INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO - CAMPUS URUTAÍ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

YARA MARTINS CORRÊA

OPERADORES LINEARES EM ESPAÇOS DE BANACH

Urutaí-GO
Dezembro/2023

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO -
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

YARA MARTINS CORRÊA

OPERADORES LINEARES EM ESPAÇOS DE BANACH

Trabalho de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Urutaí, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Dr. Dassael Fabrício dos Reis Santos
Coorientador: Dr. Davidson Freitas Nogueira

Urutaí-GO
Dezembro/2023

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano

Corrêa, Yara Martins
C824o Operadores Lineares em Espaços de Banach / Yara Martins Corrêa; orientador Dr. Dassael Fabrício dos Reis Santos; co-orientador Dr. Davidson Freitas Nogueira. -- Urutaí, 2023.
63 p.

TCC (Graduação em Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal Goiano, Campus Urutaí, 2023.

1. Espaços de Banach. 2. Operadores Lineares. 3. Teorema da Aplicação Aberta. 4. Teorema do Gráfico Fechado. I. Santos, Dr. Dassael Fabrício dos Reis, orient. II. Nogueira, Dr. Davidson Freitas, co-orient. III. Título.

Responsável: Johnathan Pereira Alves Diniz - Bibliotecário-Documentalista CRB-1 n°2376

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO
PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano a disponibilizar gratuitamente o documento em formato digital no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

IDENTIFICAÇÃO DA PRODUÇÃO TÉCNICO-CIENTÍFICA

Tese (doutorado)
Dissertação (mestrado)
Monografia (especialização)
TCC (graduação)

Artigo científico
Capítulo de livro
Livro
Trabalho apresentado em evento

Produto técnico e educacional - Tipo:

Nome completo do autor:

Matrícula:

Título do trabalho:

RESTRIÇÕES DE ACESSO AO DOCUMENTO

Documento confidencial: Não Sim, justifique:

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: / /

O documento está sujeito a registro de patente? Sim Não

O documento pode vir a ser publicado como livro? Sim Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O(a) referido(a) autor(a) declara:

• Que o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;

• Que obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autoria, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;

• Que cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

/ /

Local Data

Yara Martins Corrêa

Assinatura do autor e/ou detentor dos direitos autorais

Ciente e de acordo: Dassael Fabrício dos Reis Santos

Assinatura do(a) orientador(a)

Ata nº 184/2023 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulada Operadores Lineares em Espaços de Banach, sob orientação do professor Dassael Fabrício dos Reis Santos, apresentada pela aluna Yara Martins Corrêa (2019101221230045) do Curso Licenciatura em Matemática (Campus Urutaí). Os trabalhos foram iniciados às 13 horas pelo Professor presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

- Dassael Fabricio dos Reis Santos (Orientador)
- Marcelo Bezerra Barboza (Examinador Externo)
- José Lucas Pereira Luiz (Examinador Externo)

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo do Trabalho de Conclusão de Curso, passou à arguição do candidato. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

[X] Aprovado [ ] Reprovado Nota: 9,3

Observação/Apreciações:

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu Dassael Fabrício dos Reis Santos lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Urutaí - GO, 13/12/2023

(Assinado Eletronicamente)
Dassael Fabricio dos Reis Santos
Orientador(a)

(Assinado Eletronicamente)
Marcelo Bezerra Barboza
Membro

(Assinado Eletronicamente)
José Lucas Pereira Luiz
Membro

Documento assinado eletronicamente por:

- José Lucas Pereira Luiz, José Lucas Pereira Luiz - Professor Avaliador de Banca - Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – Ifnmg (10727655000543), em 13/12/2023 14:01:21.
- Marcelo Bezerra Barboza, Marcelo Bezerra Barboza - Professor Avaliador de Banca - Universidade Federal de Goiás (01567601000143), em 13/12/2023 13:57:06.
- Dassael Fabricio dos Reis Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 13/12/2023 13:54:46.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 11/12/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 556558
Código de Autenticação: e31d576af7

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Formulário 1045/2023 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

Yara Martins Corrêa

OPERADORES LINEARES EM ESPAÇOS DE BANACH

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano–Campus Urutaí como requisito parcial para obtenção do titulo de Licenciada em Matemática, aprovado em 13 de dezembro de 2023, pela Banca Examinadora constituída pelos professores

(Assinado eletronicamente)
Prof. Dr. Dassael Fabricio dos Reis Santos
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Presidente da Banca (Orientador)

(Assinado eletronicamente)
Prof. Dr. Marcelo Bezerra Barboza
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

(Assinado eletronicamente)
Prof. Dr. José Lucas Pereira Luiz
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais - Campus Araçuaí

Documento assinado eletronicamente por:

- Marcelo Bezerra Barboza, Marcelo Bezerra Barboza - Professor Avaliador de Banca - Universidade Federal de Goiás (01567601000143), em 14/12/2023 17:53:24.
- José Lucas Pereira Luiz, José Lucas Pereira Luiz - Professor Avaliador de Banca - Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – Ifnmg (10727655000543), em 14/12/2023 17:41:07.
- Dassael Fabricio dos Reis Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 14/12/2023 17:20:41.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 14/12/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 558194
Código de Autenticação: 9c0e4e861d

AGRADECIMENTOS

Ao longo dessa jornada acadêmica desafiadora, agradeço a Deus e a Nossa Senhora por fortalecerem minha fé e proporcionarem a força necessária para superar os obstáculos.

Cácia e Gean, mãe e pai, vocês foram minha fonte constante de inspiração. Seu encorajamento incessante e crença em meu potencial foram as forças por trás de cada passo que dei nessa jornada. Cada conquista que alcancei é, em grande parte, um reflexo da educação sólida e dos valores que vocês me proporcionaram. Ao enfrentar desafios acadêmicos e pessoais, vocês sempre me mostraram que o impossível é apenas uma questão de perspectiva. Obrigada por me ensinarem a superar obstáculos e acreditar em mim mesma.

Agradeço aos meus irmãos, Yan, Yago e Yasmin, pela constante motivação e apoio emocional durante todo o processo. Que eu sirva, de algum modo, como apoio e inspiração para vocês, assim como vocês serviram para mim.

Agradeço a todos os professores que, com sua sabedoria e experiência, contribuíram significativamente para o meu crescimento. Em especial ao meu orientador, Dassael Fabricio dos Reis Santos e ao meu coorientador Davidson Freitas Nogueira, pelos seminários desenvolvidos no decorrer da elaboração deste trabalho, que com certeza, fizeram toda diferença. Ao Dassael, pelo tempo dedicado a revisões detalhadas, discussões minuciosas e pela atenção cuidadosa aos detalhes que aprimoraram este trabalho. Por toda sua paciência e orientação excepcional. Ao Davidson, por sua influência positiva em meu crescimento como estudante e como pessoa.

Agradeço aos meus amigos de caminhada, Danilo e José Armando que estiveram comigo durante todo o caminho. Danilo, obrigada pelas boas risadas que conseguia arrancar em dias turbulentos. Zé, obrigada por dividir cada momento destes anos comigo, por me incentivar e além de aplaudir minhas conquistas, me ajudar a levantar nas derrotas. Vocês, com certeza, são heróis silenciosos desta jornada. É sobre ter com quem dividir a dor do processo.

Agradeço a todos que de algumas forma estiveram comigo nessa jornada.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo fazer um estudo bibliográfico introdutório sobre os espaços de Banach e sobre os operadores lineares definidos nesses espaços. Mais precisamente, faremos uma descrição geral dos espaços de Banach, apresentando exemplos e estudando importantes propriedades desses espaços, tais como, separabilidade e uma relação entre a compacidade da bola unitária e a dimensão do espaço. Além disso, estudaremos os principais teoremas relacionados ao estudo dos operadores lineares definidos em espaços de Banach. Dentre os principais resultados estudados neste trabalho destacam-se: o Princípio da Limitação Uniforme, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado.

Palavras-chave: Espaços de Banach, Operadores Lineares, Teorema da Aplicação Aberta, Teorema do Gráfico Fechado

ABSTRACT

The present work aims to carry out an introductory bibliographical study on Banach spaces and the linear operators defined in these spaces. More precisely, we will give a general description of Banach spaces, presenting examples and studying important properties of these spaces, such as separability and a relationship between the compactness of the unit ball and the dimension of the space. Furthermore, we will study the main theorems related to the study of linear operators defined in Banach spaces. Among the main results studied in this work stand out: the Uniform boundedness Principle, the Banach-Steinhaus Theorem, the Open Mapping Theorem and the Closed Graph Theorem.

Key-words: Banach Spaces, Linear Operators, Open Mapping Theorem, Closed Graph Theorem

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICAIS

A Análise Funcional é um ramo da matemática que dedica-se ao estudo de espaços de funções e dos operadores lineares entre esses espaços. Ela combina os conceitos da Álgebra Linear e da Análise para entender as propriedades e comportamentos das funções e de uma classe de espaços, geralmente espaços de funções, denominados espaços de Banach. Tais espaços são conjuntos de funções que têm propriedades específicas e são equipados com uma estrutura adicional, nesse caso, com uma norma.

Acredita-se que os estudos em Análise Funcional tiveram início com o matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier no século XVII, quando o mesmo deu início ao estudo da conhecida Transformada de Fourier, mas criou força em 1920, com a demonstração do celebrado Teorema de Hahn-Banach, devido aos matemáticos Hans Hahn e Stefan Banach.

Reconhecido como um dos precursores mais destacados da Matemática no século XX, Stefan Banach deixou sua marca mais uma vez ao realizar contribuições substanciais para o estudo dos denominados espaços de Banach, já citados anteriormente, que serão explorados no decorrer do segundo capítulo. Diversos teoremas importantes levam seu nome, como por exemplo, o princípio da contração de Banach, o teorema de Banach–Steinhaus e o teorema de Hahn–Banach. No ano de 1932, Banach lançou sua inaugural monografia sobre a teoria geral da Análise Funcional, intitulada "Théorie des Opérations Linéaires", traduzida para o português como "Teoria de Operadores Lineares"— uma obra que perdura como referência intemporal, amplamente empregada por pesquisadores em todo o globo.

