INSTITUTO FEDERAL GOIANO – CAMPUS MORRINHOS
DEPARTAMENTO DE PESQUISA E PÓS – GRADUAÇÃO
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FABRÍCIO FERNANDES DIAS

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

MORRINHOS
2018

FABRÍCIO FERNANDES DIAS

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Monografia apresenta ao Programa de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal Goiano – IFGoiano Campus Morrinhos, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Me. Eduardo Cordeiro Fideles

MORRINHOS
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/IF Goiano Campus Morrinhos

D541a Dias, Fabrício Fernandes.
Uma abordagem do ensino de sequências numéricas. / Fabrício Fernandes Dias. – Morrinhos, GO: IF Goiano, 2018.
76 f. : il. color.

Orientador: Me. Eduardo Cordeiro Fideles.
Monografia (especialização) – Instituto Federal Goiano Campus Morrinhos, Especialização em Ensino de Ciências e Matemática, 2018.

1. Matemática - Ensino-aprendizado. 2. Matemática (Ensino médio). 3. Sequências (Matemática). I. Fideles, Eduardo Cordeiro. II. Instituto Federal Goiano. III. Título.

CDU 51:373.5

Fonte: Elaborado pelo Bibliotecário-documentalista Elder Silva, CRB1/2786

FABRÍCIO FERNANDES DIAS

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Monografia apresenta ao Programa de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal Goiano – IFGoiano Campus Morrinhos, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em 06 de junho de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Eduardo Cordeiro Fideles

Prof. Me. Eduardo Cordeiro Fideles

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Morrinhos

Orientador

PCFeracioli

Prof. Me. Paulo César Feracioli dos Santos

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Goiano Campus Morrinhos

Wellington Silva Tavares

Prof. Me. Wellington Silva Tavares

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Morrinhos

AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar.

À minha mãe, Silzete Lopes Fernandes Dias e ao meu pai, Rubens Pereira Dias pelo constante e incondicional apoio, desde os primeiros anos de estudo.

À minha esposa Danila Teodoro da Silva Dias e minha filha Sofia Teodoro Fernandes Dias pelo incondicional apoio, amor e paciência, principalmente durante minhas ausências.

Ao meu irmão Guilherme Fernandes Dias pela motivação, apoio e orientação.

À todos meus professores do programa, em especial ao Prof. Me Eduardo Cordeiro Fideles, pela paciência, orientação e disponibilidade constante.

À todos meus colegas de especialização, em especial Cíntia Lopes de Oliveira e Guilherme Santos Gomes, companheiros em todas as etapas do programa.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – campus Morrinhos pela oportunidade oferecida.

Resumo

O presente estudo trata-se de uma proposta de abordagem de sequências numéricas para o ensino médio em que objetivou apresentar o tema de maneira ampla e auxiliar o docente na exposição do assunto e ao aluno que queira se aprofundar no estudo do conteúdo. Inicialmente foi discorrido sobre fatos históricos relevantes para o estudo do tema, mostrando como sempre esteve presente e sua importância para sociedade. Além dos assuntos costumeiramente tratados nos livros didáticos, como progressões aritméticas e geométricas, foram abordados tópicos relevantes para o estudo e aprofundamento do tema, como recorrências lineares de primeira e segunda ordem, progressões aritméticas de segunda ordem, progressões harmônicas e sequências Fibonacci, com a formalização das demonstrações e diversos exemplos que ilustram o objeto de estudo e facilitam o entendimento. Apresentamos também diversos problemas que podem contribuir para o aprendizado do assunto, que além de tratar sobre sequências numéricas abrem a oportunidade de revisar outros assuntos da matemática e de outras disciplinas. Por fim, apresentamos uma sugestão de metodologia de ensino, a metodologia da resolução de problemas, que pode auxiliar o docente na preparação de suas aulas objetivando uma eficácia no aprendizado de seus alunos.

Palavras- chave: Sequências numéricas. Recorrências. Progressão aritmética. Progressão geométrica. Progressões harmônicas. Sequência Fibonacci. Resolução de problemas.

Abstract

The present study deals with a proposal of numerical sequence approach to secondary education in which the purpose was to present the theme in a broad way and to assist the teacher in the presentation of the subject and to the student who wants to deepen in the study of content. Initially it was discussed about historical facts relevant to the study of the theme, showing how it was always present and its importance for society. In addition to the subjects usually dealt with in the textbooks, such as arithmetic and geometric progressions, topics relevant to the study and deepening of the subject were discussed as first and second order linear recurrences, second order arithmetic progressions, harmonic progressions and Fibonacci sequences, with formalization of the demonstrations and several examples that illustrate the object of study and facilitate understanding. We also present several problems that can contribute to the learning of the subject, which besides dealing with numerical sequences open the opportunity to review other subjects of mathematics and other disciplines. Finally, we present a suggestion of teaching methodology, the methodology of problem solving, that can help the teacher in the preparation of his classes aiming at an effective learning in his students.

Keywords: Numerical sequences. Recurrences. Arithmetic progression. geometric progression. Harmonic progressions. Fibonacci sequence. Troubleshooting.

Sumário

INTRODUÇÃO

O estudo de sequências numéricas no ensino médio é relevante, pois é um conteúdo frequentemente encontrado no cotidiano das pessoas e das mais diversas maneiras, como no estudo de cálculos financeiros (SANTOS, 2013), em elementos decorrente da sequência Fibonacci e do número de ouro (LEOPOLDINO, 2016), em alguns jogos como o da torre de hanoi (ARAÚJO, 2016), além de diversas outros situações e também em outras disciplinas.

Porém, atualmente, o estudo das sequências numéricas no ensino médio tem se restringido ao ensino de progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG). Nesse sentido, Trindade *e col.* (2016, p.2) coloca que:

> “O conceito de sequência no Ensino Médio, geralmente, tem se limitado ao estudo das progressões (aritmética e geométrica). Nesta etapa da Educação Básica é relevante trabalhar vários tipos de sequências cujos modelos matemáticos vão além da função afim (Progressão Aritmética) e exponencial (Progressão Geométrica)”.

Geralmente a abordagem e definição deste conteúdo são feitas de modo bem sucinto e, na maioria das vezes, se atendo somente às formulas e resolução de exercícios, quase sempre sem sentido algum para o aluno, sendo dedicada pouca atenção a outros aspectos relacionados ao ensino de sequências numéricas que poderiam ser relevantes ao aprendizado. Assim, conforme Santos (2013, p.4)

> “Muitos alunos do Ensino Médio pensam que os conteúdos de Matemática somente enfatizam um grande número de fórmulas sem sentido, com cálculos intermináveis e sem relação com o mundo real. Infelizmente na grande maioria das escolas o ensino das progressões não é construído junto com os alunos, mas simplesmente passado para eles, nota-se também que esses conceitos não são abordados a partir da história e não têm ligação com a realidade dos mesmos”.

Nesse sentido o presente estudo teve por objetivo mostrar como o ensino de sequências numéricas pode ser enriquecedor para o professor e para o aluno, apresentando elementos relacionados ao presente conteúdo que, usualmente, não são estudados no ensino médio, como os fatos históricos, o estudo de outras sequências numéricas, exercícios significativos e interdisciplinares além de sugerir uma metodologia de ensino que possa contribuir para o ensino-aprendizagem do assunto.

Nesta abordagem, o tema foi organizado em quatro seções. Na primeira seção abordamos fatos históricos que possam ser relevantes e motivadores ao estudo do tema, na segunda seção dissertamos sobre a parte teórica de sequências numéricas que vai desde recorrências até às sequências usualmente ensinadas no ensino médio (PA e PG), passando por progressões aritméticas de segunda ordem, progressões harmônicas, sequência Fibonacci, contendo demonstrações das fórmulas e diversos exemplos. A terceira seção foi dedicada a problemas que possam ser relevantes ao estudo do tema, sendo em sua essência relativos a sequências numéricas, porém abordando outros temas da matemática e de outras disciplinas como a biologia e a química. Por fim, na última seção, é apresentada uma sugestão de metodologia de ensino, a resolução de problemas, que é muito estudada e pesquisada por educadores matemáticos e pode ser eficiente no processo de ensino-aprendizagem de sequências numéricas.

1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Nesta seção pretende-se, com a exposição de fatos históricos, mostrar como conceitos relativos a sequências numéricas sempre fizeram parte do cotidiano da sociedade e como foram benéficos em diversas situações. Não se tem a intenção de apresentar todos os aspectos históricos relativos ao tema, porém, utilizando BOYER (1974) como principal referencial, buscamos evidenciar alguns acontecimentos que possam ser relevantes e principalmente servir como elemento motivador ao estudo do tema.

1.1 PERÍODO DE CHEIAS DO RIO NILO

Segundo Boyer (1974), os egípcios, por volta de 3000 a.C., precisavam solucionar o problema da inundação do Rio Nilo, pois precisavam, dentre outras necessidades, saber a época certa para efetuarem o plantio para terem a colheita suficiente, garantindo assim o sustento. Observaram que existia uma relação entre as enchentes anuais deste Rio e a estrela Sirius, também chamada de estrela do cão. Perceberam que a inundação do Nilo vinha pouco depois que esta estrela se levantava a leste, logo antes do sol. Observando que este acontecimento era separado por 365 dias, estabeleceram um calendário anual, conforme as inundações, composto por doze meses de trinta dias mais cinco dias de festa.

A criação deste calendário, estabelecendo um padrão, nos indica uma ideia de sequência.

1.2 PAPIRO DE RHIND (OU PAPIRO DE AHMES)

Outro registro histórico matemático que podemos destacar é o presente no papiro de Rhind que, para muitos, é um documento que, além de ser um dos mais antigos, é o principal registro matemático deixado pelos egípcios.

Ainda, conforme Boyer (1974), esse papiro, que possuía cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, é conhecido assim, porque foi comprado numa cidade à beira do Nilo por um antiquário escocês chamado Henry Rhind ou, chamado com menos frequência, papiro de Ahmes em homenagem ao escriba Ahmes que o copiou por volta de 1650 a.C.. Ahmes relata que o documento provém de um protótipo que acreditava datar cerca de 2000 a 1800 a.C.. Hoje se encontra no British Museum e alguns fragmentos BrooKlin Museum.

Figura 1: Papiro de Rhind ou Ahmes

(Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html)

Entre diversos problemas, o papiro da Rhind trás alguns envolvendo sequências numéricas. Vamos destacar os problemas 40 e 79.

1.2.1 Papiro de Rhind - Problema 40

Cem medidas de trigo foram divididas entre cinco pessoas, de tal modo que a segunda recebeu a mais que a primeira, tanto quanto, à terceira recebeu a mais que a segunda, à quarta a mais que a terceira e a quinta mais que a quarta. Além disso, as duas primeiras obtiveram sete vezes menos que as três restantes. Quanto coube a cada uma?

