^{(-y+xi)} + e^{(y-xi)}}{2} = \frac{e^{-y}e^{xi} + e^{y}e^{-xi}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)}{2} = \cos x(e^{-y} + e^{y}) + i\operatorname{sen} x(e^{-y} - e^{y}) \\
&= \cos x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos z = \cos x \cosh y - i\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \tag{3-4}$$

De maneira análoga, temos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+yi) &= \frac{e^{(x+yi)i} - e^{-(x+yi)i}}{2i} = \frac{e^{(-y+xi)} - e^{(y-xi)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{xi} - e^{y}e^{-xi}}{2i} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)}{2i} = \frac{\cos x(e^{-y} - e^{y}) - i\operatorname{sen} x(-e^{-y} + e^{y})}{2i} \\
&= \cos x\left(\frac{-e^{y} + e^{-y}}{2i}\right) - i\operatorname{sen} x\left(\frac{-e^{y} - e^{-y}}{2i}\right) = -\cos x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2i}\right) + i\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2i}\right) \\
&= i^2\cos x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2i}\right) + i\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2i}\right),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y. \tag{3-5}$$

Note que,

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \cos x \cosh y = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 0,$$

mas $\cosh y > 0$, então

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi \ \text{ com } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, substituindo $x = \pi/2 + k\pi$ em (3-4), então

$$\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 0 \ \text{ temos que } \ \operatorname{senh} y = 0$$

com isso, temos que $y = 0$. Portanto,

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = x + yi = \pi/2 + k\pi.$$

De maneira análoga, temos que

$$\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cosh y = 0 \quad \text{e} \quad \cos x \operatorname{senh} y = 0,$$

mas $\cosh y > 0$, então

$$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ \text{ com } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, substituindo $x = k\pi$ em (3-5), então

$$\cos x \operatorname{senh} y = 0 \ \text{ temos que } \ \operatorname{senh} y = 0$$

com isso, temos que $y = 0$. Portanto,

$$\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = x + yi = k\pi.$$

■

A grande maioria das propriedades para as funções trigonométricas reais, permanecem sendo válidas no caso dos números complexos. Como por exemplo, tem-se a seguinte proposição

Proposição 3.3.2 *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos:*

(a) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
(b) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$. (função ímpar)
(c) $\cos(-z) = \cos z$. (função par)
(d) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$.
(e) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$.

Demonstração. (a) De fato,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{-4}\\ &= \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}-e^{2iz}+2-e^{2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

(b) De fato,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(-z) &= \frac{e^{i(-z)}-e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\ &= -\operatorname{sen} z.\end{aligned}$$

(c) De fato,

$$\begin{aligned}\cos(-z) &= \frac{e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ &= \cos z.\end{aligned}$$

(d) De fato,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w &= \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\right)+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right)\\
&= \frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(-z+w)}+e^{-i(z-w)}-e^{-i(z+w)}}{4i}+\\
&\frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(-z+w)}-e^{-i(z-w)}-e^{-i(z+w)}}{4i}\\
&= \frac{2(e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)})}{4i} = \frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z+w).
\end{aligned}
$$

(e) De fato,

$$
\begin{aligned}
\cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\right)-\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right)\\
&= \frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(-z+w)}+e^{-i(z-w)}+e^{-i(z+w)}}{4}+\\
&\frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(-z+w)}-e^{-i(z-w)}+e^{-i(z+w)}}{4}\\
&= \frac{2(e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)})}{4} = \frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2i} = \cos(z+w).
\end{aligned}
$$

■

Se $t \in \mathbb{R}$ então a função seno e cosseno é uma função limitada, isto é,

$$|\operatorname{sen} t| \leq 1 \qquad \text{e} \qquad |\cos t| \leq 1.$$

Observe que,

$$|\cos yi| = \left|\frac{e^{i(yi)}+e^{-i(yi)}}{2}\right| = \left|\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right| = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

com isso,

$$\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{y\to\infty}(e^{-y}+e^{y}) = \infty,$$

e

$$|\operatorname{sen} yi| = \left|\frac{e^{i(yi)}-e^{-i(yi)}}{2i}\right| = \left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right| \geq \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

com isso,

$$\lim_{y\to\infty}\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to\infty}\left(e^y-e^{-y}\right)=\infty.$$

3.4 Funções Hiperbólicas

Definindo-se as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico de uma variável complexa por:

$$\operatorname{senh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

com isso,

$$\operatorname{tgh} z=\frac{z}{\cosh z} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech} z=\frac{1}{\cosh z}$$

para todo $z\in\mathbb{C}$ tal que $\cosh z\neq 0$.

Além disso,

$$\operatorname{cotgh} z=\frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z} \quad \text{e} \quad \csc z=\frac{1}{\operatorname{senh} z}$$

para todo $z\in\mathbb{C}$ tal que $\operatorname{senh} z\neq 0$.

Proposição 3.4.1 *Tem-se que,*

$\cosh z=0$ *se e somente se,* $z=(1/2+k)\pi i$ *com* $k\in\mathbb{Z}$

e

$\operatorname{senh} z=0$ *se e somente se,* $z=k\pi i$ *com* $k\in\mathbb{Z}$.