Os ilustres matemáticos poloneses Hugo Steinhaus e Juliusz Pawel Schauder desempenharam papéis cruciais no avanço do estudo da Análise Funcional. Em colaboração com Banach, Steinhaus enriqueceu a teoria com a introdução do Princípio da Limitação Uniforme. Conhecido também como Teorema de Banach-Steinhaus, o resultado, que será minuciosamente abordado e demonstrado no capítulo três, estabelece que, para uma família de operadores lineares contínuos definidos em um espaço de Banach, a limitação pontual implica na limitação uniforme de cada operador dessa família. Este feito notável foi pioneiramente publicado em 1927 na revista Fundamenta Mathematicae, por meio de um artigo intitulado "Sur le principe de la condensation de singularités".

A Análise Funcional tem papel fundamental no estudo de equações diferenciais e de evolução, sendo indispensável seu profundo conhecimento para o entendimento do comportamento de soluções de tais equações. À vista disso, o presente trabalho tem como objetivo abordar tópicos essenciais em espaços de Banach, operadores lineares nesses espaços e alguns resultados valiosos da Análise Funcional. A metodologia aplicada neste trabalho se baseia em pesquisa bibliográfica nos trabalhos de alguns dos principais autores que tratam sobre o assunto descritos nas referências bibliográficas deste trabalho.

Assim, este trabalho será dividido em três capítulos descritos a seguir:

No primeiro capítulo, será feito um breve estudo dos Espaços Métricos onde condensamos algumas definições, resultados e exemplos da teoria de espaços métricos e da análise, indispensáveis para o desenvolvimento e leitura do trabalho.

Já no segundo capítulo, faremos um estudo sobre os espaços normados e os espaços de Banach. Mais precisamente, definiremos o conceito de espaço de Banach e apresentaremos diversos exemplos de espaços que tem a propriedade de ser Banach, tais como os espaços das funções contínuas e os espaços de sequências c_0, ℓ_p e ℓ_∞. Além disso, mostraremos uma relação entre a compacidade da bola unitária e a dimensão do espaço e estudaremos o conceito de separabilidade em espaços de Banach.

Por fim, no terceiro capítulo, estudaremos as propriedades dos operadores lineares definidos entre espaços de Banach. De modo geral, mostraremos como operadores lineares se comportam quando definidos em espaços de Banach de dimensão infinita. Para isso, primeiro faremos uma abordagem clássica mostrando a equivalência entre os conceitos de continuidade, continuidade uniforme e limitação de operadores lineares definido em espaços normados e, em seguida, apresentaremos os principais resultados do estudo dos operadores lineares em Análise Funcional. Dentre os principais resultados que estudaremos neste trabalho destacam-se o Princípio da Limitação Uniforme (PLU), o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES DE ANÁLISE E ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo, faremos uma breve revisão sobre os principais resultados de Análise e de Espaços Métricos que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Desenvolveremos este capítulo baseados nos trabalhos de (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012)[1], (BREZIS, 2011), (KREYSZIG, 1989), (LIMA, 2014), (LIMA, 2010), (LIMA, 2014) e (OLIVEIRA, 2014).

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1.1. *Seja M um conjunto. Uma métrica em M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada par de elementos $x, y \in M$ associa um número $d(x,y) \in \mathbb{R}$ tal que as seguintes condições sejam satisfeitas para todo $x, y, z \in M$:*

(1) $d(x,x) = 0$;

(2) *Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$;*

(3) **(Simetria)** $d(x,y) = d(y,x)$;

(4) **(Desigualdade Triangular)** $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

O número real $d(x,y)$ da definição acima é denominado distância entre x e y em M. A seguir definiremos o que se entende por um espaço métrico.

Definição 1.1.2. *Um espaço métrico é um par (M,d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.*

[1](BOTELHO..., 2012)

Quando não houver engano, denotaremos um espaço métrico (M,d) simplesmente por M ficando implícito que em M está definida uma métrica d.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, por exemplo, é um espaço métrico com a métrica usual dada por $d(x,y) = |x-y|$, para todo $x,y \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, o espaço $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1,\cdots,x_n);\ x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}\}$ é um espaço métrico com uma das métricas definidas a seguir:

$$d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2},\ \ d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,\ \ d_3(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|, \tag{1.1}$$

para todo $x = (x_1,\cdots,x_n)$ e todo $y = (y_1,\cdots,y_n)$. As métricas d_1, d_2 e d_3 são denominadas, respectivamente, métrica euclidiana, métrica da soma e métrica do máximo. A menos que se diga o contrário, consideraremos $\mathbb{R}^n$ como um espaço métrico com a métrica euclidiana.

Definição 1.1.3. *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $\|\cdot\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma em E se satisfaz as seguintes condições:*

(1) $\|x\| \geq 0$*, para todo $x \in E$;*

(2) $\|x\| = 0$ *se, e somente se, $x = 0$, para todo $x \in E$;*

(3) $\|ax\| = |a|\|x\|$*, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $x \in E$;*

(4) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$*, para quaisquer $x,y \in E$.*

A seguir definiremos uma importante classe de espaços em Análise funcional, à saber, os espaços vetoriais normados.

Definição 1.1.4. *Um espaço normado é um par $(E,\|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\|\cdot\|$ é uma norma em E. Quando não houver confusão, denotaremos um espaço normado por E ficando implícito que E está munido da norma $\|\cdot\|$.*

Definição 1.1.5. *Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$ para todo $x \in E$.*

O teorema a seguir mostra que quaisquer duas normas em um espaço de dimensão finita são equivalentes.

Teorema 1.1.6. *Se E é um espaço vetorial de dimensão finita, então todas as normas em E são equivalentes.*

Demonstração: Veja ((OLIVEIRA, 2014), p. 6, Teorema 1.7).

Por diversas vezes ao longo deste trabalho precisaremos nos amparar nas propriedades das bolas abertas e das bolas fechadas sendo, por isso, este conceito fundamental nos estudos dos espaços métricos e, consequentemente, para os espaços de Banach.

Assim, sejam M um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$ um número real. A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a,r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r, isto é,

$$B(a,r) = \{x \in M;\ d(x,a) < r\}.$$

A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a,r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que ou igual a r, isto é,

$$B[a,r] = \{x \in M;\ d(x,a) \leq r\}.$$

No caso em que $M = E$ é um espaço normado[2] com norma $\|\cdot\|$ (veja Capítulo 2) e $d(x,y) = \|x-y\|$, para todo $x,y \in E$, podemos escrever

$$B(a,r) = \{x \in E;\ \|x-a\| < r\} \ \text{ e } \ B[a,r] = \{x \in E;\ \|x-a\| \leq r\}$$

Além disso, se $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual $d(x,y) = |x-y|$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, tem-se que

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R};\ |x-a| < r\} = \{x \in \mathbb{R};\ a-r < x < a+r\} = (a-r, a+r),$$

isto é, $B(a,r)$ é o intervalo aberto de extremos $a-r$ e $a+r$. Analogamente, a bola fechada $B[a,r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$. Por outro lado, se $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana d_1 definida em (1.1), então $B(a,r)$ é o interior do círculo de centro a e raio r.

Sejam E um espaço normado e r e k números reais positivos. Para cada $a \in E$ defina os conjuntos

$$a + B(0,r) = \{z = a + x;\ \ x \in B(0,r)\} \ \text{ e } \ kB(0,r) = \{z = kx;\ \ x \in B(0,r)\}.$$

Afirmação[3]**:** $a + B(0,r) = B(a,r)$ e $kB(0,r) = B(0,kr)$.

De fato, seja $z \in a + B(0,r)$. Logo, $z = a + x$, onde $x \in B(0,r)$, isto é, $\|x\| < r$. Disto, segue que

$$\|z-a\| = \|x\| < r,$$

[2]No caso em que M é um espaço normado denotamos E no lugar de M.

[3]Da teoria dos conjuntos, para mostrar que dois conjuntos A e B são iguais basta mostrar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

ou seja, $z \in B(a,r)$ e, por isso, $a+B(0,r) \subset B(a,r)$. Por outro lado, seja $z \in B(a,r)$ e defina $x = z-a$. Logo, $\|x\| = \|z-a\| < r$, isto é, $x \in B(0,r)$. Como $z = a+x$ com $x \in B(0,r)$ tem-se, pela definição do conjunto $a+B(0,r)$, que $z \in a+B(0,r)$ e, assim, $B(a,r) \subset a+B(0,r)$. Portanto, $a+B(0,r) = B(a,r)$.

Agora, seja $z \in kB(0,r)$. Logo, $z = kx$ com $x \in B(0,r)$. Disto, $\|x\| < r$ e

$$\|z\| = \|kx\| = k\|x\| < kr,$$

ou seja, $z \in B(0,kr)$. Por isso, $kB(0,r) \subset B(0,kr)$. Por outro lado, seja $z \in B(0,kr)$ e defina $x = \dfrac{z}{k}$. Logo, $\|z\| < kr$ e

$$\|x\| = \left\|\frac{z}{k}\right\| = \frac{1}{k}\|z\| < \frac{1}{k}kr = r,$$

isto é, $x \in B(0,r)$. Como $z = kx$ com $x \in B(0,r)$ tem-se, pela definição do conjunto $kB(0,r)$, que $z \in kB(0,r)$. Disto, $B(0,kr) \subset kB(0,r)$ e, portanto, $kB(0,r) = B(0,kr)$.

Um fato importante sobre as bolas $B(a,r)$ e $B[a,r]$ de um espaço métrico M é que elas são, respectivamente, conjuntos abertos e fechados. A seguir formalizaremos o conceito de conjunto aberto e fechado em um espaço métrico M.

Definição 1.1.7. *Sejam M um espaço métrico e A um subconjunto de M. Dizemos que $a \in A$ é um ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$. Além disso, um subconjunto A de M é aberto se todos os seus pontos são pontos interiores.*

O conjunto dos pontos interiores a A é chamado interior de A e denotamos esse conjunto por $int(A)$. Assim, um conjunto A é aberto se, e somente se, $A = int(A)$. É consequência da definição que se M é um espaço métrico e $A \subset M$, então $int(A)$ é um subconjunto aberto de M.