Uma solução

Chamaremos de a a quantidade recebida pela primeira pessoa e de b a quantidade recebida a mais que a primeira pela segunda pessoa, então temos:

Parcela da primeira pessoa: a

Parcela da segunda pessoa: $a+b$

Parcela da terceira pessoa: $a+2b$

Parcela da quarta pessoa: $a+3b$

Parcela da quinta pessoa: $a+4b$

De acordo com os dados do problema, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} a+(a+b)+(a+2b)+(a+3b)+(a+4b)=100 \\ 7[a+(a+b)]=(a+2b)+(a+3b)+(a+4b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b=20 \\ 11a-2b=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

$$a=\frac{5}{3};\ \ b=\frac{55}{6}$$

Logo a parcela de cada pessoa é

$$\frac{5}{3},\frac{65}{6},\frac{20}{1},\frac{175}{6},\frac{115}{3}$$

Ou

$$\frac{5}{3},\frac{5}{3}+\frac{55}{6},\frac{5}{3}+2.\frac{55}{6},\frac{5}{3}+3.\frac{55}{6},\frac{5}{3}+4.\frac{55}{6}$$

Como podemos observar a sequência é uma progressão aritmética de razão igual a $\frac{55}{6}$.

1.2.2 Papiro de Rhind - Problema 79

"O problema 79 cita apenas 7 casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hecates" (BOYER, 1974, p. 12).

Presume-se que o escriba estava se tratando de um problema que diz que em 7 casas havia 7 gatos, cada um deles come 7 ratos, cada rato havia comido 7 espigas, e cada espiga havia produzido 7 medidas de grão. Talvez o problema pedisse a soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grãos.

Uma solução

Podemos observar que o problema descreve a sequência $(7, 49, 343, 2401, 16807)$, que pode ser escrita $(7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5)$ que é uma PG de razão 7, então a soma é dada por:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 7.\frac{7^5 - 1}{7 - 1} = 19607$$

1.3 MESOPOTÂMIA

Segundo Boyer (1974), na Mesopotâmia, existe uma grande quantidade de material relativo à matemática, porém estes materiais, grafados em tabletas, provêm de dois períodos muito distantes, a idade da Babilônia antiga (primeiros séculos do segundo milênio) e o período selêucida (últimos séculos do primeiro milênio).

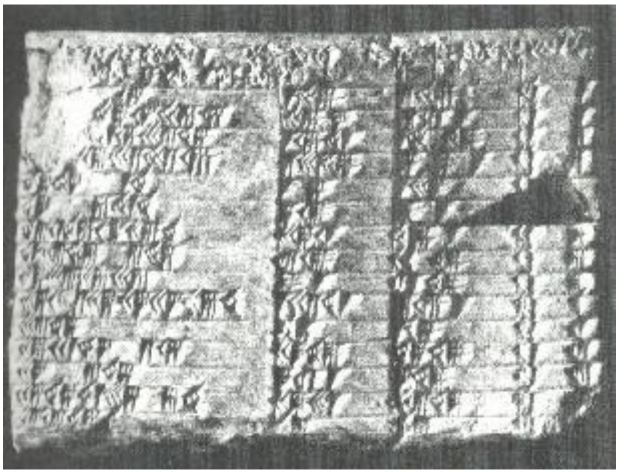
Nota-se que existem admiráveis realizações dos babilônicos no campo da álgebra e um desses feitos está na tábua de Louvre, datada por volta de 300 a.C., e apresenta dois problemas interessantes referentes a sequências numéricas. São eles,

$1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

No primeiro problema encontramos a soma de uma progressão geométrica e no segundo a soma da série de quadrados. Diante desses problemas fica o questionamento se os babilônicos conheciam as fórmulas da soma dos termos de uma progressão geométrica e da soma dos quadrados perfeitos, já que as tabelas mesopotâmicas, assim como os papiros egípcios, apresentam apenas casos específicos, sem formulações gerais.

Figura 2: Tabela Plimpton



(Fonte: http://www.matematica.br/historia/babilonia.html)

1.4 PARADOXO DE ZENO

Conforme Boyer (1974), Zeno nasceu na cidade de Eleia, onde viveu por volta do ano 450 a.C. e escreveu um livro com 40 paradoxos, sendo os que se refere ao movimento os de maior relevância. Quatro deles foram difundidos por Aristóteles, são eles*: Dicotomia, Aquiles, Flecha* e *Estádio*.

Ambos se referem à soma de um número infinito de termos, sendo relevante ao estudo de sequências numéricas, especificamente a convergência de séries infinitas de números. Segue o trecho do paradoxo de *Aquiles:*

> "(...) Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que caminhe. Pois, quando Aquiles chegar a posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga.(BOYER, 1974, p.55)"

Suponhamos, nesse paradoxo, que a tartaruga tenha saído 10 metros a frente do veloz Aquiles e que quando Aquiles tiver percorrido os 10 metros a tartaruga, nesse intervalo de tempo, percorrera 1 metro e quando Aquiles tiver percorrido esse 1 metro a tartaruga percorrera $\frac{1}{10}m$, quando Aquiles tiver coberto este $\frac{1}{10}m$, a tartaruga percorrera $\frac{1}{100}m$ e assim por diante, de tal modo que Aquiles nunca alcançará a tartaruga.

Neste exemplo, podemos observar a seguinte sequência $\left(10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\right)$, que é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{10}$.

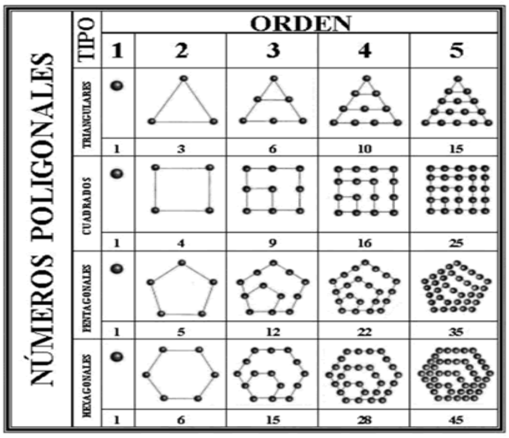
.

1.5 PITAGÓRICOS E OS NÚMEROS FIGURATIVOS

É notório que os pitagóricos demonstravam grande interesse pelos números, especialmente pelos figurativos. Cunha (2014, p.16 apud, OLIVEIRA, 2011, P.15) destaca que “os números figurados são números que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes”.

Abaixo segue a representação geométrica de quatro classes de números figurativos, são elas: *triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais*.

Figura 3: Números figurados ou números pitagóricos



Representación de los número triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales.

(Fonte: http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Pitagoras11.asp.htm)

Portanto, os números figurados ou pitagóricos representam a quantidade de pontos equidistantes utilizados para construir as figuras geométricas representadas acima e são calculados por meio das seguintes somas:

- Triangulares

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Quadrangulares

$$\big(1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)\big) = n^2$$

- Pentagonais

$$\big(1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)\big) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

- Hexagonais

$$\big(1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3)\big) = 2n^2 - n$$

Em que *n* representa a ordem em que as figuras estão.

Nota-se que os termos das sequências utilizadas nas somas podem ser obtidos através do cálculo da quantidade de pontos utilizados a mais que na figura anterior.

1.6 ELEMENTOS DE EUCLIDES

Pouco se sabe sobre Euclides, tanto é que nenhum lugar de nascimento ficou associado ao seu nome, sendo conhecido por Euclides de Alexandria por ter ido ensinar naquele lugar e presume-se também que tenha estudado com os discípulos de Platão.

Segundo Boyer (1974), *Os Elementos* de Euclides é o texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos, sendo composto por treze capítulos, sendo os seis primeiros versando sobre geometria plana elementar, três sobre teoria dos números, o Livro X sobre incomensuráveis e os últimos três sobre geometria espacial. Diante dessa relevante obra, no que concerne a sequências numéricas, podemos destacar a proposição 35 do livro IX, que contém uma fórmula para soma de uma progressão geométrica.

> "Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último, números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos aqueles que o precedem (BOYER, 1974, p. 84)".

Este enunciado equivale a seguinte expressão

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

Então temos que

$$\frac{a_1 . q^n - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

$$\frac{a_1(q^n - 1)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_1(q - 1)}{a_1}$$

Logo

$$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

1.7 GAUSS E A SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Conforme Boyer (1974), o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), a criança prodígio, foi o maior matemático da época e talvez de todos os tempos. Seu pai, homem trabalhador, era muito teimoso em seu ponto de vista e tentou evitar que seu filho recebesse uma educação apropriada, porém sua mãe, mesmo sem instrução, incentivou Gauss em seus estudos, vindo a se orgulhar do sucesso de seu filho até sua morte aos noventa e sete anos.

Figura 4: Carl Friedrich Gauss

(Fonte: http://www.famous-mathematicians.com/carl-friedrich-gauss/)

Gauss frequentou a escola local, onde há uma história segundo a qual o professor de Carl, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100, instruindo os alunos a deixarem sua lousa sobre a mesa assim que terminassem a tarefa. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor, que olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam incessantemente. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta correta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Gauss havia calculado mentalmente a soma da progressão aritmética 1 + 2 + 3 + . . .+ 98 + 99 + 100 e, como era de se esperar, Gauss teria que explicar ao espantado professor como teria chegado ao resultado.

Gauss percebeu que:

$$1 + 100 = 101$$
$$2 + 99 = 101$$
$$3 + 98 = 101$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$49 + 52 = 101$$
$$50 + 51 = 101$$

dá um total de 50 pares cuja soma é 101, portanto o total da soma dá $50 \times 101 = 5050$.

Com isso conjectura-se a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

1.8 FIBONACCI

Segundo Boyer (1974) Leonardo de Pisa era filho de um comerciante italiano que se chamava Bonaccio, daí o nome Fibonacci. Seu pai tinha negócios no norte da África possibilitando que Fibonacci visitasse vários países como Egito, Síria e Grécia e tivesse contato com vários procedimentos matemáticos.

A sequência Fibonacci foi definida por Leonardo de Pisa (cerca de 1180 – 1250) ou Fibonacci, como era mais conhecido, e publicada no ano de 1202 no livro intitulado *Liber Abaci* (livro do ábaco) que, conforme Boyer (1974), é um livro muito completo que trata sobre métodos e problemas algébricos.

A sequência Fibonacci é uma sequência numérica dada pelos termos (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...), onde cada termo da sequência, a partir do terceiro, é determinado pela soma dos outros dois termos anteriores, sendo que os dois primeiros termos da sequência são iguais a 1.

Além de a sequência Fibonacci ter vários usos na matemática ela possui uma aplicação muito interessante, que pode ser usada no ensino de sequências numéricas como forma de despertar a atenção e motivação do aluno, que é sua conexão direta com o “número de ouro”.

Essa relação é descrita através do seguinte teorema: "A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro quando *n* tende para o infinito" (LEOPOLDINO, 2016, p.61), ou seja, quanto maior for o termo da sequência da sequência Fibonacci divido pelo seu antecessor, mais próximo o resultado ficará do número de ouro.

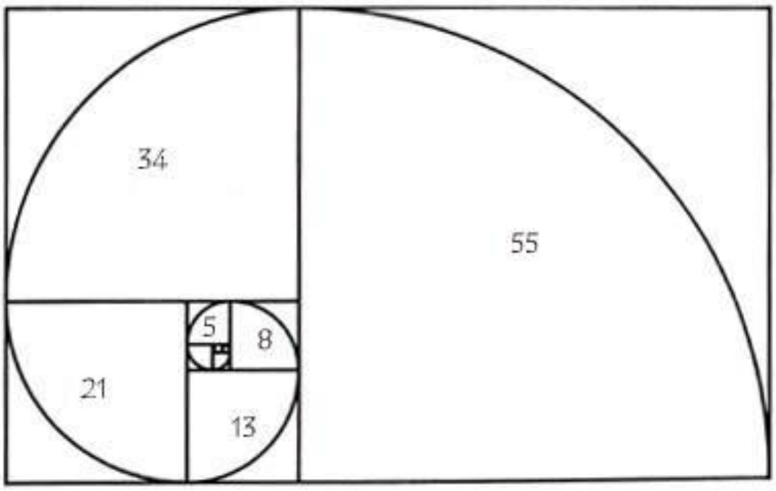
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$

sendo $\varphi = 1{,}6180339887\ldots$, chamado de número de ouro, divina proporção, razão áurea além de outros nomes.