Demonstração. Como,

$$\cos(iz)=\frac{e^{i(iz)}+e^{-i(iz)}}{2}=\frac{e^{-z}+e^z}{2}=\cosh z$$

então,

$$\cosh z=0 \quad \text{o que implica} \quad \cos(iz)=0.$$

Pela **Proposição** (3.3.1), temos

$$iz = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

$$-z = \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi i \quad \text{o que implica} \quad z = \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi i$$

e

$$\operatorname{sen}(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = \left(\frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i}\right)\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{i\left(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right)}{2} = i \operatorname{senh} z.$$

então

$$\operatorname{senh} z = 0 \quad \text{o que implica} \quad \operatorname{sen}(iz) = 0.$$

Pela **Proposição** (3.3.1), temos

$$iz = k_1\pi$$

$$-z = k_1\pi i \quad \text{o que implica} \quad z = -k_1\pi i$$

$$z = k\pi i \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

■

Proposição 3.4.2 *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos:*

(a) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.

(b) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$.

(c) $\cosh(-z) = \cosh z$.

(d) $\operatorname{senh}(z+w) = \operatorname{senh} z \cosh w + \cosh z \operatorname{senh} w$.

(e) $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w - \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w$.

Demonstração. (a) De fato,

$$\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z = \left(\frac{e^{z} - e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + 2e^{z}e^{-z} + e^{-2z}}{4} + \frac{-e^{2z} + 2e^{z}e^{-z} - e^{-2z}}{4}$$

$$= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(b) De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-z) &= \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2} = -\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) \\
&= -\operatorname{senh} z.
\end{aligned}$$

(c) De fato,

$$\begin{aligned}
\cos(-z) &= \frac{e^{-z} + e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\
&= \cosh z.
\end{aligned}$$

(d) De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh} z \cosh w + \cosh z \operatorname{senh} w &= \left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^{w} + e^{-w}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^{w} - e^{-w}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{(z+w)} - e^{-(-z+w)} + e^{-(z-w)} - e^{-(z+w)}}{4} + \\
&\quad \frac{e^{(z+w)} + e^{-(-z+w)} - e^{-(z-w)} - e^{-(z+w)}}{4} \\
&= \frac{2(e^{(z+w)} - e^{-(z+w)})}{4} = \frac{e^{(z+w)} - e^{-(z+w)}}{2} = \operatorname{senh}(z+w).
\end{aligned}$$

(e) De fato,

$$\begin{aligned}
\cosh z \cosh w - \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w &= \left(\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^{w} + e^{-w}}{2}\right) - \left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^{w} - e^{-w}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{(z+w)} + e^{-(-z+w)} + e^{-(z-w)} + e^{-(z+w)}}{4} + \\
&\quad \frac{e^{(z+w)} - e^{-(-z+w)} - e^{-(z-w)} + e^{-(z+w)}}{4} \\
&= \frac{2(e^{(z+w)} + e^{-(z+w)})}{4} = \frac{e^{(z+w)} + e^{-(z+w)}}{2} = \cosh(z+w).
\end{aligned}$$

■

Para fixar as ideias, aplicando-se esses conceitos nos seguintes exemplos:

Exemplo 3.4.1 *Mostre que*

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \qquad e \qquad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh} y$$

para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Solução. De fato,

$$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= |\cos(x+yi)|^2 = |\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y|^2 = (\sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y})^2\\ &= \cos^2 x(1+\operatorname{senh}^2 y) + (1-\cos^2 x)\operatorname{senh}^2 y = \cos^2 x + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{senh}^2 y - \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y\\ &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen} z|^2 &= |\operatorname{sen}(x+yi)|^2 = |\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y|^2 = (\sqrt{\operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y})^2\\ &= \operatorname{sen}^2 x(1+\operatorname{senh}^2 y) + (1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{senh}^2 y = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{senh}^2 y - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y\\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y.\end{aligned}$$

Exemplo 3.4.2 *Ache todas as raízes da equação senh$z = i$.*

Solução. De fato,

$$\operatorname{senh} z = i.$$

Por definição, tem-se

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i$$

Com isso,

$$e^z(e^z - e^{-z}) = e^z 2i \quad \text{o que implica} \quad e^{2z} - 1 = e^z 2i.$$

Fazendo $w = e^z$, tem-se

$$w^2 - 2iw - 1 = 0.$$

Aplicando-se algumas manipulações matemáticas, obtém-se

$$(w-1)^2 = 0 \quad \text{o que implica} \quad w = i$$

mas,

$$w = e^z \quad \text{o que implica} \quad e^z = i.$$

EntÃ£o,

$$z = \log i.$$

quando ocorre

$$\begin{aligned} z \in \log i &= \{\ln|i| + i(\operatorname{Arg} z + wk\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi i : k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o estudo realizado sobre os números complexos, teve como objetivo construir uma narrativa do ponto de vista histórica destacando diferenças entre os conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos. Naturalmente a apresentação dos números complexos podem causar dúvidas a respeito da sua concepção de parte real e parte imaginária. Neste sentido, a responsabilidade do professor é ainda maior devido ao alto nível de abstração.