Se M é um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$, então a bola $B(a,r)$ é um conjunto aberto. Com efeito, seja $x \in B(a,r)$ e defina $R = r - d(x,a)$. Como $d(x,a) < r$, segue que $R > 0$. Agora, se $x_0 \in B(x,R)$, então $d(x_0,x) < R$ e, pela desigualdade triangular

$$d(x_0,a) \leq d(x_0,x) + d(x,a) < R + d(x,a) = r.$$

Assim, $x_0 \in B(a,r)$. Isto mostra que $B(x,R) \subset B(a,r)$ e, portanto $B(a,r)$ é um conjunto aberto.

Definição 1.1.8. *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto F é dito fechado em M se seu complementar $F^c = M \setminus F$ é aberto em M.*

A definição a seguir estabelece o conceito de ponto aderente e fecho de um conjunto.

Definição 1.1.9. *Sejam M um espaço métrico e F um subconjunto de M. Um ponto $a \in M$ é um ponto aderente de F se, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se que $B(a,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. O conjunto dos pontos aderentes de F é denominado fecho de F e denotamos este conjunto por $\overline{F}$.*

O resultado que apresentaremos a seguir relaciona os conceitos de ponto aderente e conjunto fechado.

Teorema 1.1.10. *Seja M um espaço métrico e $F \subset M$. Então, F é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 77, Proposição 7).

De forma equivalente, F é um subconjunto fechado de M se, e somente se, o limite de toda sequência convergente de F está em F, isto é, dada uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de F tal que $x_n \longrightarrow a \in M$, tem-se $a \in F$.

É consequência do teorema anterior que o fecho $\overline{F}$ de um conjunto fechado $F \subset M$ é um conjunto fechado. Além disso, toda bola fechada $B[a,r]$ de um espaço métrico M é um subconjunto fechado de M uma vez que seu complementar $A = M \setminus B[a,r]$ é um conjunto aberto.

Teorema 1.1.11. *Se M é um subconjunto de um espaço vetorial normado E e $a \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), então $a\overline{M} = \overline{aM}$.*

Demonstração: Veja ((BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012), p. 20, Exercício 1.8.8).

Outro fato importante nas bolas abertas e fechadas em M é que elas tem a importante propriedade de serem conjuntos limitados. A definição a seguir estabelece o conceito de conjunto limitado em um espaço métrico M.

Definição 1.1.12. *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $A \subseteq M$ é dito limitado se existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x,y) \leq c$, para todo $x,y \in X$. Equivalentemente, um subconjunto $A \subseteq M$ é limitado se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $A \subset B(a,r)$, com $a \in M$.*

Observe que o número c na definição acima é uma cota superior para o conjunto $X = \{d(x,y);\ x,y \in A\}$. Assim, o menor dos números c é o supremo de X. A este menor número c denominamos diâmetro de A e denotamos $diam(A)$, isto é,

$$diam(A) = \sup\{d(x,y);\ x,y\ \in A\}.$$

Exemplo 1.1.13. *Se M é um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$ é um número real, então a bola $B(a,r)$ é um conjunto limitado em M cujo diâmetro não ultrapassa $2r$. De fato, pela desigualdade triangular,*

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r + r = 2r, \text{ para todo } x,y \in B(a,r).$$

Analogamente prova-se que a bola fechada $B[a,r]$ é um conjunto limitado.

Os resultados apresentados a seguir se referem a compacidade e separabilidade de espaços métricos. Para definir o conceito de compacidade precisamos primeiro estabelecer o conceito de cobertura. Para isso, sejam M um espaço métrico e $A \subset M$ e relembremos o seguintes conceitos da teoria dos Espaços Métricos:

(1) Uma cobertura de A é uma família de subconjuntos de M, denotada por $\mathbb{X} = (X_i)_{i \in I}$, tal que $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, onde I é um conjunto de índices.

(2) Uma subcobertura de A é uma subfamília $\mathbb{X}' = (X_i)_{i \in J}$ de $\mathbb{X}$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{i \in J} X_i$, onde $J \subset I$. Se J é um subconjunto próprio de I, dizemos que $\mathbb{X}'$ é uma subcobertura própria de $\mathbb{X}$.

(3) Uma cobertura $\mathbb{X} = (X_i)_{i \in I}$ de A é aberta se X_i é um subconjunto aberto de M, para cada $i \in I$.

(4) Uma cobertura $\mathbb{X} = (X_i)_{i \in I}$ de A é finita se I é um conjunto finito..

Definição 1.1.14. *Um espaço métrico M é dito compacto se toda cobertura aberta possui subcobertura finita, isto é, se $\mathbb{X} = (X_i)_{i \in I}$ é uma cobertura de M tal que cada X_i é um subconjunto aberto em M, então $M \subset A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n}$, onde $i_1, \ldots, i_n \in I$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

O teorema apresentado a seguir fornece uma alternativa para definição de conjunto compacto em termos de convergência de sequências.

Teorema 1.1.15. *Um espaço métrico M é compacto se, e somente se, toda sequência em M possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 233, Proposição 7).

A seguir apresentaremos dois resultados que serão necessários para demonstração do Teorema 2.3.1 do Capítulo 2. Juntos estes teoremas mostram que subconjuntos compactos de um espaço métrico são fechados e limitados.

Teorema 1.1.16. *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 221, Proposição 1).

Teorema 1.1.17. *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 222, Proposição 2).

Para definir o conceito de separabilidade de um espaço métrico é necessário estabelecer primeiro a noção de densidade de um conjunto. Para isso, sejam M um espaço métrico e A um subconjunto de A. Dizemos que A é um subconjunto denso em M se $\overline{A} = M$, isto é, quando todo ponto $x \in M$ é limite de uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de A. A seguir definiremos o conceito de espaço separável que será novamente definido na Seção 2.3 do Capítulo 2 para espaços normados.

Definição 1.1.18. *Um espaço métrico M é dito separável se M contém um subconjunto enumerável e denso em M.*

Teorema 1.1.19. *Todo subconjunto X de um espaço métrico separável M é separável.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 288, Exemplo 4).

Sejam M e N espaços métricos e considere $C(M,N)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas de M em N. O teorema a seguir estabelece condições para a separabilidade de $C(M,N)$.

Teorema 1.1.20. *Se K é compacto e M é um espaço métrico separável, então $C(K,M)$ é separável.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 289, Exemplo 7).

1.2 Continuidade e Continuidade Uniforme

Nesta seção, estabeleceremos os principais resultados sobre continuidade e continuidade uniforme que utilizaremos ao longo deste trabalho. Começaremos definindo o conceito de função contínua entre espaços métricos.

Definição 1.2.1. *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é dita contínua em $a \in M$ se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ (δ dependendo de ε) tal que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ sempre que $d(x,a) < \delta$. Além disso, $f : M \longrightarrow N$ é contínua se f é contínua em todos os pontos de M.*

De forma equivalente, $f : M \longrightarrow N$ é contínua em $a \in M$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon).$$

Se M é um espaço métrico, então a aplicação $f : M \longrightarrow M$ definida por $f(x) = x$ é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta = \varepsilon$, temos, para todo $a \in M$ que

$$d(x,a) < \delta \text{ implica } d(f(x), f(a)) = d(x,a) < \delta = \varepsilon,$$

provando, assim, a continuidade de f.

Uma função $f : M \longrightarrow N$ que não é contínua no ponto a é dita descontínua em a. Assim, f é descontínua em $a \in M$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, pode-se obter $x \in M$ (com x dependendo de δ) tal que $d(x,a) < \delta$ mas $d(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$.

Definição 1.2.2. *Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é Lipschitziana (ou Lipschitz) se existe uma constante $C > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x,y)$, quaisquer que sejam $x, y \in M$.*

No caso particular em que $C = 1$ dizemos que f é uma contração.

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é Lipschitziana com constante de Lipschitz[4] igual a $|a|$. De fato, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$d(f(x), f(y)) = |(ax+b) - (ay+b)| = |a(x-y)| = |a||x-y|.$$

Com mesmo argumento prova-se que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ é Lipschitziana em cada subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Os teoremas apresentados a seguir tratam da continuidade de funções obtidas por operações de outras funções contínuas.

Teorema 1.2.3. *Sejam M, N e P espaços métricos. Se $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ e $g : N \longrightarrow P$ é contínua em $f(a)$, então $g \circ f : M \longrightarrow P$ é contínua no ponto a. Ou seja, a composta de duas aplicações contínuas é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 33, Proposição 1).

Teorema 1.2.4. *Sejam M um espaço métrico e E um espaço normado. Se $f, g : M \longrightarrow E$ e $\alpha, \beta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicações contínuas tal que $\beta(x) \neq 0$, para todo $x \in M$, então as aplicações $f + g : M \longrightarrow E$, $\alpha f : M \longrightarrow E$ e $\dfrac{\alpha}{\beta} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha(x) f(x), \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

[4]A constante de Lipschitz é a menor constante $C > 0$ para o qual vale a desigualdade da Definição 1.2.2.

são contínuas. Em particular, Se $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, então $f + g$, fg e $\dfrac{f}{g}$ (com $g(x) \neq 0$ para todo $x \in M$) são funções reais contínuas.

*Demonstração:*Veja ((LIMA, 2014), p. 35, Proposição 3).

Definição 1.2.5. *Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \longrightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos.*

Exemplo 1.2.6. *Em um espaço vetorial normado E duas bolas abertas $B(a,r)$ e $B(a_0, r_0)$ são homeomorfas. O mesmo resultado vale para bolas fechadas. Mais geralmente, toda bola aberta de um espaço vetorial normado E é homeomorfa ao espaço inteiro E. Para uma demonstração completa deste resultado veja ((LIMA, 2014), p. 41, Exemplo 15).*

Agora, sejam M, N e P espaços métricos. Definimos uma aplicação $f : M \longrightarrow N \times P$ por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, para todo $x \in M$, onde $f_1 : M \longrightarrow N$ e $f_2 : M \longrightarrow P$. As aplicações f_1 e f_2 são chamadas coordenadas de f. O Teorema a seguir fornece condições para continuidade da função f assim definida.

Teorema 1.2.7. *Uma aplicação $f : M \longrightarrow N \times P$ é contínua no ponto $a \in M$ se, e somente se, as aplicações coordenadas $f_1 : M \longrightarrow N$ e $f_2 : M \longrightarrow P$ são contínuas nesse ponto.*

*Demonstração:*Veja ((LIMA, 2014), p. 34, Proposição 2).