Uma aplicação da sequência Fibonacci encontrada com frequência na natureza é a espiral de Fibonacci, também chamada de espiral áurea.

Para construir a espiral abaixo, dispomos lado a lado dois quadrados de lado 1. Em seguida, construímos um quadrado de lado 2 que tenha uma aresta comum com os dois quadrados anteriores. Continuando esse processo podemos observar que os quadrados possuem lados de medidas iguais aos termos da sequência Fibonacci. Finalmente, utilizando um compasso é possível traçar quartos de circunferências, conforme a figura abaixo, formando assim uma curva, denominada espiral de Fibonacci ou espiral áurea.

Figura 5: Espiral Áurea



(Fonte: https://viagemnamatematica.wordpress.com/2015/03/07/sequencia-de-fibonacci/)

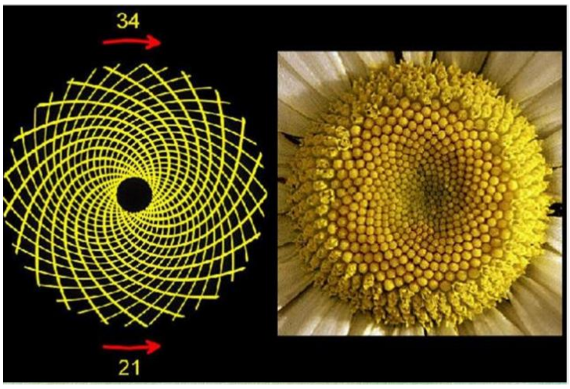
A sequência Fibonacci, tendo relação direta com a razão áurea, possui diversas ocorrências na natureza fascinando não só matemáticos, mas também artistas, biólogos, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e outros.

Em seguida temos alguns exemplos em que a sequência Fibonacci aparece:

1.8.1 Girassol

Os girassóis têm suas sementes preenchendo o miolo e dispostas em dois conjuntos de espirais, geralmente 34 espirais no sentido horário e 21 espirais no sentido anti-horário. Esses dois números fazem parte dos termos da sequência Fibonacci.

Figura 6: Espirais no girassol

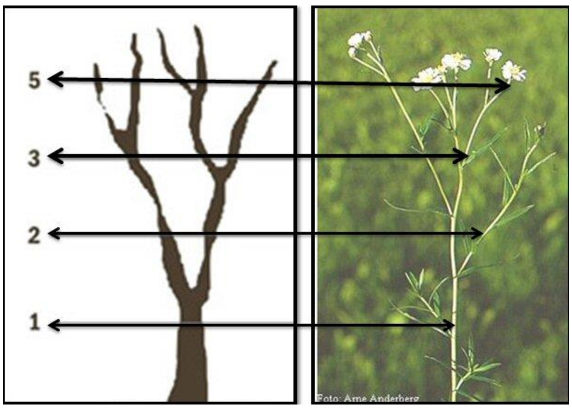


(Fonte: http://raizesefolhas.com.br/a-matematica-da-natureza/)

1.8.2 Achillea Ptármica

O crescimento dos galhos da *Achillea Ptármica* obedece a um padrão que se relaciona diretamente aos termos da sequência Fibonacci.

Figura 7: Achillea Ptármica



(Fonte: http://www.estgv.ipv.pt/PaginasPessoais/mnasce/relatorio/templatemo_250_chess/%C3%A1rvores.html)

1.8.3 Camaleão

Podemos observar, na cauda do camaleão, uma das representações quase perfeita da espiral de Fibonacci.

Figura 8: Camaleão e a espiral áurea

(Fonte: https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/aplicacoes-da-sequencia-de-fibonacci)

1.8.4 Caramujo

No caramujo, a proporção entre um compartimento e seu antecessor é igual à aproximadamente ao número áureo.

Figura 9: Caramujo e a espiral áurea

(Fonte: http://aumagic.blogspot.com.br/2014/05/assinatura-de-deus-sequencia-de.html)

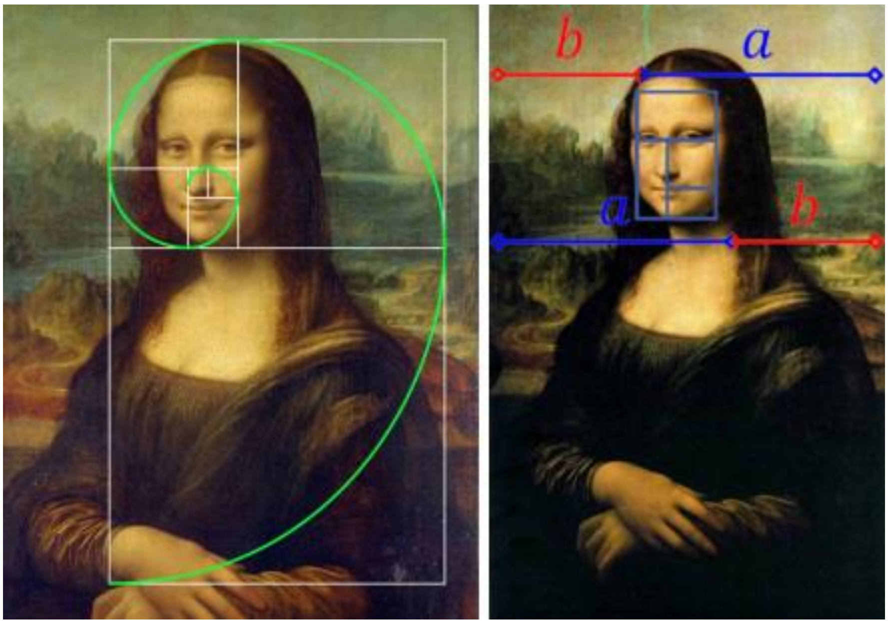
1.8.5 Mona Lisa

Leonardo Da Vince utilizou a razão áurea nas relações entre o tronco e a cabeça e também entre outros elementos do rosto em sua obra, Mona Lisa.

Segundo Leopoldino (2016, p. 31 apud VEIGA, 2006, p. 13)

> "Leonardo da Vinci pensava que a Arte deve manifestar beleza em movimento. Assim, introduzindo retângulos de ouro nas suas obras, pois o fato destes poderem definir espirais que curvam até ao infinito dão uma sensação de movimento. Ao introduzir a secção de ouro nas suas pinturas, permitiam que estas se tornassem mais agradáveis à vista".

Figura 10: Mona Lisa

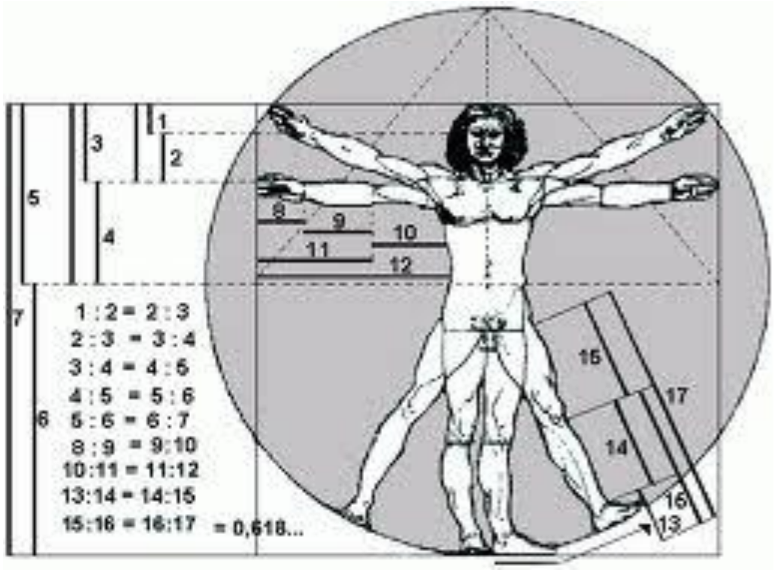


(Fonte: https://meliesart.wordpress.com/2017/04/16/sequencia-de-fibonacci-perfeicao-divina/)

1.8.6 Corpo Humano

Para Leonardo da Vinci, o corpo humano para possuir beleza e harmonia deve-se respeitar simetrias e proporção, que foram representadas, com maestria, em sua obra o Homem Vitruviano. Nesta obra, dividindo-se a distância dos pés até o umbigo pela distância do umbigo até o topo da cabeça, obtém-se aproximadamente 0,618, que é o inverso do número de ouro, além de outras proporções do corpo que resultam no mesmo valor (LEOPOLDINO apud VEIGA, 2006).

Figura 11: Homem Vitruviano



(Fonte: http://artenarede.com.br/blog/index.php/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-a-matematica-da-beleza/)

2 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Podemos observar que a ideia de sequências ou sucessão é um dos conceitos que estão mais presentes no cotidiano das pessoas e isso acontece porque temos a necessidade de buscar regularidades diante de elementos de um mesmo conjunto.

Existem diversas circunstâncias em nosso cotidiano com as quais nos deparamos com a ideia de sequência, podemos citar, por exemplo:

- A sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, março, ...)
- A sequência dos dias da semana (segunda, terça, quarta, ...)
- A sequência dos anos bissextos, a partir de 1992 (1992, 1996, 2000, 2004, ...)
- A sequência dos números naturais (1, 2, 3, 4, 5, ...)
- A sequência dos alunos presentes na lista de chamada de uma classe (1- Alex Santos Vieira, 2- Amadeu Costa, 3- Bruna Alves Moreira, ..., 30- Valquíria Lima Borges)

Podemos observar que cada elemento dos conjuntos citados podem ser associado a um único elemento dos conjuntos dos números naturais (1, 2, 3, 4, 5, ...), como por exemplo $(\underbrace{janeiro}_{1^{\underline{o}}\,mês}, \underbrace{fevereiro}_{2^{\underline{o}}\,mês}, \underbrace{março}_{3^{\underline{o}}\,mês}, \ldots)$, quando isso acontece estamos estabelecendo uma sequência, um padrão. Diante disso podemos definir sequência, de maneira informal, como sendo todo conjunto ou grupo os quais estão dispostos em certa ordem, porém, para o estudo da matemática, as sequências que nos interessam são as chamadas sequências numéricas.

Segundo Ávila (1999, p.16):

Definição: "Uma sequência numérica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ é uma função f, definida no conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos: $f: n \mapsto f(n) = a_n$. O número n que aí aparece é chamado o $índice$ e a_n o $n - ésimo$ elemento da sequência, ou $termo\ geral$".

Exemplo: A sequência dos números pares positivos, representado por $a_n = 2n$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$

2.1 Classificação das Sequências Numéricas

As sequências numéricas podem ser classificadas em relação à quantidade de termos e através da função que a define.