Diante disso, nesse trabalho foi visto algumas propriedades dos números complexos que coincidiram com os números reais, pois obviamente os números complexos se apresentam como uma extensão natural do conjunto dos números reais. Dentre essas semelhanças, destacam-se o conceito de inverso multiplicativo, isto é, o único em todo o conjunto númerico que, multiplicado por seu inverso, conhecido como conjugado no caso complexo, tem como resultado a unidade. Destaca-se também, a semelhança no conceito de módulo de um número, ou seja, é a distância entre esse número e a origem, considerando no caso real todos os números como uma reta numérica. Além disso, pode-se mostrar sem grandes dificuldades que no caso complexo das funções trigonométricas, funções logarítmicas, funções exponenciais e funções hiperbólicas que gozam de algumas propriedades análogas às do caso real. Um fato importante que exemplifica isso, em relação as funções trigonométricas, demonstrou-se que, quando um número complexo for real, isto é, sua parte imaginaria for igual zero, então as funções cosseno e seno complexas coincidem com as funções cosseno e seno reais. Além do mais, as funções cosseno e seno complexas são funções periódicas de período 2π, assim como no caso real.

Em se tratando das diferenças entre esses dois conjuntos, destaca-se um importante fato dos reais serem um corpo bem ordenado, que no entanto, o mesmo não acontece para o corpo dos números complexos. Segundo Monteiro (1969), ele mostra que a ordem usual é a única que torna os reais um corpo ordenado. Além disso, a ordem modular do corpo dos números complexos não é compatível com a ordem usual nos reais. Devido as várias propriedades que foram apresentadas neste trabalho na forma demonstrativa de proposição/teorema foi dado uma interpretação geométrica para soma e multiplicação de dois números complexos. Utilizando técnicas de manipulação entres números complexos, como por exemplo escrever um número complexo na sua forma trigonométrica foi apresentado uma demonstração da lei dos cossenos e também para fórmula que determina a soma de dois arcos tanto para a função seno como para a função cosseno. Outra diferença a ser destacada é relação as funções cosseno e seno complexas serem ilimitadas, ao contrário das funções cosseno e seno reais, que são limitadas em um intervalo de -1 à 1. Isso ocorre uma vez que os números complexos não são um corpo ordenado. Em relação aos logaritmos, que ao contrário do caso real onde todo número positivo possui um único logaritmo, um número complexo não nulo possui uma infinidade de logaritmos. Sabe-se também, que função logarítmica real é a função inversa da função exponencial real, todavia, esse fato não se repete com a função logarítmica complexa, ou seja, ela não é a inversa da função exponencial complexa. Sendo que a justificativa para esse fato se dá por conta da função exponencial complexa não ser injetiva. E por fim, destaca-se também em relação as funções exponenciais, que no caso complexo podem assumir valores negativos, diferenciando fortemente da exponencial real. Além disso, sabe-se que uma vez que as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π no caso real, o que não acontece no caso complexo, pois a função é periódica de período $2\pi i$. Uma proposição interessante demonstrada no decorrer trabalho é em relação as exponenciais complexas, que é possivel obter-se exponenciais iguais com expoentes complexos diferentes, fato que não se repete no caso real. Em virtude do que foi mencionado, concluir-se que a função exponencial complexa não é bijetiva, nesse caso, não admitindo inversa.

Diante dessas observações feitas em relação aos números complexos, existem varias soluções diferentes em relação ao comportamento do caso real, cujo mereciam ser expostas para os alunos de ensino médio. Além do mais, é de suma importância para que os alunos desmistifiquem a solução de alguns conceitos no caso real, e que podem perceber que essas soluções podem se comportar de maneira diferente no caso complexo. O conjunto dos números complexos, como visto no Capítulo 1, teve processo histórico desenvolvido graças ao grande empenho de diversos matemáticos, que proporcionaram diversos benefícios para a área, principalmente na resolução das equações, mas não apenas nas equações, seus conceitos podem ser aplicados em diversos ramos da matemática assim como em algumas ciências, não deixando de considerar sua importância histórica.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. LTC, 2008.

[2] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.

[3] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria números complexos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992.

[4] EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. Unicamp, 1995.

[5] FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES, N. C. **Introdução às funções de uma variável complexa**. SBM, 2013.

[6] GARBI, G. G. **A rainha das ciências**. Editora Livraria da Física, 2006.

[7] GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. Editora Livraria da Física, 2009.

[8] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PÉRIGO, R. **Matemática: volume único**. Atual, 2002.

[9] LIMA, E. L.; OTHERS. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[10] LINTZ, R. G.; DA SILVA, C. **História da matemática**. UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007.

[11] MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de álgebra**. Livro Tecnico e Cientifico, 1978.

[12] SIMMONS, J. **Os 100 maiores cientistas da história: uma classificação dos cientistas mais influentes do passado e do presente**. Difel, 2002.

[13] STEWART, I. **O fantástico mundo dos números: A matemática do zero ao infinito**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2016.