A seguir apresentaremos um teorema de grande importância topológica que, em essência, estabelece uma relação entre conjuntos abertos e o conceito de continuidade.

Teorema 1.2.8. *Sejam M,N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua se, e somente se a imagem inversa $f^{-1}(A) = \{x \in M;\ f(x) \in A\}$ de todo subconjunto aberto $A \subset N$ é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 68, Proposição 1).

Por outro lado, se $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação contínua e A é um subconjunto aberto de M, então a imagem direta $f(A)$ não necessariamente é um conjunto aberto. De fato, sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ e $A = (-1, 1)$. É evidente que f é contínua e A é aberto em $\mathbb{R}$. Porém, $f(A) = [0, 1)$ não é aberto em $\mathbb{R}$. No Capítulo 3, mostraremos um resultado que mostra a validade deste resultado quando certas hipóteses são adicionadas a função f. Este resultado é conhecido como Teorema da Aplicação Aberta.

O resultado do Teorema 1.2.8 é verdadeiro se substituirmos o conjunto aberto $A \subset N$ por um conjunto fechado $F \subset N$. Para uma versão deste resultado veja ((LIMA, 2014), p. 79, Proposição 9).

A seguir estabeleceremos um conceito que generaliza a ideia de continuidade, à saber, a continuidade uniforme. Para isso, sejam M e N espaços métricos.

Definição 1.2.9. *Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é uniformemente contínua se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in M$, tem-se que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ sempre que $d(x, y) < \delta$.*

É consequência direta da definição que toda aplicação uniformemente contínua é também contínua onde o valor de δ depende de ε mas independe da escolha do ponto onde a continuidade de f é examinada. Porém, a recíproca desse resultado não é verdadeira. De fato, a função $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é uniformemente contínua. Para prova deste resultado veja ((LIMA, 2010), p. 241, Exemplo 21). Também, a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é contínua mas não é uniformemente contínua uma vez que podemos encontrar pontos $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tais que, $d(x, y) < \delta$ mas $d(f(x), f(y)) = 2$.

Além disso, da definição de continuidade uniforme tem-se que toda aplicação Lipschitziana é uniformemente contínua. A demonstração desta afirmação é análoga ao caso provado no Teorema 3.1.1 para operadores lineares em espaços normados.

O resultado que apresentaremos a seguir será essencial para prova de que o espaço $C[a, b]$ das funções contínuas em $[a, b]$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.2.10. *O limite uniforme de uma sequência de aplicações contínuas $f_n : M \longrightarrow N$ é uma aplicação contínua $f : M \longrightarrow N$.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 132, Corolário da Proposição 14).

A seguir apresentaremos um importante resultado sobre operadores lineares. Para isso, sejam E e F espaços vetoriais. Um operador $f : E \longrightarrow F$ é dito linear se, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Teorema 1.2.11. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $f : E \longrightarrow F$ um operador linear. Se f^{-1} existe, então f^{-1} é um operador linear.*

Demonstração: Veja ((KREYSZIG, 1989), p. 88, Teorema 2.6-10).

Para mais detalhes sobre operadores lineares veja o Capítulo 3 deste trabalho.

1.3 Espaços Métricos Completos

Nesta seção, apresentaremos resultados sobre convergência de sequências de Cauchy em um espaço métrico M com métrica d.

Definição 1.3.1. *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ é uma sequência de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ tem-se $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Segundo ((LIMA, 2014), p. 167), intuitivamente, os termos de uma sequência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que cresce o índice n.

Lembre-se, do estudo dos limites, que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para um ponto $a \in M$ se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, tem-se $d(x_n, a) < \varepsilon$, isto é, os termos da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se aproximam de um ponto a fixado à medida que n se torna suficientemente grande. O próximo resultado relaciona o conceito de convergência de uma sequência com o fato desta sequência ser de Cauchy, isto é, este resultado garante que se os termos de uma sequência se aproximam de um ponto fixado, então esses termos se aproximam um do outro.

Teorema 1.3.2. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 161, Proposição 1).

A recíproca deste teorema não é verdadeira. Para um exemplo deste fato veja o Capítulo 2. No caso em que esta recíproca é verdadeira temos uma importante classe de espaços métricos denominados espaços métricos completos. A definição a seguir formaliza este conceito.

Definição 1.3.3. *Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, por exemplo, é um espaço completo. De fato, a completude de $\mathbb{R}$ é consequência dos próximos três resultados apresentados a seguir. Para uma descrição detalhada do argumento veja o Capítulo 2.

Teorema 1.3.4. *Toda sequência de Cauchy de um espaço métrico M é limitada.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 161, Proposição 2).

Porém, a recíproca deste resultado é falsa, isto é, nem toda sequência limitada é de Cauchy em M. Com efeito, seja $M = \mathbb{R}$ e considere a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se} \quad n \text{ é par} \end{cases}.$$

Observe que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é um sequência limitada, pois $x_n \in \{0,1\}$, mas não é Cauchy uma vez que $d(x_n, x_{n+1}) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Apesar de sequências limitadas não serem necessariamente de Cauchy pode-se mostrar, no caso real, que pelo menos uma de suas subsequências é convergente. Este resultado é conhecido como Teorema de Bolzado-Weierstrass e está enunciado a seguir:

Teorema 1.3.5 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2010), p. 123, Corolário 1).

O seguinte resultado mostra que o limite de uma sequência de Cauchy que tem uma subsequência convergente é o limite desta subsequência.

Teorema 1.3.6. *Se uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}$ possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$ então $lim\ x_n = a$.*

Pode-se provar como consequência do Teorema 1.1.16 e do Teorema 1.1.17 que todo espaço métrico compacto é completo. Outros exemplos de espaços completos serão apresentados no Capítulo 2 deste trabalho.

Teorema 1.3.7. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Veja ((LIMA, 2014), p. 166, Proposição 6).

1.4 Simetria e Convexidade

Nesta seção, estabeleceremos resultados de simetria e convexidade que utilizaremos no Capítulo 3 para demonstração do Teorema da Aplicação Aberta.

Definição 1.4.1. *Seja E um espaço vetorial e A um subconjunto de E. Dizemos que A é simétrico se dado $x \in A$ tem-se $-x \in A$.*

Se E é um espaço normado e $r > 0$, então a bola aberta $B(0,r) = \{x \in E;\ \|x\| < r\}$ e a bola fechada $B[0,r] = \{x \in E;\ \|x\| \leq r\}$ são conjuntos simétricos. De fato, se $x \in B(0,r)$, então $\|x\| < r$. Logo, $\|-x\| = \|x\| < r$, isto é, $-x \in B(0,r)$. Portanto, $B(0,r)$ é simétrico. De forma análoga prova-se a simetria de $B[0,r]$.

Definição 1.4.2. *Seja E um espaço vetorial e A um subconjunto de E. Dizemos que A é convexo se dados $x_1, x_2 \in A$ e $t \in [0,1]$ tem-se $tx_1 + (1-t)x_2 \in A$, isto é, se o segmento de reta que liga dois pontos de A esta contido em A.*

Sejam E um espaço normado, $a \in E$ e $r > 0$, A bola aberta $B(a,r) = \{x \in E;\ \|x-a\| < r\}$ e a bola fechada $B[a,r] = \{x \in E;\ \|x-a\| \leq r\}$ são conjuntos convexos. De fato, se $x, y \in B(a,r)$, então $\|x-a\| < r$ e $\|y-a\| < r$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|(tx+(1-t)y)-a\| &= \|tx+(1-t)y+ta-ta-a\| = \|tx+(1-t)y-(1-t)a-ta\| \\
&= \|t(x-a)+(1-t)(y-a)\| \leq t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| \\
&< tr+(1-t)r = r.
\end{aligned}$$

Logo, $tx+(1-t)y \in B(a,r)$ e, portanto, $B(a,r)$ é convexa. De forma análoga prova-se que a bola fechada $B(a,r)$ é convexa.

O próximo resultado mostra que o fecho de um conjunto convexo é um conjunto convexo.

Teorema 1.4.3. *Seja E um espaço vetorial normado e $A \subset E$ um conjunto convexo. Então, $\overline{A}$ é um conjunto convexo.*

Demonstração. Sejam A um subconjunto convexo de E e $x, y \in \overline{A}$. Então, existem sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ tais que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = y$. Como A é convexo, pela Definição 1.4.2, $tx_n + (1-t)y_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $t \in [0,1]$. Disto, segue que

$$tx+(1-t)y = t \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n + (1-t) \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} (tx_n + (1-t)y_n) \in \overline{A}, \ \ t \in [0,1],$$

e, portanto, $\overline{A}$ é convexo.

$\square$

De forma análoga prova-se que se A é convexo, então $int(A)$ é um conjunto convexo.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS NORMADOS E ESPAÇOS DE BANACH

Neste capítulo, faremos um estudo introdutório sobre os espaços de Banach. Os espaços de Banach formam uma classe importante de espaços vetoriais que tem a propriedade de serem completos, isto é, as sequências de Cauchy são convergentes nesse espaços. De maneira geral, apresentaremos os conceitos básicos e exemplos de espaços vetoriais que são de Banach como, por exemplo, os espaços de sequências c_0, ℓ_p e ℓ_∞ e o espaço de funções $C[a,b]$. Além disso, apresentaremos uma série de resultados que nos ajudarão a compreender a estrutura dos espaços de Banach. Os principais resultados deste capítulo são baseados nos trabalhos de (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012), (BREZIS, 2011), (KREYSZIG, 1989), (OLIVEIRA, 2014) e suas referências bibliográficas. Ao logo deste e do próximo capítulo, $\mathbb{K}$ denotará o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

2.1 Espaços de Banach

Nesta seção, estudaremos os conceitos gerais e os principais resultados sobre espaços de Banach. Primeiro, lembre-se que se E é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, então uma função $\|\cdot\|\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma em E se satisfaz as condições da Definição 1.1.3.

Desta forma, dizemos que E é um espaço normado se E é um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|$. Neste caso, denotamos $(E, \|\cdot\|)$ ou simplesmente E quando ficar claro que E é um espaço normado. Observe que um espaço normado é um espaço métrico com a métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ induzida pela norma. Assim, todos os resultados sobre espaços métricos podem ser aplicados para o estudo dos espaços normados. Em particular, podemos escrever o conceito de convergência de sequências para espaços normados da seguinte forma: se E é um espaço normado, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente para $x \in E$ se, e somente se,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Neste caso, dizemos que x é o limite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e escrevemos $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ ou $x_n \longrightarrow x$.