2.1.1 Quantidade de termos:

- Sequências finitas: possuem um número limitado de termos e podem ser representadas como $(a_1, a_2, a_3, \dots , a_n)$.
- Sequências infinitas: possuem um número ilimitado de termos e podem ser representadas como $(a_1, a_2, a_3, \dots , a_n, \dots)$.

2.1.2 Função que a define:

- Sequências lineares: quando a função que define a sequência é uma função linear.
- Sequências não lineares: quando a função que define a sequência é uma função não linear.

Quando as sequências numéricas lineares são expressas por uma função do primeiro grau, a qual define seus termos através de um ou mais termos anteriores, estaremos estudando as recorrências lineares.

2.2 Lei de formação de uma sequência numérica

Definição: "Lei de formação de uma sequência é um conjunto de informações capazes de determinar os termos de uma sequência e a ordem em que se apresentam" (PAIVA, 1995, p.4).

Nem sempre uma sequência numérica pode ser definida por uma lei de formação, porém nos casos em que tal regra possa ser estabelecida, ela poderá ser apresentada em função de sua posição (fórmula fechada) ou recursivamente (formula de recorrência).

2.2.1 Lei de formação que expressa cada termo em função de sua posição

"Uma sequência fica determinada se cada termo a_n for expresso em função de sua posição n" (PAIVA, 1995, p.4). Esse tipo de lei de formação é expressa através de uma fórmula fechada.

Exemplo: Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à lei de formação $a_n = n^2 + 1,\, n \in \{1, 2, 3, 4\}$

Solução:

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2$$
$$a_2 = 2^2 + 1 = 5$$
$$a_3 = 3^2 + 1 = 10$$
$$a_4 = 4^2 + 1 = 17$$
$$\therefore f = (2, 5, 10, 17)$$

2.2.2 Lei de formação por recorrência

"Uma sequência fica determinada se conhecemos um de seus termos e uma sentença que expresse cada termo em função de seu antecessor (ou sucessor). O conjunto de informações que determina a sequência dessa maneira é denominado lei de formação por recorrência" (PAIVA, 1995, p.4), ou seja, é uma regra que permite calcular um termo qualquer de uma sequência em função de seu antecessor ou sucessor imediato e dizemos que essa lei de formação está na forma recursiva.

Exemplo: Determine o quinto termo da sequência definida por $a_{n+1} = (a_n)^2 + 1, a_1 = 0$

Solução:

$$para\, n = 1 \Rightarrow\ a_2 = (a_1)^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$$
$$para\, n = 2 \Rightarrow a_3 = (a_2)^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$
$$para\, n = 3 \Rightarrow\ a_4 = (a_3)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$para\ n = 4 \Rightarrow a_5 = (a_4)^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$
$$\therefore a_5 = 26$$

Uma recorrência, por si só, não define a sequência, é preciso conhecer o(s) primeiro(s) termo(s) para que a sequência fique plenamente estabelecida. É o que podemos observar na recorrência $x_{n+1} = x_n + 2$, que é satisfeita por todas as progressões aritméticas de razão 2.

2.3 Recorrências Lineares

Dizemos que uma recorrência é linear quando a função que relaciona os termos da sequência for do primeiro grau. Existem recorrências lineares de ordem qualquer, porém iremos tratar basicamente das recorrências lineares de primeira e segunda ordem.

2.3.1 Recorrência Linear de Primeira Ordem

Definição: Uma recorrência é dita linear quando a função que relaciona os termos da sequência for do primeiro grau e é chamada de primeira ordem quando cada termo depender exclusivamente do termo anterior.

São exemplos de recorrências lineares: $a_{n+1} = 5a_n + n^2\ \ e\ \ a_{n+1} = 2n.a_n$

São exemplos de recorrências não lineares: $a_{n+1} = 3a_n^2\ \ e\ \ a_{n+1} = a_n^2 + 1$

As recorrências $a_{n+1} = 2n.a_n$ e $a_{n+1} = 3a_n^2$ são ditas *homogêneas* por não possuírem termos independentes de a_n, diferentemente das outras duas citadas no exemplo anterior que são chamadas *não homogêneas*, obviamente por possuírem termos independentes de a_n.

Ao se resolver uma recorrência o objetivo é encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, encontrar uma expressão que permita calcular a_n em função apenas de *n*. Conforme os exemplos a seguir, veremos que não existe grandes dificuldades em se resolver uma recorrência linear de primeira ordem.

Exemplo: Resolver a recorrência $a_{n+1} = a_n + 6,\ a_1 = 4$

Solução

$$a_1 = 4$$
$$a_2 = a_1 + 6$$
$$a_3 = a_2 + 6$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = a_{n-1} + 6$$

Somando temos:

$$a_n = 4 + \underbrace{6 + 6 + \cdots + 6}_{(n-1)vezes}$$

$$\therefore a_n = 4 + 6(n-1)$$

Exemplo: Resolva a recorrência $a_{n+1} = 3a_n,\ a_1 = 2$

Solução

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3a_1$$
$$a_3 = 3a_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = 3a_{n-1}$$

Multiplicando temos:

$$a_n = 2.\underbrace{3.3.3.3.3.\dots.3}_{(n-1)vezes}$$

$$a_n = 2.3^{n-1}$$

Exemplo: Resolva a recorrência $a_{n+1} = a_n + 5^n, a_1 = 1$

Solução

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 5^1$$

$$a_3 = a_2 + 5^2$$

$$a_4 = a_3 + 5^3$$

....

$$a_n = a_{n-1} + 5^{n-1}$$

Somando temos:

$$a_n = 1 + 5^1 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1}$$

$$a_n = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1}$$

Utilizando a fórmula da soma da PG temos:

$$a_n = \frac{5^n - 1}{5 - 1}$$

$$a_n = \frac{5^n - 1}{4}$$

Exemplo: Resolva a recorrência $a_{n+1} = a_n + 2n, a_1 = 0$

Solução

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2.2$$

$$a_4 = a_3 + 2.3$$

....

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

Somando temos:

$$a_n = 2.0 + 2.1 + 2.2 + 2.3 + \cdots + 2(n-1)$$

$$a_n = 2(0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)$$

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PA temos:

$$a_n = 2\left(\frac{0 + n - 1}{2}\right)n$$

$$a_n = n(n - 1)$$

2.3.2 Recorrência Linear de Segunda Ordem

Definição: Uma recorrência linear de segunda ordem é uma recorrência em que a função que relaciona os termos é do primeiro grau e cada termo da sequência é obtido a partir de outros dois termos anteriores.

Mais geralmente, uma recorrência linear de segunda ordem é uma recorrência do tipo:

$$a_n = g(n)a_{n-1} + h(n)a_{n-2} + f(n),$$

onde *h(n)* é uma função não nula, caso contrário seria uma recorrência linear de primeira ordem.

Além disso, as recorrências lineares de segunda ordem são *homogêneas* se $f(n) = 0$. Se $f(n) \neq 0$ essas recorrências são ditas não homogêneas.

A seguir será tratado sobre as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes. Essas recorrências são da forma:

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, com\ q \neq 0$$

Esse tipo de recorrência é associado a uma equação do segundo grau, que é denominada equação característica:

$$x^2 + px + q = 0, com\ q \neq 0$$

Teorema: Se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$, então $a_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Prova

Seja a recorrência

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

Substituindo $a_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n$ na recorrência, temos:

$$C_1x_1^{n+2} + C_2x_2^{n+2} + p(C_1x_1^{n+1} + C_2x_2^{n+1}) + q(C_1x_1^n + C_2x_2^n) = 0$$

$$C_1x_1^nx_1^2 + C_2x_2^nx_2^2 + p(C_1x_1^nx_1^1 + C_2x_2^nx_2^1) + q(C_1x_1^n + C_2x_2^n) = 0$$

$$C_1x_1^nx_1^2 + C_2x_2^nx_2^2 + pC_1x_1^nx_1^1 + pC_2x_2^nx_2^1 + qC_1x_1^n + qC_2x_2^n = 0$$

$$C_1x_1^n(x_1^2 + px_1 + q) + C_2x_2^n(x_2^2 + px_2 + q) = 0$$

Como $x^2 + px + q = 0$, temos

$$C_1x_1^n0 + C_2x_2^n0 = 0$$

Portanto a_n é solução

■

Exemplo: Resolva a recorrência $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

A equação característica da recorrência é: $x^2 + 5x + 6 = 0$ e possui raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = -3$.

Como a equação característica possui raízes diferentes, de acordo com o teorema a solução para essa recorrência é da forma $a_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n$. Substituindo as raízes temos que todas as sequências da forma $a_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$ são soluções da recorrência.

Teorema: Se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são iguais, $x_1 = x_2 = x$, então, $a_n = C_1 x_1^n + C_2 n x_2^n$ é uma solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Prova

Temos que a soma das raízes é dada por:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p}{1}$$

Como $x_1 = x_2 = x$ temos que

$$x + x = -p \Rightarrow x = -\frac{p}{2}$$

Seja a recorrência

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

Substituindo $a_n = C_1 x^n + C_2 n x^n$ na recorrência, temos:

$$C_1 x^{n+2} + C_2(n+2)x^{n+2} + p(C_1 x^{n+1} + C_2(n+1)x^{n+1}) + q(C_1 x^n + C_2 n x^n) = 0$$

$$C_1 x^n x^2 + C_2(n+2)x^n x^2 + p(C_1 x^n x + C_2(n+1)x^n x) + q(C_1 x^n + C_2 n x^n) = 0$$

$$C_1 x^n x^2 + C_2 n x^n x^2 + C_2 2x^n x^2 + p(C_1 x^n x + C_2 n x^n x + C_2 x^n x) + q(C_1 x^n + C_2 n x^n) = 0$$

$$C_1 x^n x^2 + C_2 n x^n x^2 + C_2 2 x^n x^2 + pC_1 x^n x + pC_2 n x^n x + pC_2 x^n x + qC_1 x^n + qC_2 n x^n = 0$$

$$C_1 x^n (x^2 + px + q) + C_2 n x^n (x^2 + px + q) + C_2 x^n x(2x + p) = 0$$

Como $x^2 + px + q = 0$, e $2x + p = 0$ temos

$$C_1 x^n 0 + C_2 n x^n 0 + C_2 x^n x 0 = 0$$

Portanto a_n é solução

■

Exemplo: Resolva a recorrência $a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0$.

A equação característica da recorrência é: $x^2 + 6x + 9 = 0$ e possui raízes $x_1 = -3$ e $x_2 = -3$.
Como a equação característica possui raízes iguais, de acordo com o teorema a solução para essa recorrência é da forma $a_n = C_1 x_1^n + C_2 n x_2^n$.
Substituindo as raízes temos que todas as sequências da forma $a_n = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n$ são soluções da recorrência.

2.4 Progressão Aritmética

As Progressões Aritméticas (PA) são bastante comuns no cotidiano das pessoas e sempre aparecem em situações onde existem grandezas que sofrem variações iguais em intervalo de tempos iguais.

É importante observar que qualquer progressão aritmética (x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida pela recorrência $x_{n+1} = x_n + r$ $(n \geq 1)$, com $x_1 = a$.

Segundo Lopes (1998, p.1)

Definição: "Progressão Aritmética – PA – é uma sequência de $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de números $\{a_i\}$, denominada termos, na qual a diferença entre cada termo a_i e o seu antecedente a_{i-1} é um valor constante chamado razão". Assim,

$$a_i - a_{i-1} = r \qquad \forall i > 1$$

2.4.1 Classificação das Progressões Aritméticas

As progressões aritméticas podem ser classificadas quanto ao número de termos e quanto à razão.