Agora lembre-se, da teoria dos espaços métricos, que toda sequência convergente em um espaço métrico M é uma sequência de Cauchy em M. Porém, nem toda sequência de Cauchy em M é convergente em M. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de números racionais definida da seguinte forma: $x_1 = 1,4,\ x_2 = 1,41,\ x_3 = 1,414, \cdots$ com $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$. Observe que (x_n) é uma sequência de Cauchy no conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ que converge para um limite em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Logo, (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$ e, portanto, $\mathbb{Q}$ não é um espaço completo.

Também, considere o conjunto $E = (0,1]$ e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência em E definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. É evidente que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{n} = 0 \notin E$. Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy que converge para um ponto que não pertence a E.

Os espaços métricos M para os quais toda sequência de Cauchy é convergente em M são chamados espaços métricos completos. A definição a seguir apresenta os chamados Espaços de Banach.

Definição 2.1.1. *Um espaço normado E é denominado espaço de Banach se E é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Por exemplo, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é um espaço de Banach. De fato, toda sequência de Cauchy nos números reais é convergente. Com efeito, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy. Pelo Teorema 1.3.4 segue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 1.3.5), $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente. Logo, do Teorema 1.3.6, temos que (x_n) converge em $\mathbb{R}$ e, portanto, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é um espaço de Banach.

O próximo resultado dá uma condição necessária e suficiente para que um subespaço de um espaço de Banach seja um espaço de Banach.

Teorema 2.1.2. *Sejam E um espaço Banach e F um subespaço de E. Então F é Banach com a norma induzida de E, se somente se, F é fechado em E.*

Demonstração. Suponha que F é um espaço de Banach e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F tal que $x_n \longrightarrow x \in E$. Como F é Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em F e, portanto, convergente em F, isto é, existe $x_0 \in F$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$. Pela unicidade de limite segue que $x = x_0$ e, portanto, F é fechado em E.

Reciprocamente, suponha que F é fechado em E e considere $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Como E é um espaço de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E. Logo, existe $x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Sendo F fechado por hipótese, tem-se que $x \in F$ e, portanto, F é um espaço de Banach.

$\square$

A definição a seguir caracteriza uma classe importante de funções estudadas em espaços de Banach, à saber, as funções limitadas.

Definição 2.1.3. *Seja X um conjunto não-vazio. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é limitada se existe uma constante $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in X$.*

Agora, seja X um conjunto não vazio e defina $B(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K};\ f \text{ é limitada em } X\}$. O conjunto $B(X)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de funções e produto por um escalar.

Teorema 2.1.4. *$B(X)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)| \tag{2.1}$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em afirmações.

Afirmação 1: $\|\cdot\|_\infty$ definida em (2.1) é uma norma em $B(X)$.

Para mostrar a afirmação acima, basta verificar que as condições da definição 1.1.3 são satisfeitas. Com efeito,

(1) $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)| \geq 0$, pois $|f(x)| \geq 0$ para todo $x \in X$.

(2) Suponha que $\|f\|_\infty = 0$. Logo, $|f(x)| = 0$ o que implica $f(x) = 0$, para todo $x \in X$. Por outro lado, se $f = 0$, então $\sup_{x\in X}|f(x)| = 0$, donde podemos concluir que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)| = 0$.

(3) Para todo $f \in B(X)$ e todo $a \in \mathbb{K}$, tem-se

$$||af||_\infty = \sup_{x\in X}|af(x)| = |a|\sup_{x\in X}|f(x)| = |a|||f||_\infty.$$

(4) Para todo $f, g \in B(X)$, tem-se que

$$||f+g||_\infty = \sup_{x\in X}|(f+g)(x)| = \sup_{x\in X}|f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)| + \sup_{x\in X}|g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $B(X)$.

Afirmação 2: $B(X)$ é completo com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

De fato, seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $B(X)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $m,n \geq n_0$, tem-se $||f_m - f_n||_\infty < \varepsilon$, isto é, para todo $m,n \geq n_0$, tem-se $\sup\limits_{x\in X}|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Logo $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ e, como $\mathbb{K}$ é completo, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em $\mathbb{K}$ para cada $x \in X$. Assim, seja $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$, para todo $x \in X$. Mostraremos que $f \in B(X)$ e $f_n \longrightarrow f$. Primeiro, observe, para cada $x \in X$, que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X}|f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon + |f_m(x) - f(x)|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Passando ao limite quando $m \longrightarrow \infty$ em (2.2) segue, para todo $n \geq n_0$ e todo $x \in X$, que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Em particular, para $n = n_0$, tem-se que $f(x) \in (-\varepsilon + f_{n_0}(x), \varepsilon + f_{n_0}(x))$. Assim, f é limitada e, disto, $f \in B(X)$. Além disso, de (2.3) obtém-se que

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ n \geq n_0,$$

isto é, $f_n \longrightarrow f$. Portanto, $B(X)$ é um espaço de Banach.

□

Em particular, o conjunto $C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K};\ f$ é contínua em $[a,b]\}$ é um espaço de Banach. De fato, seja $f \in C[a,b]$. Como $[a,b]$ é fechado e f é contínua em $[a,b]$ tem-se que f é limitada em $[a,b]$, e disto $f \in B[a,b]$. Logo, $C[a,b]$ é um subespaço vetorial do espaço de Banach $B[a,b]$ com as operações usuais de soma de funções e de produto de uma função por um escalar. Portanto, $C[a,b]$ é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)| = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Afirmamos que $C[a,b]$ é um espaço de Banach. Com efeito, do Teorema 2.1.2, basta mostrar que $C[a,b]$ é subespaço fechado de $B[a,b]$. Para isto, devemos mostrar que se $f_n \longrightarrow f$ então $f \in C[a,b]$. Mas,

$$f_n \longrightarrow f \in C[a,b] \text{ se, somente se, } \lim_{n\longrightarrow\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Logo, a sequência (f_n) converge uniformemente para f. Disto e do Teorema 1.2.10, tem-se que f é contínua por ser limite uniforme de uma sequência de funções contínuas. Assim $f \in C[a,b]$ e, portanto, $C[a,b]$ é um espaço de Banach.

Neste ponto, questionamos se, em geral, o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis, com $k \in \mathbb{N}$, definido por

$$C^k[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ é diferenciável em } [a,b] \text{ e } f' \in C^{k-1}[a,b]\}$$

é um espaço de Banach. Para responder essa pergunta, consideremos o espaço das funções continuamente diferenciáveis definido por

$$C^1[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}; \ f \text{ é diferenciável em } [a,b] \text{ e } f' \in C[a,b]\}.$$

Sabemos que $C^1[a,b]$ é subespaço vetorial de $C[a,b]$. No entanto $C^1[a,b]$ não é fechado[1] em $C[a,b]$ na norma $\|.\|_\infty$ e portanto, pelo Teorema 2.1.2, não é completo. Para provar a completude, consideremos em $C^1[a,b]$ a norma definida por

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Afirmamos que $C^1[a,b]$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{C^1}$. Primeiramente vejamos que $\|.\|_{C^1}$ é uma norma em $C^1[a,b]$. De fato, $\|f\|_{C^1} \geq 0$, pois

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Por outro lado, $\|f\|_{C^1} = 0$ se, somente se, $f = 0$. Com efeito, suponha primeiro que

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| = 0.$$

Disto segue que $|f(x)| = 0$ e $|f'(x)| = 0$, o que implica $f = 0$. Por outro lado, se $f = 0$ então $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| = 0$. Pela definição da norma $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 0$.

Além disso, se $a \in \mathbb{K}$ e $f \in C^1[a,b]$, então

$$\|af\|_{C^1} = \|af\|_\infty + \|af'\|_\infty = |a|\|f\|_\infty + |a|\|f'\|_\infty = |a|(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) = |a|\|f\|_{C^1}.$$

Mais ainda, se $f, g \in C^1[a,b]$, então

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{C^1} &= \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) + (\|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty) \\ &= (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) + (\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty) = \|f\|_{C^1} + \|g\|_{C^1}. \end{aligned}$$

[1]A prova desta afirmação pode ser encontrada em ((BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012), p.34, Exemplo 2.4.4)

Portanto, $\|.\|_{C^1}$ é uma norma em $C^1[a,b]$.

Agora mostraremos que $(C^1[a,b],\|.\|_{C^1})$ é completo. Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $C^1[a,b]$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_{C^1} < \varepsilon$, para todo $m,n \geq n_0$. Como $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$ e $\|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$ para todo $f \in C^1[a,b]$, as sequências $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ são de Cauchy em $C[a,b]$ pois, para todo $m,n \geq n_0$, tem-se

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \|f_m - f_n\|_{C^1} < \varepsilon \text{ e } \|f_m' - f_n'\|_\infty \leq \|f_m - f_n\|_{C^1} < \varepsilon.$$

Como $C[a,b]$ é completo, existem $f,g \in C[a,b]$ tais que $f_n \longrightarrow f$ e $f_n' \longrightarrow g$. Agora basta mostrar que $f \in C^1[a,b]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt, \text{ para todo } x \in [a,b] \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$ em ambos os lados de (2.4), temos que

$$f(x) - f(a) = \lim_{n \longrightarrow \infty}(f_n(x) - f_n(a)) = \lim_{n \longrightarrow \infty}\int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n'(t)dt = \int_a^x g(t)dt.$$

Logo, concluímos que $f' = g$ e f' é contínua pois $g \in C[a,b]$. Mais ainda, f é diferenciável, ou seja, $f \in C^1[a,b]$ e, portanto, $C^1[a,b]$ é Banach com a norma $\|\cdot\|_{C^1}$.

Considere agora o espaço das funções duas vezes diferenciáveis definido por

$$C^2[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é diferenciável em } [a,b] \text{ e } f' \in C^1[a,b]\}.$$

De forma análoga ao que provamos para $C^1[a,b]$ temos que $C^2[a,b]$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^2} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty.$$

Também, $C^3[a,b]$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^3} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|f'''\|_\infty.$$

Argumentando desta forma sucessivamente tem-se que $C^k[a,b]$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(k)}\|_\infty,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $f^{(j)}$ denota a j-ésima derivada de f. Isto encerra nosso argumento sobre a completude de $C^k[a,b]$.