2.4.1.1 Quanto ao número de termos

a) Finitas: possuem um número finito de termos
b) Infinitas: possuem um número infinito de termos

2.4.1.2 Quanto à razão

a) Crescente: $r > 0$
b) Constante ou estacionária: $r = 0$
c) Decrescente: $r < 0$

2.4.2 Fórmula do Termo Geral de uma PA

A fórmula para calcular o termo geral de uma progressão aritmética é dada por

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \forall n \geq 1$$

Prova

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma progressão aritmética de razão r. Aplicando a definição temos que:

$$a_2 - a_1 = r$$
$$a_3 - a_2 = r$$
$$a_4 - a_3 = r$$
....
$$a_n - a_{n-1} = r$$

Somando todos os membros dessas $n-1$ igualdades temos que:

$$a_n - a_1 = (n-1)r$$
$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)r \quad \forall n \geq 1$$

Exemplo: O cometa de mais longo período que se conhece é o Herschel-Rigollet. Seu período é 156 anos. Esse cometa passou pelo periélio em agosto de 1939. Qual será o primeiro ano, após o ano 4000, em que o cometa Herschel-Rigollet passará novamente por aquele ponto?

De acordo com o problema temos que: $r = 156$ e $a_1 = 1939$. Aplicando a fórmula do termo geral de uma P.A. temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_n = 1939 + (n-1)165$$
$$a_n = 156n + 1786$$

Temos que $a_n > 4000$, pois será o primeiro ano após o ano 4000, então:

$$156n + 1786 > 4000$$
$$156n > 2214$$
$$n > 14{,}19$$

Como $n > 14{,}19$ então o cometa passará pelo periélio em seu 15º ciclo, então iremos calcular o a_{15}.

$$a_{15} = 1939 + (15-1)156$$
$$a_{15} = 4123$$

2.4.3 Soma dos *n* Termos de uma PA

A soma S_n dos n termos dessa progressão aritmética finita é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Prova:

Seja PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ e S_n a soma de seus termos. Podemos escrever essa soma da seguinte maneira:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad (1)$$

Ou ainda,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \qquad (2)$$

Somando (1) e (2) temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Ao se passar de um parêntese para outro podemos observar que a soma não se altera, ou seja, todos os membros são iguais a $(a_1 + a_n)$, então:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n\ vezes}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exemplo: Sendo S_n a soma dos *n* primeiros termos da PA (4, 7, 10, 13, ...). Determine o menor valor de *n* tal que $S_n > 40n$.

$$\frac{(a_1 + a_n)n}{2} > 40n$$

$$\frac{(4 + a_n)}{2} > 40$$

$$a_n > 76$$

$$a_1 + (n-1)r > 76$$

$$4 + (n-1)3 > 76$$

$$n > 25$$

$$\therefore n = 26$$

Exemplo: Determine *n* de modo que: $\sum_{j=1}^{n}(2j+3) = 1085$

$$\sum_{j=1}^{n}(2j+3) = (2.1+3) + (2.2+3) + \cdots + (2.n+3)$$

$$5 + 7 + 9 + \cdots + (2n+3) = 1085$$

$$\frac{(5+2n+3)n}{2} = 1085$$

$$n^2 + 4n - 1085 = 0$$

$$n = 31 \quad ou \quad n = -35$$

Desconsiderando $n = -35$, temos que $n = 31$

2.5 Progressão Geométrica

As progressões geométricas são umas das sequências que mais possuem aplicações no dia a dia, aparecendo em vários contextos como no cálculo de juros compostos, na modelagem de crescimento de uma população a uma taxa anual fixa, além de diversas outras situações.

É importante observar que qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a pode ser definida recorrentemente por $x_{n+1} = q.x_n$ $(n \geq 1)$, com $x_1 = a$.

Conforme Lopes (1998, p.21)

Definição: "Progressão Geométrica – PG – é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de números $\{a_i\}$, diferentes de zero e denominados termos, na qual o quociente entre cada termo a_i e o seu antecedente a_{i-1} é um valor constante chamado razão". Assim,

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = q \quad \forall i > 1,$$

Onde q é a razão da PG.

2.5.1 Classificação das Progressões Geométricas

As progressões geométricas se classificam em crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula.

a) Crescente: uma PG a_n, de razão *q,* é crescente quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
b) Decrescente: uma PG a_n, de razão *q,* é decrescente quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.
c) Constante: Uma PG é constante se, e somente se, sua razão é igual a 1 ou se todos os seus termos forem nulos.
d) Oscilante: uma PG a_n, de razão *q,* é oscilante se, e somente se, $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

2.5.2 Fórmula do Termo Geral de uma PG

A fórmula para o cálculo do termo geral de uma PG é dada por

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Prova

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ uma progressão geométrica de razão *q*. Aplicando a definição temos que:

$$a_2 = a_1 . q^1$$
$$a_3 = a_2 . q = a_1 . q . q = a_1 . q^2$$
$$a_4 = a_3 . q = a_1 . q^2 . q = a_1 . q^3$$

Daí concluímos que

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Exemplo: Determine o 14º termo da PG $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de razão $q = 3$, sabendo que $a_9 = 2$

$$a_{14} = a_{9}.q^5$$
$$a_{14} = 2.3^5$$
$$a_{14} = 2.243$$
$$a_{14} = 486$$

2.5.3 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Limitada

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é dada por:

$$S_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Prova:

Seja S_n a soma dos termos de uma PG (a_n), então,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad (1)$$

Multiplicando por *q*, temos

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} \qquad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), temos

$$qS_n - S_n = a_{n+1} - a_1$$

$$S_n(q-1) = a_1.q^n - a_1$$

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$

$$S_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Exemplo: Para que valor de $n, n \in \mathbb{N}^*$, Tem-se que $\sum_{j=1}^{n} 2^j = 4094$?

Solução:

$$4094 = 2\frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$2047 = 2^n - 1$$

$$2^n = 2048$$

$$2^n = 2^{11}$$

$$n = 11$$

2.5.4 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Infinita

Seja a PG infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão $q \neq 0$, para determinar a soma S dos seus infinitos termos, temos:

a) Se $|q| > 1$, ou seja, $q > 1$ ou $q < -1$, então $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, o que significa que é impossível determinar um valor finito para S.

b) Se $|q| < 1$, ou seja, $-1 < q < 1$, então S converge para um valor finito e podemos demonstrar a fórmula através do cálculo do limite de S_n.

Temos que "a soma $S_n = a_1.\frac{q^n-1}{q-1}$ dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q, tal que $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$, tem para o limite o número $S = \frac{a_1}{1-q}$ quando n tende para infinito (LOPES, 1998, p.29)."

Prova:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1.\frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo: escreva o número racional 3,287878787... em forma de fração.

Seja $x = 3{,}2878787 \ldots = 3{,}2 + \underbrace{0{,}087 + 0{,}00087 + 0{,}0000087 + \cdots}_{S}$

Onde S é o limite da soma $87.10^{-3} + 87.10^{-5} + 87.10^{-7} + \cdots$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{87.10^{-3}}{1-10^{-2}} = \frac{87}{990}$$

$$x = 3{,}2 + S = 3{,}2 + \frac{87}{990} = \frac{3255}{990}$$

2.6 PAs de Segunda Ordem

Definição: "PA de segunda ordem ou PA de ordem 2 é uma sequência de números tais que, após uma operação de diferença entre termos consecutivos da sequência, obtemos uma PA de 1ª ordem (LOPES, 1998, p.7)" não estacionária.

Para se construir uma PA de ordem 2 $(a_n)\, n \geq 1$, podemos começar com uma PA de primeira ordem não estacionária, por exemplo:

$$(5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots)$$

Após, precisamos estabelecer o primeiro termo da PA de segunda ordem, podemos dizer que $a_1 = 3$, a partir daí calcularemos os demais termos utilizando a definição:

$a_2 - a_1 = 5 \Rightarrow a_2 = 8$

$a_3 - a_2 = 8 \Rightarrow a_3 = 16$

$a_4 - a_3 = 16 \Rightarrow a_4 = 27$

...

Assim, obtemos a PA de segunda ordem

$$(3, 8, 16, 27, 41, \ldots)$$

Podemos observar que uma PA de segunda ordem só fica totalmente determinada se conhecermos seus três primeiros termos, pois só assim é que conhecem os dois primeiros termos da PA de primeira ordem não estacionária.

2.6.1 Termo Geral de uma PA de 2ª Ordem

Dada uma PA de segunda ordem $(a_k)\ k \geq 1$, temos que:

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1)(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$$

onde $r = a_3 - 2a_2 + a_1$ é a razão da PA não constante formada pelas diferenças entre os termos consecutivos da sequência $(a_k)\ k \geq 1$

Prova: Seja $(b_k)k \geq 1$ uma PA de razão *r* de modo que $b_k = a_{k+1} - a_k$, para todo $k \geq 1$, então temos que:

$$a_2 - a_1 = b_1$$
$$a_3 - a_2 = b_2$$
$$a_4 - a_3 = b_3$$
$$\dots$$
$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$

Somando os membros das igualdades temos:

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1}$$

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PA no segundo membro da igualdade, temos:

$$a_n - a_1 = \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2} \qquad (1)$$

Utilizando a fórmula do termo geral de uma PA que:

$$b_{n-1} = b_1 + (n - 1 - 1)r = b_1 + (n - 2)r \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) temos:

$$a_n - a_1 = \frac{(b_1 + b_1 + (n-2)r)(n-1)}{2}$$

$$a_n - a_1 = \frac{2b_1(n-1) + (n-1)(n-2)r}{2}$$

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$$

Como $b_1 = a_2 - a_1$, temos que:

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1)(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$$

■

Demonstraremos agora a fórmula da razão, então temos que:

$$r = b_2 - b_1$$

$$r = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1)$$

$$r = a_3 - a_2 - a_2 + a_1$$

$$r = a_3 - 2a_2 + a_1$$

Exemplo: A sequência $a_n = (1, 3, 7, 13, 21, \ldots)$ é uma PA de 2ª ordem. Sendo assim calcule o valor de a_{20}.

$$r = a_3 - 2a_2 + a_1 = 7 - 2.3 + 1 = 2$$

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1)(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}$$

$$a_{20} = 1 + (3-1)(20-1) + \frac{(20-1)(20-2)2}{2}$$

$$a_{20} = 381$$

Exemplo: Considere a sequência $(a_n), n \geq 1$ definida como indicado abaixo:

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 + 3$

$a_3 = 4 + 5 + 6$

$a_4 = 7 + 8 + 9 + 10$

...

a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e qual é o maior desses inteiros?

O primeiro inteiro da soma que define um termo a_n é igual à quantidade de inteiros utilizados na formação dos termos anteriores, somado a uma unidade, então:

$$Primeiro\ inteiro = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + 1$$

Aplicando a formula da soma dos termos de uma PA temos:

$$Primeiro\ inteiro = \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} + 1$$

$$Primeiro\ inteiro = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

Podemos observar que cada termo a_n possui n parcelas com diferença de uma unidade entre elas, então o último inteiro é dado pelo primeiro inteiro somado a $n - 1$ parcelas, então temos:

$$Último\ inteiro = \frac{n^2 - n + 2}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - n + 2 + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Portanto, para $n = 10$ temos que:

$$Primeiro\ inteiro = \frac{n^2 - n + 2}{2} = \frac{10^2 - 10 + 2}{2} = 46$$

$$Último\ inteiro = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{10^2 + 10}{2} = 55$$

b) Calcule a_{10}.

Podemos observar que a_{10} é formado pela seguinte soma: $(46+47+\cdots+55)$, que é a soma de uma PA de razão 1, então:

$$a_{10}=\frac{(46+55)10}{2}=505$$

c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Podemos observar que a_n é formado pela soma de n inteiros consecutivos começando em $\frac{n^2-n+2}{2}$ e terminando em $\frac{n^2+n}{2}$, aplicando a fórmula da soma dos termos de uma PA, temos:

$$s_n=\frac{\left(\frac{n^2-n+2}{2}+\frac{n^2+n}{2}\right)n}{2}$$

$$s_n=\frac{\left(\frac{2n^2+2}{2}\right)n}{2}$$

$$S_n=\frac{n^3+n}{2}$$

2.7 Progressões Harmônicas

Definição: “Progressão harmônica – PH – é uma sequência $(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)$ de números (a_i), diferentes de zero e denominada termos, tais que seus inversos formam uma progressão aritmética” (LOPES, 1998, p. 18). Portanto,

$(a_1,a_{2,}\dots,a_i,\dots,a_n)$ é uma PH $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_i},\dots,\frac{1}{a_n}\right)$ é PA.

Podemos observar que o estudo da progressão harmônica – PH – é um desdobramento do estudo das progressões aritméticas – PA.

Exemplos:

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ é PH pois $(2, 4, 6, \dots, n)$ é PA;
b) $\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ é PH pois $(3, 0, -3, -6)$ é PA;
c) $(5, 5, 5, 5, \dots)$ é PH pois $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ é PA;

2.7.1 Classificação das progressões harmônicas

As progressões harmônicas podem ser classificadas quanto ao números de termos que possuem.

2.7.1.1 Quanto ao número de termos

a) Finitas: possuem um número finito de termos

Exemplo: $\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$

b) Infinitas: possuem um número infinito de termos

Exemplo: $(5, 5, 5, 5, \dots)$

2.7.2 Fórmula do Termo Geral de uma PH

Se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma progressão harmônica, então o termo geral (a_n) da PH é dado:

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}$$

Demonstração:

Se a_n é o termo geral de uma PH, então $b_n = \frac{1}{a_n}$ é o termo geral de uma PA de razão *r.*

Temos que: $r = b_2 - b_1 = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$, então o termo geral da PA é dado por:

$$b_n = b_1 + (n-1)r$$

$$b_n = b_1 + (n-1)\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}\right)$$

$$b_n = \frac{a_1 a_2 b_1 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

Como $b_1 = \frac{1}{a_1}$, temos que

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \frac{1}{a_1} + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

$$b_n = \frac{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

Como $b_n = \frac{1}{a_n}$, temos que

$$\frac{1}{a_n} = \frac{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

$$\therefore a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}$$

■

Exemplo: Calcule o quinto termo da PH $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right)$

Solução

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}$$

$$a_5 = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{7} + (5-1)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{7} + 4.\frac{4}{21}} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{7} + \frac{16}{21}} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{19}{21}}$$

$$\therefore a_5 = \frac{1}{19}$$

Outra solução

Podemos observar, os denominadores desta PH formam uma PA (b_n) de razão 4, então basta calcular o quinto termo da PA $(3, 7, 11, \ldots)$, formada pelos denominadores da PH e como sabemos que o numerador será sempre 1, teremos o quinto termo da PH.

$$b_n = b_1 + (n-1)r$$

Temos que $r = b_2 - b_1 = 7 - 3 = 4$, então

$$b_5 = 3 + (5-1)4 = 3 + 16 = 19$$

Como $a_5 = \frac{1}{b_5}$, então

$$a_5 = \frac{1}{19}$$

2.8 Sequência Fibonacci

De acordo com Boyer (1974), Leonardo de Pisa ou Fibonacci, como é mais conhecido, propõe no livro Liber Abaci um dos problemas mais interessantes e inspiradores de futuros matemáticos, relativo à reprodução de coelhos, que deu origem a uma das mais famosas sequências numéricas, a sequência Fibonacci. Segue abaixo o problema:

*"Quantos pares de coelhos são produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?" (*BOYER, 1974, p. 186)

De acordo com as circunstâncias expostas no problema, vejamos o processo de reprodução dos coelhos mês a mês.

- No primeiro mês o casal é filhote, portanto temos um casal de coelhos.
- No segundo mês temos o mesmo casal de coelhos, porém já adulto e fértil.
- No terceiro mês temos dois casais de coelhos: o casal do mês anterior e mais um gerado por ele.
- No quarto mês temos três casais de coelhos: o casal do primeiro mês, mais o casal do mês anterior, estando adulto e fértil e mais um casal de filhotes do casal do primeiro mês.
- No quinto mês temos cinco casais de coelhos: dois casais adultos com seus respectivos casais de filhotes mais o casal nascido no mês anterior que já se encontra adulto e fértil.
- No sexto mês tem-se oito casais de coelhos, sendo 5 adultos e três filhotes.
- No sétimo mês tem-se treze casais de coelhos, sendo 8 adultos e cinco filhotes.
- ...

A tabela a seguir resume o processo descrito anteriormente:

Tabela 1: Crescimento dos casais de coelhos

Mês	Casais Adultos	Casais Filhotes	Total de Casais
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
...	...	...	...

(Fonte: Elaborada pelo autor)

Nota-se que a quantidade de casais de um determinado mês, a partir do terceiro, é igual à soma da quantidade de casais dos dois meses anterior a ele, assim obtemos a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ em que cada termo representa a quantidade de casais de coelhos e sua posição representa o mês, dando origem a sequência Fibonacci.

Segundo Leopoldino (apud ZAHN, 2011, p.6)

Definição: “Denomina-se Sequência Fibonacci a sequência definida por:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$$

onde os termos presentes na sequência denominam-se números de Fibonacci”.

A sequência Fibonacci é defina por uma fórmula recursiva em que F_n é um termo da sequência, denominada número Fibonacci, e n é sua posição.
Ainda, de acordo com Leopoldino (apud ZAHN, 2011, p.6)

Definição: “Chama-se sequência Fibonacci a sequência definida recursivamente por:

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n"$$

Resolvendo essa recorrência temos:
A equação característica da recorrência é $x^2 = x + 1$ e possui raízes

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Como as raízes são diferentes, de acordo com o teorema a solução a recorrência é da forma $a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n$.

Substituindo as raízes na recorrência temos:

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para determinar C_1 e C_2 temos que $F_0 = F_1 = 1$

$$F_0 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2$$

$$F_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \qquad e \qquad C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

Logo

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

3 PROBLEMAS INTERESSANTES SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Esta seção é dedicada à seleção e resolução de problemas sobre sequências numéricas, que podem ser explorados na sala de aula como forma de motivar os alunos.

Tomando o *site* da OBMEP como fonte principal para a escolha dos problemas que são, em sua essência, de sequências numéricas, porém possuem problemas que possibilitam ao aluno recordar conceitos matemáticos como área, perímetro, equações do primeiro e segundo graus, inequações, porcentagem, razão e proporção e também conteúdos de outras disciplinas como a química e biologia, oferecendo ao professor a oportunidade trabalhar a interdisplinaridade e assim “utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista. (BRASIL, 2000, P.21)”

Além disso, os problemas possibilitam ao aluno atingir uma das expectativas de aprendizado presente no currículo referência da rede estadual de ensino de Goiás, que é “utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas significativos (GOIÁS, 2012, P.160)”, trabalhando diversas situações cotidianas, fazendo com que o aluno perceba a importância deste conteúdo.

Problema 1. Na situação apresentada nos quadrinhos a seguir, as distâncias, em quilômetros, dAB, dBC e dCD formam, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética.

(Fonte: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/whgn3zx1y2o4k.pdf)

Qual o valor do décimo terceiro termo dessa progressão?

Uma Solução

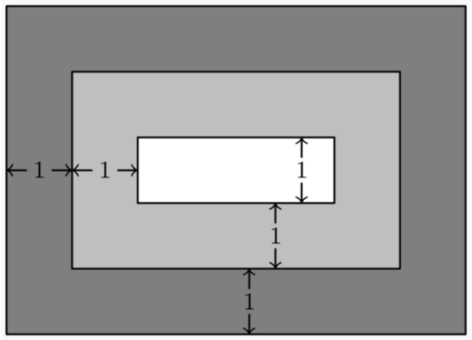
De acordo com os dados do problema presentes nos quadrinhos e chamando $d_{CD} = x$, temos que $d_{BC} = x + 10$ e $d_{AB} = x + 10 + 10 = x + 20$.
Como a distância de *A* até *D* é 390, temos:

$$d_{AB} + d_{BC} + d_{CD} = 390$$
$$x + 20 + x + 10 + x = 390$$
$$x = 120$$

Então temos que os três primeiros termos da sequência são: $(140, 130, 120, \dots)$ e sua razão é $r = a_2 - a_1 = 130 - 120 = -10$.
Calculando o 13º termos desta sequência, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 140 + (13-1)10 = 20$$

Problema 2. Um tapete foi confeccionado de acordo com a figura a seguir. As três áreas de cores diferentes estão em P.A..O retângulo interno tem 1 metro de largura e cada uma das duas regiões sombreadas tem 1 metro de largura em todos os quatro lados. Qual é o comprimento em metros do retângulo interior?



Uma Solução

Chamaremos o comprimento do retângulo interno de x e sua área de A_1, a do retângulo do meio de A_2 e a do retângulo maior de A_3, então temos que:

$A_1 = 1.x = x$

$A_2 = 3(x + 2) - x = 2x + 6$

$A_3 = 5(x + 4) - (2x + 6) - x = 2x + 14$

Como as áreas estão em PA e utilizando o conceito de razão, temos:

$A_2 - A_1 = A_3 - A_2$

$2x + 6 - x = 2x + 14 - (2x + 6)$

$x = 2m$

Problema 3. Qual deve ser o número mínimo de termos consecutivos que devemos somar, a partir do primeiro, da sequência (-133,-126,-119,-112, . . .) para que a soma seja positiva?

Uma solução

Como a sequência é uma P.A., temos que a razão é $r = a_2 - a_1 = -126 + 133 = 7$

O termo geral da sequência é $a_n = a_1 + (n - 1)r = -133 + (n - 1)7 = 7n - 140$

Como a soma dos termos deve ser positiva, então $S_n > 0$, assim:

$$\frac{(a_1 + a_n)n}{2} > 0$$

$$\frac{(-133+7n-140)n}{2} > 0$$

$$7n^2 - 273n > 0$$

$$n > 39$$

Então o número mínimo de termos para que a soma da sequência seja positiva é 40 termos.

Problema 4. Uma progressão aritmética de três termos tem $a_1 = 9$. Se adicionarmos 2 ao segundo termo e 20 ao terceiro termo, o trio resultante formará uma progressão geométrica.
Qual o menor valor possível para o terceiro termo da P.G. resultante?