A partir de agora estaremos interessados no estudo da completude dos espaços de dimensão finita. De imediato sabemos que $\mathbb{K}^n$ é completo, para todo $n \in \mathbb{N}$, quando munido de uma das seguintes normas

$$\begin{aligned} \|(a_1,...,a_n)\|_1 &= |a_1|+\cdots+|a_n| \\ \|(a_1,...,a_n)\|_2 &= (|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ e} \\ \|(a_1,\ldots,a_n)\|_\infty &= \max\{|a_1|,\ldots,|a_n|\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

denominadas norma da soma, norma euclidiana e norma do máximo, respectivamente.

Estaremos interessados em mostrar que todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Para isso, relembremos primeiro que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial E são equivalentes se existem constantes $A,B>0$ tais que

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1, \text{ para todo } x \in E.$$

Além disso, se E é um espaço vetorial de dimensão finita então, pelo Teorema 1.1.6, quaisquer duas normas em E são equivalentes. A seguir será provado um resultado auxiliar que será necessário para demonstração de que todo espaço de dimensão finita é um espaço de Banach e para demonstração, no Capítulo 3, de que todo operador linear definido em um espaço normado de dimensão finita é contínuo.

Lema 2.1.5. *Seja $B=\{x_1,...,x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado E. Então existe uma constante $c>0$, que depende do conjunto B, tal que, para quaisquer escalares $a_1,...,a_n$, tem-se*

$$\|a_1x_1+\cdots+a_nx_n\| \geq c(|a_1|+\cdots+|a_n|). \tag{2.6}$$

Demonstração. Defina a aplicação

$$(a_1,\ldots a_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right\| \in \mathbb{R}.$$

A aplicação acima define uma norma em $\mathbb{K}^n$. Como o corpo de escalares que estamos considerando é $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ e em um espaço vetorial de dimensão finita quaisquer duas normas são equivalentes segue imediatamente a desigualdade em (2.6).

$\square$

No próximo teorema mostraremos que todo espaço de dimensão finita é um espaço de Banach.

Teorema 2.1.6. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E.*

Demonstração. Suponha que $dim(E) = n$. Sejam $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ uma base de E com $\|\beta_i\| = 1$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, e $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E. Assim, existem escalares $a_1^k, \cdots, a_n^k$ tais que $x_k = a_1^k\beta_1 + \cdots + a_n^k\beta_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $k, m \geq n_0$ tem-se $\|x_k - x_m\| < c\varepsilon$, em que c é a constante do lema anterior para B. Pelo Lema 2.1.5, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_m\| &= \|(a_1^k\beta_1 + \cdots + a_n^k\beta_n) - (a_1^m\beta_1 + \cdots + a_n^m\beta_n)\| \\
&= \|(a_1^k - a_1^m)\beta_1 + \cdots + (a_n^k - a_n^m)\beta_m\| \\
&\overset{(2.6)}{\geq} c(|a_1^k - a_1^m| + \cdots + |a_n^k - a_n^m|) \\
&= c\sum_{j=1}^{n} |a_j^k - a_j^m|. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

De (2.7) segue, para todo $k, m \geq n_0$, que

$$|a_j^k - a_j^m| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j^k - a_j^m| \leq \frac{1}{c}\|x_k - x_m\| < \frac{1}{c}(c\varepsilon) = \varepsilon.$$

Assim, $(a_j^k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j \leq n$. Como $\mathbb{K}$ é completo, $(a_j^k)_{k=1}^{\infty}$ é convergente e, por isso, existe $b_j \in \mathbb{K}$ tal que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} a_j^k = b_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j \leq n$. Defina $x = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$. Logo, $x \in E$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{k \longrightarrow \infty} \|x_k - x\| &= \lim_{k \longrightarrow \infty} \|(a_1^k\beta_1 + \cdots + a_n^k\beta_n) - (b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n)\| \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} \|(a_1^k - b_1)\beta_1 + \cdots + (a_n^k - b_n)\beta_n\| \\
&\leq \lim_{k \longrightarrow \infty} (|a_1^k - b_1|\|\beta_1\| + \cdots + |a_n^k - b_n|\|\beta_n\|) \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} (|a_1^k - b_1| + \cdots + |a_n^k - b_n|) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $x_k \longrightarrow x \in E$ e, portanto, E é Banach.

□

É importante observar que existem espaços vetoriais normados de dimensão infinita que não são espaços de Banach. Para comprovar este fato considere os seguintes conjuntos:

$$c_0 = \left\{(a_k)_{k=1}^{\infty};\ \lim_{k \longrightarrow \infty} a_k = 0,\ a_k \in \mathbb{K},\ \text{para todo } k \in \mathbb{N}\right\}. \qquad (2.8)$$

e

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0; \text{existe } \ k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0\}, \qquad (2.9)$$

isto é, c_0 é o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero e c_{00} é o espaço das sequências eventualmente nulas. Observe que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. Além disso, c_0 é um espaço normado munido da norma

$$\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|.$$

Afirmamos que c_0 é um espaço de Banach. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em c_0. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (a_n^k)_{k=1}^{\infty}$. Logo, para dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_{\infty} < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq n_0$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$|a_n^j - a_m^j| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}|a_n^k - a_m^k| = \|x_n - x_m\|_{\infty} < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Assim, a sequência de escalares $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$ e, como $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach, $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é convergente em $\mathbb{K}$. Logo existe $a^j \in \mathbb{K}$ tal que, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n^j = a^j$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Defina $x = (a^j)_{j=1}^{\infty}$. Assim, $x \in c_0$ e $x_n \longrightarrow x$ em c_0. De fato, fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.10), temos que $|a_n^j - a^j| \longrightarrow 0$ e, consequentemente, $\|x_n - x\|_{\infty} \longrightarrow 0$, ou seja, $x_n \longrightarrow x$. Mais ainda, $(x_n - x) \in c_0$. Além disso, como c_0 é um espaço vetorial, segue que $x = (x - x_n) + x_n \in c_0$ e, portanto, c_0 é um espaço de Banach.

Por outro lado, afirmamos que c_{00} não é um espaço de Banach. De fato, sejam

$$x_1 = (1,0,0,0,\ldots),\ x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right), \ldots, x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right), \ldots$$

elementos de c_{00}. Observe que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, pois dado $\varepsilon > 0$, escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, temos, para todo $m, n > n_0$, que

$$\|x_n - x_m\| = \left\|\left(0,0,0,\ldots,\frac{1}{m+1},\frac{1}{m+2},\frac{1}{m+3},\ldots,\frac{1}{n},0,0,0,\ldots\right)\right\| = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Mas $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não converge em c_{00}. De fato, suponha por absurdo que $x = (x^1, x^2, \ldots) \in c_{00}$ é o limite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Assim, existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que $x^i = 0$ quando $i \geq k$. Então, se $n \geq k$ teremos

$$\|x_n - x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - x| \geq \frac{1}{k}$$

contradizendo o fato de que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x. Assim, $x \notin c_{00}$ e, portanto, c_{00} é um subespaço não-fechado de c_0. Do Teorema 2.1.2, temos que c_{00} não é um espaço de Banach.

2.2 Os Espaços ℓ_p

Nesta seção, estudaremos dois importantes espaços de sequências para Análise Funcional: os espaços ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ e o espaço ℓ_∞. De maneira geral, mostraremos que estes conjuntos são espaços de Banach.

Definição 2.2.1. *Para cada número real $p \geq 1$, definimos*

$$\ell_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty};\ a_j \in \mathbb{K} \textit{ para todo } j \in \mathbb{N} \textit{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\} \tag{2.11}$$

e, se $p = \infty$,

$$\ell_\infty = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty};\ a_j \in \mathbb{K} \textit{ para todo } j \in \mathbb{N} \textit{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty \right\}. \tag{2.12}$$

Os conjuntos ℓ_p e ℓ_∞ são espaços vetoriais com as operações usuais de sequências. Mais precisamente, ℓ_p é o espaço das sequências $p-$ somáveis de escalares e será munido com a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e ℓ_∞ é o espaço das sequências limitadas de escalares e será munido com a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|. \tag{2.13}$$

Para mostrar que ℓ_p e ℓ_∞ são espaços de Banach, mostraremos primeiro alguns resultados que serão necessários para alcançar nossos objetivos, à saber, as desigualdades de Young, Hölder e Minkowski.

Teorema 2.2.2 (Desigualdade de Young[2]). *Sejam $a, b > 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha < 1$, e considere a função $f(t) = t^\alpha - \alpha t$, definida para cada $t > 0$. Então

$$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha = \alpha \left(\frac{1}{t^{1-\alpha}} - 1 \right) \text{ e } f''(t) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^{2-\alpha}}.$$

Como $f'(1) = 0$ e $f''(1) < 0$, segue que $t = 1$ é ponto de máximo de $f(t)$ e disto,

$$t^\alpha - \alpha t = f(t) \leq f(1) = 1 - \alpha, \text{ para todo } t > 0.$$

Desta desigualdade segue que $t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha)$, para todo $t > 0$. Tomando $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$, com $p \geq 1$, e sabendo que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, temos que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{a}{b}\right) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}\frac{a}{b} + \frac{1}{q}. \tag{2.14}$$

[2]Os números $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ são chamados conjugados

Multiplicando ambos os lados de (2.14) por b, vem que

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} = \frac{a^{\frac{1}{p}}}{b^{-\frac{1}{q}}} = \frac{a^{\frac{1}{p}}}{b^{\frac{1}{p}-1}} \leq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

□

Teorema 2.2.3. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p,q > 1$ tais que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Então*

$$\sum_{j=1}^{n}|a_jb_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{K}$ e $b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Denotaremos $\beta = \sum_{k=1}^{n}|a_k|^p$ e $\gamma = \sum_{k=1}^{n}|b_k|^q$. Utilizando a desigualdade de Young para $\dfrac{|a_j|^p}{\beta}$ e $\dfrac{|b_j|^q}{\gamma}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, com $1 \leq j \leq n$, temos que:

$$\frac{|a_jb_j|}{\beta^{\frac{1}{p}}\gamma^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{|a_j|^p}{\beta}+\frac{1}{q}\frac{|b_j|^q}{\gamma}.$$

Disto, segue que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}|a_jb_j|}{\beta^{\frac{1}{p}}\gamma^{\frac{1}{q}}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{|a_jb_j|}{\beta^{\frac{1}{p}}\gamma^{\frac{1}{q}}} \leq \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p}\frac{|a_j|^p}{\beta}+\frac{1}{q}\frac{|b_j|^q}{\gamma} = \frac{1}{p}\frac{\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p}{\beta}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q}{\gamma} = \frac{1}{p}\frac{\beta}{\beta}+\frac{1}{q}\frac{\gamma}{\gamma} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

Como $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$, tem-se $\sum_{j=1}^{n}|a_jb_j| \leq \beta^{\frac{1}{p}}\gamma^{\frac{1}{q}}$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j.b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Teorema 2.2.4 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$. Então*

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para quaisquer escalares $a_1,\ldots,a_n$ e $b_1,\ldots,b_n$.