Uma Solução

Temos que a PA é dada por $(9, 9+r, 9+2r)$, em que *r* é a razão.
Ao acrescentarmos 2 ao segundo termo e 20 ao terceiro termo, resultaria a seguinte PG $(9, 11+r, 29+2r)$.
Numa PG, temos que $a_2^2 = a_1.a_3$, então:

$$(11+r)^2 = 9.(29+2r)$$

$$r^2 + 22r + 121 = 261 + 18r$$

$$r^2 + 4r - 140 = 0$$

$$r_1 = 10 \text{ e } r_2 = -14$$

Nesse caso, o menor valor é -14 e o terceiro termo da PG resultante fica $29 + 2r = 29 + 2.(-14) = 1$

Problema 5. A meia vida de um elemento radioativo é o intervalo de tempo em que a massa de uma amostra deste elemento se reduz à metade. O Cobalto-60, usado na medicina como fonte de radiação, tem meia vida de 5 anos. Qual a porcentagem de sua atividade original que permanecerá no fim de 25 anos?

Uma solução

Como o Cobalto-60 tem meia vida de 5 anos, então em 25 anos ele vai ter 5 decaimentos. Podemos observar que estamos diante de uma PG de razão $\frac{1}{2}$, então:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

$$a_5 = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125 = 3{,}125\%$$

Problema 6. Determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias se reproduzem por divisão celular. Cada célula simplesmente se divide em duas em intervalos regulares de tempo. Considere inicialmente uma população de 1024 bactérias e suponha que esta população se duplique a cada 20 minutos. Após 3 horas, qual a potência de dois que representará a população de bactérias?

Uma solução

Podemos observar que 3 horas equivale a 9 intervalos de 20 minutos e, conforme o enunciado, se a população de bactérias duplica então estamos diante de uma PG de razão 2, então temos que:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

$$a_9 = 1024 . 2^{9-1}$$

$$a_9 = 2^{10} . 2^8 = 2^{18}$$

Portanto a potência de dois que representará a população de bactérias é 18.

Problema 7. Certo método de observação da troca de potássio no fluxo sanguíneo utiliza o isótopo do potássio K^{32} como marcador. Sabe-se que esse isótopo perde 5,4% de sua intensidade radioativa a cada hora. Se a intensidade radioativa desse isótopo no início da observação é igual a I_0, ao final de 10 horas será igual a I_0 multiplicado por *F*. Qual o valor de *F*?

Uma solução

Se o isótopo do potássio K^{32} perde 5,4% de sua intensidade radioativa, então ele permanecerá com 94,6% desta intensidade e $94{,}6\% = 0{,}946$.
A sequência formada pela intensidade radioativa a cada hora será uma PG de razão 0,946, então temos:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$
$$a_{11} = I_0 . 0{,}946^{11-1}$$
$$a_{11} = I_0 . 0{,}946^{10}$$

Portanto $F = 0{,}946^{10}$.

Exercício 8. Considere o padrão de construção representado pelos desenhos a seguir.

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, qual a área restante na etapa 5?

Uma solução

Considerando *A* a sequência de áreas, temos que $A_1 = 1, A_2 = \frac{5}{9}, A_3 = \frac{25}{81}$.
Podemos observar que a sequência formada pelas áreas é uma PG de razão $\frac{5}{9}$, então, utilizando $A_n = a_1 . q^{n-1}$, temos que:

$$A_5 = 1.\left(\frac{5}{9}\right)^{5-1} = \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{625}{6561}$$

Problema 9. Para fazer a aposta mínima na mega-sena uma pessoa deve escolher 6 números diferentes em um cartão de apostas que contém os números de 1 a 60. Uma pessoa escolheu os números de sua aposta, formando uma progressão geométrica de razão inteira. Classifique cada proposição abaixo como (V) verdadeira ou (F) falsa.

(V) Essa pessoa apostou no número 1.

(F) A razão da PG é maior do que 3.

(V) Essa pessoa apostou só números menores que 33.

(V) A razão da PG é 2.

(F) Essa pessoa apostou somente em números pares.

Uma solução

De acordo com o enunciado, temos que $a_6 < 60 \Rightarrow a_1 . q^5 < 60$

Como a razão deve ser inteira, temos que $q = 2$, pois $2^5 = 32 < 60$

Temos também que $a_1 = 1$, pois se $a_2 = 2 \Rightarrow 2 . 2^5 = 64 > 60$

Portanto, os termos da sequência seria $(1, 2, 4, 8, 16, 32)$

Problema 10. João publicou na Internet um vídeo muito engraçado que fez com sua filha caçula. Ele observou e registrou a quantidade de visualizações do vídeo em cada dia, de acordo com o seguinte quadro.

Dias	Quantidade de visualizações do vídeo em cada dia
1	$7x$
2	$21x$
3	$63x$
...	...

Na tentativa de testar os conhecimentos matemáticos de seu filho mais velho, João o desafiou a descobrir qual era a quantidade x, expressa no quadro, para que a quantidade total de visualizações ao final dos 5 primeiros dias fosse 12705.

a) Sabendo que o filho de João resolveu corretamente o desafio, qual resposta ele deve fornecer ao pai para informar a quantidade exata de visualizações representada pela incógnita x?

Uma solução

Podemos observar que o conjunto das visualizações pode ser escrito da seguinte forma: $(1.7x, 3.7x, 9.7x, \ldots)$

Observemos também que os valores que estão multiplicando $7x$ formam a PG $(1, 3, 9, \ldots)$, que possui razão 3.

Então a soma dos 5 primeiros dias será:

$S_n = 12705$

$7x.\dfrac{3^5 - 1}{3 - 1} = 12705$

$x = 15$

b) Nos demais dias, a quantidade de visualizações continuou aumentando, seguindo o mesmo padrão dos primeiros dias. Em um único dia houve exatamente 2066715 visualizações registradas desse vídeo. Que dia foi este?

Uma solução

Como $x = 15$, temos que a nova sequência é $(105, 315, 954, \ldots)$ e pode ser escrita da seguinte forma: $(1 \times 105, 3 \times 105, 9 \times 105, \ldots)$

$105. a_1. q^{n-1} = 2066715$

$105.1. 3^{n-1} = 2066715$

$3^{n-1} = 19683$

$\dfrac{3^n}{3} = 19683$

$3^n = 59049$

$3^n = 3^{10}$

$n = 10$

Problema 11. A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para formar um castelo de 10 andares?

Uma solução

1 andar: 2 cartas

2 andares: 7 cartas

3 andares: 15 cartas

4 andares: 26 cartas

5 andares: 40 cartas

A sequência $a_n$será (2, 7, 15, 26, 40, ...)

A variação da sequência a_n é a sequência b_n (5, 8, 11, 14, ...) que é uma PA e, portanto, a sequência a_n é uma PA de segunda ordem.

Então temos que $a_{10} = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_9 = a_1 + \frac{(b_1+b_9)9}{2}$

Temos que $b_9 = 5 + (9-1)3 = 29$

Logo $a_{10} = 2 + \frac{(5+29).9}{2} = 155$ cartas. Portanto precisamos de, no mínimo, 3 baralhos de 52 cartas

Problema 12. O triangulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números.

Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1 : **1**

Linha 2 : **3 5**

Linha 3 : **7 9 11**

Linha 4 : **13 15 17 19**

...

Em qual linha aparecerá o 2013?

Uma solução

Observando os primeiro elementos de cada linha, obtemos a seguinte sequência a_n $(1, 3, 7, 13, 21, \dots)$
Ao fazer a diferença entre os termos subsequentes da sequência a_n obtemos a seguinte sequência b_n $(2, 4, 6, 8, \dots)$ que é uma PA e, portanto, a sequência a_n é uma PA de segunda ordem.
Temos que $a_n = a_1 + \frac{(b_1+b_{n-1})(n-1)}{2}$, então

$$2013 = 1 + \frac{(2 + b_{n-1})(n-1)}{2}$$

Mas, $b_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow b_{n-1} = 2 + (n-1-1)2 = 2n-2$, então

$$2013 = 1 + \frac{(2 + 2n - 2)(n-1)}{2}$$
$$2013 = 1 + \frac{(2n^2 - 2n)}{2}$$
$$n^2 - n - 2012 = 0$$
$$n = \frac{1 \pm \sqrt{8049}}{2}$$
$$n = 45{,}3$$

Portanto o número 2013 aparece na linha 45.

Problema 13. A Torre de Hanói é um jogo bastante conhecido. Neste jogo, há três hastes e uma pilha com um certo número de discos empilhados em uma das hastes. O jogo consiste em transferir, utilizando a menor quantidade de movimentos possíveis, todos os discos da haste original para alguma outra haste, porém só pode movimentar uma peça de cada vez e uma peça maior não pode ficar em cima de uma menor. Utilize a ideia de recorrência para encontrar uma relação da quantidade mínima de movimentos para ganhar o jogo com n discos. Encontre uma fórmula fechada para a recorrência encontrada.

Figura 12 Torre de Hanoi

(http://professorandrios.blogspot.com.br/2013/06/jogo-de-mesa-torre-de-hanoi-e-um-quebra.html)

Uma solução

Suponhamos que tenha x_n discos, então para movimentar todos eles, devemos movimentar x_{n-1} discos, depois movimentar o disco que ficou e novamente x_{n-1}, então temos que:

$x_n = x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1$, portanto a fórmula da recorrência é dada por:

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 1 \\ \quad x_1 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo a recorrência temos que:

$x_1 = 1$

$x_2 = 2x_1 + 1$

$x_3 = 2x_2 + 1$

...

$x_{n-1} = 2x_{n-2} + 1$

$x_n = 2x_{n-1} + 1$

Multiplicando a primeira equação por 2^{n-1}, a segunda por 2^{n-2} e assim por diante, temos:

$2^{n-1}.x_1 = 1.2^{n-1}$

$2^{n-2}.x_2 = 2^{n-1}.x_1 + 1.2^{n-2}$

$2^{n-3}.x_3 = 2^{n-2} + 1.2^{n-3}$

...

$2^1.x_{n-1} = 2^2x_{n-2} + 1.2^1$

$2^0.x_n = 2x_{n-1} + 1.2^0$

Somando as equações temos:

$$x_n = (2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0)$$

Aplicando a fórmula da soma dos termos da PG temos:

$$x_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

Portando a fórmula fechada da recorrência é:

$$x_n = 2^n - 1$$

4 METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Um dos caminhos que podem ser utilizados para se obter êxito no ensino de matemática, especificamente no ensino de sequências numéricas, é a metodologia da resolução de problemas, a qual, nos dias de hoje, é muito estudada e pesquisada por educadores matemáticos devido à sua importância para o ensino desta disciplina.

Todavia, segundo Brasil (1997, p.32), “tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos”.

Por isso torna-se necessário que os professores compreendam como trabalhar com esta metodologia, pois, segundo Filho e Silva (2011), a metodologia da resolução de problemas estimula processos cognitivos, possibilita ao aluno refletir e analisar os procedimentos de resolução, descobrir outros caminhos para chegar à resposta, fazer uma releitura da solução encontrada, dentre outras.

4.1 Definição de Problema

Um problema pode compreender muito mais que a prática de um determinado algoritmo ou operações matemáticas. Pode oferecer ao aluno a possibilidade de enfrentar situações novas, buscando novos raciocínios, fazendo-o sentir-se realmente desafiado.

Para Dante (1998) um problema é uma situação que faz com que o sujeito pense e raciocine para resolvê-lo. Em um problema matemático o indivíduo deve pensar, mas fazê-lo de maneira matemática, utilizando conhecimentos matemáticos para solucioná-lo.

Ter um problema significa buscar, de maneira consciente, uma ação adequada para alcançar um objetivo definido, mas não imediatamente atingível. (BOLZAN, FLORES, GOI, apud, POLYA, 1995)

Para Mariano (2004, p. 3) um problema “é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. Contudo, um problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la”.

4.2 Características de um Problema

Dante (1998) enfatiza que as principais características de um bom problema para o aluno são:

- Ser desafiador
- Ser real
- Ser interessante
- Ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido
- Não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas
- Ter um nível adequado de dificuldade

Nota-se então, que um problema deve levar o indivíduo a uma situação que necessite buscar, conscientemente, uma maneira adequada definindo estratégias e procedimentos a partir de suas experiências com o propósito de alcançar um objetivo definido. Porém deve-se observar que a resolução não deve vir de um caminho imediato, como uma receita, que o leve diretamente a solução.

4.3 Exercício X Problema

Nesse sentido Dante (1998) distingue exercício de problema. O exercício tem por objetivo a aplicação de um determinado algoritmo, de forma mecânica, em questões fechadas necessitando de pouco tempo para resolvê-las. Já o problema necessita que o aluno utilize a criatividade e intuição aliada a conhecimentos e experiências anteriores. Os problemas são abertos podendo ser trabalhado diversos aspectos durante a sua resolução, necessitando de um pouco mais de tempo para encontrar a solução.

Nota-se que tanto os exercícios quanto os problemas possuem seus valores no ensino de matemática e devido ao pouco tempo de duração das aulas é necessário que o professor administre a utilização de ambos mantendo o equilíbrio durante o ano letivo.

4.4 Objetivos da Resolução de Problemas

Dante (1998) cita que os principais objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar de maneira produtiva
- Desenvolver o raciocínio do aluno
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas
- Oportunizar ao aluno o envolvimento com as aplicações matemáticas
- Munir o aluno com estratégias para resolução dos problemas
- Dar uma boa base matemática

Diante dos objetivos apresentados, podemos observar que para que essa metodologia cumpra sua finalidade é necessário primeiramente munir os alunos com determinadas estratégias a fim de auxiliá-los na análise e solução dos problemas, devem ser apresentadas situações problema que desafiem e motive os alunos a querer solucioná-la e é preciso que o indivíduo desenvolva o raciocínio lógico e que faça uso inteligente dos recursos disponíveis.

Ademais, é importante capacitar o aluno para lidar com situações novas e também para aplicar os conceitos matemáticos em situações cotidianas aguçando nele a criatividade, independência, favorecendo o desenvolvimento de atitude positiva em relação à matemática.

"Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. (BRASIL, 1997, p.33)"

Segundo Polya (1995) os conhecimentos adquiridos em um bom curso de 2º grau são basicamente suficientes para a prática de resolução de problemas, porém os problemas não são tidos como fáceis nem rotineiros, geralmente exigem originalidade e criatividade na busca da solução.

4.5 Classificação dos Problemas

Dante (1998) classifica os problemas em diversos tipos, de acordo com suas características, em:

- Exercícios de reconhecimento, cujo objetivo é fazer com que o aluno reconheça um conceito, uma definição ou propriedade;
- Exercícios de algoritmo, que são utilizados para treinar a habilidade em executar um algoritmo (adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais) e reforçar conhecimentos anteriores.
- Problemas padrão, que objetivam recordar conceitos básicos dos algoritmos das quatro operações fundamentais e relacioná-las e empregá-las em situações cotidianas.
- Problemas heurísticos, que são problemas que estimulam a curiosidade e criatividade e espírito explorador do aluno. Esse tipo de problema desenvolve no aluno estratégias e procedimentos para resolver situações-problemas, que em muitos casos chegam a ser mais importantes que encontrar a solução correta.
- Problemas de aplicação, que através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procuram matematizar uma situação real, organizando dados, traçando gráficos, fazendo operações, etc. Podem ser usados em formas de projetos interdisciplinares, desde que a resposta seja relacionada a algo que desperte o interesse.
- Problemas de quebra-cabeça, que atrai e desafia grande parte dos alunos e constituem uma matemática recreativa.

Já Polya (1995) classifica os problemas em:

- Problemas auxiliares, que são problemas cujas soluções que servem de pontes para chegar ao objetivo principal.

- Problemas rotineiros, que podem ser resolvidos seguindo o mesmo procedimento de substituição observado em um problema genérico resolvido anteriormente.
- Problemas de determinação, que tem por objetivo determinar o valor da incógnita.
- Problemas de demonstração, que tem como objetivo mostrar que determinada afirmativa é ou não verdadeira.
- Problemas práticos, que são problemas que não necessitam de nenhum conhecimento especial para compreendê-lo.

4.6 Resolução de Problemas

Polya (1995) divide o processo de resolução de problemas em quatro fases:

4.6.1 Compreensão do problema

Além de compreender o problema o aluno precisa também desejar resolvê-lo. Para isso, o problema escolhido deve ser natural, interessante e chamar a atenção do aluno.

A compreensão do problema deve começar primeiramente na sua escolha. O professor deve tomar certos cuidados na escolha do problema como o enunciado verbal, dando as informações de maneira clara e simples para permitir o claro entendimento do problema proposto, os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao conteúdo abordado pelo problema, nível de dificuldade adequado e o aluno deve estar em condições de identificar as partes principais do problema.

4.6.2 Estabelecimento de um plano

Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, qual o caminho que devemos percorrer para obter o resultado.

Conforme Polya (1995, p.5), “o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano“.

O plano pode surgir de diversas maneiras, gradualmente, após diversas tentativas frustradas e até repentinamente, mas o professor possui um papel muito importante na concepção do plano que, dependendo do caso, pode provocar tal ideia no aluno através de indagações e sugestões a serem feitas de maneira bem discreta.

As ideias para o estabelecimento do plano surgem baseadas em experiências passadas e também através de conhecimentos previamente adquiridos, por isso uma boa alternativa é começar pela busca de um problema semelhante que pode auxilia-lo na resolução do problema proposto.

Outros aspectos que podem contribuir para a formulação da ideia é a organização dos dados do problema e também organizar a resolução em partes.

4.6.3 Execução do plano

Após a formulação do plano, que é o ponto mais complicado da resolução do problema, passamos agora para sua execução.

O plano estabelecido pelo aluno proporciona apenas um roteiro geral e é na fase de execução que o aluno deve verificar se os detalhes da resolução se encaixam perfeitamente no roteiro. Nessa fase, um papel importante do professor é insistir para que o aluno verifique cada passo do plano até que fique convicto, intuitivamente ou formalmente, de que não reste nenhuma lacuna no raciocínio ou no roteiro de resolução.

4.6.4 Retrospecto

O retrospecto é uma fase muito importante do processo de resolução do problema, pois é o momento onde o aluno faz uma análise da resolução completa, do resultado final e do caminho que percorreu até chegar a este, sendo uma maneira de consolidar o conhecimento e aprimorar sua habilidade de resolver problemas.

Nessa fase é um momento onde o aluno pode explorar o problema resolvido, verificando se existem outras maneiras de resolver o problema, se é possível verificar o resultado e se o método empregado na resolução pode ser usado para resolver outros problemas, ou seja, é um momento onde o estudante observa o problema de outros ângulos consolidando o conhecimento e o método usado e abrindo as portas para aquisição de outros conhecimentos.

CONCLUSÃO

A proposta mostra-se relevante, pois oferece ao leitor a oportunidade de ampliar os conhecimentos sobre sequências numéricas e ao professor a possibilidade de aprofundar o ensino deste importante conteúdo.

O estudo deixa claro que o ensino de sequências numéricas pode ter uma abordagem mais ampla, trazendo fatos históricos, a parte teórica que, além das progressões aritméticas e geométricas, podem abordar assuntos usualmente não tratados no ensino médio como recorrências lineares de primeira e segunda ordem, progressões aritméticas de segunda ordem, progressões harmônicas e sequência Fibonacci. Apresentamos também diversos exercícios que podem ser relevantes ao ensino deste conteúdo e também uma sugestão de metodologia de ensino com a finalidade de se obter êxito na transmissão deste conteúdo.

Neste contexto é de suma importância para o aprendizado do tema que o docente explore conceitos que usualmente não são abordados no ensino deste conteúdo, possibilitando ao aluno ampliar seus conhecimentos. Pretende-se também, por meio da metodologia proposta, dar autonomia ao aluno para que ele próprio possa desenvolver as ideias básicas tornando o aprendizado eficaz.

Para futuros estudos, sugere-se a aplicação dos conteúdos abordados em sala de aula utilizando a metodologia da resolução de problemas com o objetivo de comprovar a relevância da metodologia e a eficácia do aprendizado do tema abordado.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Kécia Silva. **Uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries no Ensino Médio.** Parnaíba, 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufpi.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/120/Disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf?sequence=1>. Acesso em 17 nov. 2017.

ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. **Introdução à análise matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)** – Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000.

BOLZAN, Tiago Dias; FLORES, Maria Lucia Pozzatti; GOI, Mara Elisângela Jappe. **Ensino da função quadrática através da metodologia de resolução de problemas**. Caçapava do Sul, 2014. Disponível em: < http://dspace.unipampa.edu.br/bitstream/riu/1039/1/Ensino%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20quadr%C3%A1tica%20atrav%C3%A9s%20da%20metodologia%20de%20resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20problemas..pdf>. Acesso em: 12 jan. 2018.

BOYER, Carl. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CUNHA, João Francisco Everton. **Sequências e Séries**: abordagem e aplicações no ensino médio. São Luís, 2014. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=UFMA&titulo=&aluno=>. Acesso em: 29 jan 2017.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 10. ed. São Paulo: Ática, 1998.

FILHO, M. G. S.; SILVA, C. M. S. da. **Matemática:** resolução de problemas. Brasília: Liber Livro, 2011.

GOIÁS. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo referência da Rede Estadual de Educação de Goiás:** versão experimental. Goiânia, 2013.

LEOPOLDINO, K. S. M. **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea**: aplicações no ensino básico. Natal, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/21244>. Acesso em: 15 dez. 2017.

LOPES, Luís. **Manual de Progressões.** Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

MARIANO, A. L. S. **Educação para o pensar, Educação Matemática e PCN**: uma aproximação possível. Revista Sul-Americana de Filosofia e Educação, Brasília, DF, n.2, mai./out. 2004. Disponível em: < http://periodicos.unb.br/index.php/resafe/article/view/5437>. Acesso em: 12 jan. 2018.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** 1. ed. v.2 São Paulo: Moderna, 1995.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo - 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SANTOS, Gabriel Peres. **Sequências Numéricas e Aplicações.** Vitória, 2013. Disponível em: <http://portais4.ufes.br/posgrad/teses/tese_6691_TCC_Gabriel_final.pdf>. Acesso em: 03 dez. 2017.

TRINDADE, Danrlei Silveira et al. **Abordagem do conceito de sequências em duas coleções de livros didáticos do ensino médio.** XII Encontro Nacional de Matemática – ISSN 2108-034X. São Paulo, 13 a 16 jul. 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7118_3569_ID.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2018