Demonstração. Primeiro, observe que utilizando a desigualdade triangular tem-se que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p &= \sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}|a_j+b_j| \leq \sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}(|a_j|+|b_j|)\\ &= \sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}|a_j|+\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}|b_j|. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder, segue que

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}|a_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.16}$$

Como $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, vale que $p=q(p-1)$. Disto e de (2.16),

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}|a_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.17}$$

Do mesmo modo, da desigualdade de Hölder e de $p=q(p-1)$, teremos que

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}|b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.18}$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.15),

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p &= \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e, utilizando novamente o fato de que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

□

A seguir, utilizando a desigualdade de Minkowski, mostraremos que ℓ_p é um espaço de Banach.

Teorema 2.2.5. *ℓ_p é um espaço de Banach para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Sejam $x=(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $y=(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Logo,

$$\|x\|_p=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \|y\|_p=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Afirmação 1: $\|.\|_p$ é uma norma em ℓ_p.

De fato, basta verificar que as condições (1), (2), (3) e (4) da definição 1.1.3 são satisfeitas. Pela definição de $\|\cdot\|_p$, é evidente que $\|x\|_p \geq 0$, para todo $x \in \ell_p$. Também,

$$\|x\|_p = 0 \text{ se, somente se, } \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0, \text{ o que implica } |x_j|^p = 0.$$

Assim, $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, se $\alpha \in \mathbb{K}$, então, para todo $x, y \in \ell_p$, tem-se

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha|^p|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (|\alpha|^p)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p.$$

Por fim, pela desigualdade de Minkowski, para todo $x, y \in \ell_p$, segue que

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Portanto, $\|.\|_p$ é uma norma em ℓ_p.

Afirmação 2: ℓ_p é um espaço de Banach.

De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_p tal que $x_n = (x_j^n)_{j=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n \geq n_0$, tem-se

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^n - x_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Em particular, para cada $j \in \mathbb{N}$, tem-se que $|x_j^n - x_j^m| \leq \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$. Logo, $(x_j^n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ e, portanto, convergente para cada $j \in \mathbb{N}$, pois $\mathbb{K}$ é completo. Para todo $j \in \mathbb{N}$, considere $a_j = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_j^n$ e defina $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$. Devemos mostrar que $x \in \ell_p$ e que (x_j^n) converge a x. Com efeito, fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.19) temos que

$$\|x_n - x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^n - a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Assim, $x_n - x \in \ell_p$ e $\|x_n - x\| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Como ℓ_p é um espaço vetorial, segue que $x = (x - x_n) + x_n \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \longrightarrow 0$. Portanto, ℓ_p é um espaço de Banach.

□

Além disso, ℓ_∞ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$ definida em (2.13). De fato, tem-se que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em ℓ_∞. Por outro lado, pela definição de $B(X)$ e de ℓ_∞, vale que $\ell_\infty = B(\mathbb{N})$. Portanto, do Teorema 2.1.4 segue o resultado.

Também vale ressaltar que estudo dos espaços de Banach é muito maior do que o trabalhado aqui. Outros espaços importantes na literatura, como os espaços de Lebesgue e os espaços de Sobolev também são espaços de Banach. Porém, devido ao pouco tempo e para não extrapolar os objetivos deste trabalho optamos por trabalhar somente com os espaços de Banach apresentados aqui. Para o leitor interessado em aprofundar no tema sugerimos consultar (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012), (BREZIS, 2011), (KREYSZIG, 1989) e (OLIVEIRA, 2014).

2.3 Dimensão Finita e a Compacidade da Bola Unitária

A compacidade é um conceito fundamental que está associado a alguns dos principais resultados da Análise como, por exemplo, o Teorema de Weierstrass que garante existência de máximos e mínimos de funções contínuas em conjuntos compactos e a equivalência entre continuidade uniforme e continuidade para funções reais definidas em conjuntos compactos (veja (LIMA, 2010), p. 85, Teorema 10). Nesta seção, mostraremos que o conceito de compacidade está relacionado com a dimensão do espaço. Mais precisamente, mostraremos que a dimensão finita do espaço normado E implica na compacidade da bola unitária desse espaço. Fato este que, em geral, não é verdade em espaços de dimensão infinita e motiva a introdução do conceito de topologia fraca* (veja (BREZIS, 2011), Seção 3.4). Antes de tratar do resultado principal desta seção demonstraremos o seguinte resultado que relaciona conjuntos compactos com conjuntos fechados e limitados em espaços normados de dimensão finita.

Teorema 2.3.1. *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então os compactos em E são precisamente os conjuntos limitados e fechados.*

Demonstração. Por um lado temos, pelo Teorema 1.1.16 e Teorema 1.1.17, que conjuntos compactos em espaços métricos são sempre fechados e limitados.

Por outro lado, basta mostrar que todo conjunto fechado e limitado $K \subseteq E$ é compacto. Para isso, sejam E um espaço normado de dimensão finita m e $\{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base normalizada de E. Pelo Teorema 1.1.15, para mostrar que K é compacto basta mostrar que toda sequência em K admite subsequência convergente em K. Então, considere $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em K. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)} \in \mathbb{K}$ tais que $x_n = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(n)} e_j$.

Como K é limitado, existe $L > 0$ tal que $\|x_n\| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como $\mathbb{K}^m$ tem dimensão finita e em um espaço de dimensão finita quaisquer duas normas são equivalentes podemos considerar em $\mathbb{K}^m$ a norma da soma $\|\cdot\|_1$. Pelo lema 2.1.5, existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$L \geq \|x_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(n)} e_j \right\| \geq c \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j^{(n)}| \right) = c\|(a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})\|_1.$$

Assim, a sequência $((a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ é limitada em $\mathbb{K}^n$ pois $\|a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)}\| \leq \dfrac{L}{c}$.

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $((a_1^{(n)}, \cdots, a_m^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $((a_1^{(n_k)}, \ldots, a_m^{(n_k)}))_{k=1}^{\infty}$ convergente em $\mathbb{K}^m$. Seja $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$ o limite de $((a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ e denote $\sum_{j=1}^{m} a_j^{n_k} e_j = x_{n_k}$ e $\sum_{j=1}^{m} b_j e_j = b_0$. Disto, segue de

$$\begin{aligned} \|x_{n_k} - b_0\| &= \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j^{(n_k)} e_j - \sum_{j=1}^{m} b_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j^{(n_k)} - b_j| \overbrace{\|e_j\|}^{=1} = \sum_{j=1}^{m} |a_j^{(n_k)} - b_j| \\ &= \|(a_1^{(n_k)}, \cdots, a_m^{(n_k)}) - b\|_1 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, $x_{n_k} \longrightarrow b_0$. Como K é fechado temos que $b_0 \in K$ e, pelo Teorema 1.1.15, K é compacto.

$\square$

Seja E um espaço normado. Definimos a bola unitária fechada de E como o conjunto

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}.$$

O teorema a seguir mostra uma equivalência entre a compacidade da bola unitária fechada e o fato de E ter dimensão finita.

Teorema 2.3.2. *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta.*

Para demonstrar o Teorema 2.3.2 primeiro mostraremos o seguinte lema auxiliar.

Lema 2.3.3 (Lema de Riesz). *Sejam M um subespaço fechado próprio de um espaço normado E e $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \theta < 1$. Então existe $y \in E \setminus M$ tal que $\|y\| = 1$ e $\|y - x\| \geq \theta$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $y_0 \in E \setminus M$ e considere o número

$$d = dist(y_0, M) := \inf_{x \in M} \|y_0 - x\|.$$

Como M é fechado e $y_0 \notin M$, temos que $d > 0$. De fato, se fosse $d = 0$, pelo fato de M ser fechado deveríamos ter que $y_0 \in M$, o que é absurdo. Além disso, como $\dfrac{d}{\theta} > d$, podemos escolher $x_0 \in M$ tal que

$$\|y_0 - x_0\| \leq \frac{d}{\theta}. \tag{2.20}$$

Seja

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}.$$

Afirmação 1: $\|y\| = 1$ e $y \notin M$.

De fato,

$$\|y\| = \frac{\|y_0 - x_0\|}{\|y_0 - x_0\|} = 1.$$

Agora, suponha por absurdo que $y \in M$. Então, como M é um subespaço vetorial de E teríamos que

$$y_0 = \underbrace{\|y_0 - x_0\| y}_{\in M} + \underbrace{x_0}_{\in M},$$

e dessa forma $y_0 \in M$ o que seria um absurdo. Logo, $y \notin M$.

Afirmação 2: $\|y - x\| \geq \theta$.

De fato, seja $x \in M$. Como M é um subespaço vetorial de E, temos que $(x_0 + \|y_0 - x_0\| x) \in M$ e portanto, $\|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\| x)\| \geq d$. Por fim, de (2.20)

$$\begin{aligned}
\|y - x\| &= \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{\|y_0 - x_0 - (\|y_0 - x_0\| x)\|}{\|y_0 - x_0\|} = \frac{\|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\|) x\|}{\|y_0 - x_0\|} \\
&\geq \frac{d}{\|y_0 - x_0\|} \geq \theta.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração

□

Agora, utilizando o Lema de Riesz provaremos o Teorema 2.3.2.

Demonstração do Teorema 2.3.2: Seja E um espaço normado de dimensão finita. Como a bola fechada B_E é também limitada segue do Teorema 2.3.1 que B_E é compacta.

Reciprocamente, suponha que B_E é compacta e mostraremos que E tem dimensão finita. Para isso, suponha por absurdo que E tem dimensão infinita. Seja $x_1 \in E$ com $\|x_1\| = 1$. Como E tem dimensão infinita o subespaço $[x_1]$ gerado por x_1 é um subespaço próprio de E e como $[x_1]$ tem dimensão finita, pelo Teorema 2.1.6, $[x_1]$ é fechado em E.

Pelo Lema de Riesz com $\theta = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in E \setminus [x_1]$ com $\|x_2\| = 1$, tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

De forma análoga ao que fizemos para $[x_1]$, temos que o subespaço $[x_1, x_2]$ gerado por $\{x_1, x_2\}$ é próprio e fechado em E. Novamente pelo Lema de Riesz, existe $x_3 \in E \setminus [x_1, x_2]$ com $\|x_3\| = 1$, tal que

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \text{ e } \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Repetindo o argumento para o subespaço $[x_1, x_2, x_3]$ gerado por $\{x_1, x_2, x_3\}$, temos que $[x_1, x_2, x_3]$ é um subespaço próprio e fechado em E. Outra vez pelo Lema de Riesz, existe $x_4 \in E \setminus [x_1, x_2, x_3]$ com $\|x_4\| = 1$, tal que

$$\|x_4 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \ \|x_4 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \text{ e } \|x_4 - x_3\| \geq \frac{1}{2}.$$

Repetindo várias vezes esse procedimento, construímos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_E tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$$

sempre que $m \neq n$. Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de B_E que não possui subsequência convergente, logo B_E não é compacta, o que contradiz a hipótese. Portanto, a dimensão do espaço normado E deve ser finita.

$\square$

2.4 Espaços Separáveis

Nesta seção, estaremos interessados em estudar os espaços que tem a propriedade de terem um subconjunto enumerável e denso. Começaremos definindo o que se entende por espaço separável.

Definição 2.4.1. *Seja E um espaço normado. Dizemos que E é um espaço separável se E contém um subconjunto enumerável e denso*[3] *em E.*

A mesma definição se faz no caso geral em que E é um espaço métrico. O espaço $\mathbb{R}$ dos números reais, por exemplo, é separável uma vez que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

[3] Um conjunto M de um espaço métrico E é dito denso em E se $\overline{M} = E$, isto é, se para todo $x \in E$, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em M tal que $x_n \longrightarrow x$.

é enumerável e denso em $\mathbb{R}$. Também, o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é um espaço separável, uma vez que o conjunto $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}=\{a+bi;\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ é enumerável e denso em $\mathbb{C}$.

O teorema a seguir caracteriza uma classe de espaços normados que são separáveis, à saber, os espaços de dimensão finita.

Teorema 2.4.2. *Todo espaço normado de dimensão finita é separável.*

Demonstração. Provaremos o caso em que E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e o caso em que E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ segue por analogia. Sejam E um espaço normado de dimensão n e $\{x_1,\dots,x_n\}$ uma base de E. Defina

$$A=\{a_1x_1+\cdots+a_nx_n;\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Afirmamos que A é enumerável e denso em E. De fato, se $x\in E$, então existem $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$, tais que, $x=b_1x_1+\cdots+b_nx_n$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ podemos tomar $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Q}$ tais que

$$|a_j-b_j|<\frac{\varepsilon}{n\cdot\max\{\|x_1\|,\dots,\|x_n\|\}},\ j=1,\dots,n.$$

Se $y=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$, então $y\in A$ e

$$\begin{aligned}
\|y-x\| &= \|(a_1x_1+\cdots+a_nx_n-b_1x_1-\cdots-b_nx_n\|=\|(a_1-b_1)x_1+\cdots+(a_n-b_n)x_n\|\\
&\le |a_1-b_1|\|x_1\|+\cdots+|a_n-b_n|\|x_n\|\\
&\le \max\{\|x_1\|,\dots,\|x_n\|\}(|a_1-b_1|+\cdots+|a_n-b_n|)\\
&< \max\{\|x_1\|,\dots,\|x_n\|\}\left(\overbrace{\frac{\varepsilon}{n\cdot\max\{\|x_1\|,\dots,\|x_n\|\}}+\cdots+\frac{\varepsilon}{n\cdot\max\{\|x_1\|,\dots,\|x_n\|\}}}^{n\ termos}\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{n}+\cdots+\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto mostra que A é denso em E. A enumerabilidade de A segue da enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ e da dimensão finita de E. No caso em que E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ basta considerar $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ no lugar de $\mathbb{Q}$ no conjunto A.

□

Dado um subconjunto A de um espaço vetorial E, considere o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de A, denotado[4] por $[A]$, isto é, $[A]$ é o subespaço de E gerado por A. A seguir apresentaremos um resultado auxiliar que será importante para

[4]Na literatura matemática é comum encontrar a notação $span(A)$ para representar o conjunto $[A]$.

demonstrar a separabilidade de alguns espaços de Banach como, por exemplo, dos espaços ℓ_p das sequências p somáveis e do espaço c_0 das sequências de escalares que convergem para zero.

Lema 2.4.3. *Um espaço normado E é separável se, somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A]$ é denso em E.*

Demonstração. Primeiro, suponha que E é separável. Então, pela definição de separabilidade existe um subconjunto $A \subset E$ tal que A é enumerável e denso em E. Seja $[A]$ o subespaço de E gerado por A

Afirmação 1: $[A]$ é denso em E.

De fato, por um lado temos que $A \subset [A]$, e disto $E = \overline{A} \subset \overline{[A]}$. Por outro lado, se $A \subset E$ então $[A] \subset [E] = E$ e, com isso, $\overline{[A]} \subset \overline{E} = E$. Logo, $E = \overline{[A]}$ e, portanto, $[A]$ é denso em E.

Agora, suponha que existe um subconjunto enumerável A de E tal que $[A]$ é denso em E.

Afirmação 2: E é separável.

Com efeito, seja

$$B = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n;\ x_i \in A,\ a_i \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}},\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N}\},$$

isto é, B é o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$, onde $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, quando E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$, respectivamente. Como $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é enumerável, segue que o conjunto das combinações lineares de n elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é enumerável para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, B é enumerável pois é a união enumerável de conjuntos enumeráveis.

Resta mostrar que B é denso em E. consideremos $x \in E$ e $\varepsilon > 0$. Da densidade de $[A]$ em E, dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $y_0 \in [A]$ tal que $\|x - y_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Suponha que $y_0 = \sum_{i=1}^{k} b_i x_i$, onde $b_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in A$, para $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$, e $k \in \mathbb{N}$. Além disso, da densidade de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ em $\mathbb{K}$, existem $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tais que

$$|a_j - b_j| < c_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|\right)}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{2.21}$$

Observe que

$$c_\varepsilon \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| = \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|\right)} \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|}{\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|\right)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.22}$$

Agora, seja $y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$. Logo, $y \in B$ e, utilizando a desigualdade triangular e as desigualdades em (2.21) e (2.22), tem-se que

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &= \|(x-y_0)+(y_0-y)\| \leq \|x-y_0\| + \|y_0-y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{i=1}^{k} b_i x_i - \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \right\| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} |b_i - a_i| \|x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{j\in\mathbb{N},\ 1\leq j\leq k} |b_j - a_j| \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \\
&\overset{(2.21)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + c_\varepsilon \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \overset{(2.22)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto prova que toda bola centrada em algum $x \in E$ contém ponto $y \in B$. Assim, B é denso em E. Portanto, E é um espaço separável.

□

Os dois resultados apresentados a seguir mostram exemplos de espaços normados importantes em Análise Funcional que são separáveis.

Exemplo 2.4.4. *O espaço c_0 das sequências de escalares que convergem para zero definido em (2.8) é separável. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a sequência e_n cujas coordenadas são nulas exceto a enésima coordenada que é 1, isto é $e_n = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$.*

Defina $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$. Se mostrarmos que $[A]$ é denso em c_0, então o resultado segue pelo Lema 2.4.3. Sejam $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset [A]$, onde $x_k = \sum_{j=1}^{k} a_j e_j$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\longrightarrow\infty} \|x-x_k\|_\infty &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{k} a_j e_j \right\|_\infty = \lim_{k\longrightarrow\infty} \|(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1},\cdots) - (a_1,a_2,\cdots,a_k)\|_\infty \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} \|(0,0,\cdots,0,a_{k+1},a_{k+2},a_{k+3},\cdots)\|_\infty = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sup_{j>k} |a_j| = 0,
\end{aligned}$$

pois, pela definição de c_0, tem-se que $\lim_{j\longrightarrow\infty} a_j = 0$, Logo, $x_k \longrightarrow x$ em c_0. Portanto, $[A]$ é denso em c_0 e, pelo Lema 2.4.3, segue que c_0 é separável.

Exemplo 2.4.5. *Para cada $1 \leq p < \infty$, o espaço l_p é separável. A demonstração segue os passos do exemplo anterior trocando a norma de c_0 pela norma em ℓ_p. Com efeito, se $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p$ e $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é a sequência definida no exemplo anterior, então*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|x-x_k\|_p = \lim_{k\longrightarrow\infty} \|(0,0,\cdots,0,a_{k+1},a_{k+2},a_{k+3},\cdots)\|_p = \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

pois $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p$ é uma série convergente. Portanto, procedendo com a mesma ideia da prova da separabilidade de c_0, temos que l_p é separável.

Outros espaços importantes em Análise Funcional são separáveis como, por exemplo, o espaço $C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ f$ é contínua em $[a,b]\}$ e o espaço c_{00} das sequências eventualmente nulas definido em (2.9). Com efeito, pelo Teorema 1.1.20, a separabilidade de $C[a,b]$ segue da compacidade de $[a,b]$ e da separabilidade de $\mathbb{R}$. Outra forma de demonstrar a separabilidade de $C[a,b]$ é utilizar o Teorema da Aproximação de Weierstrass para mostrar que o conjunto dos polinômios é um subconjunto enumerável e denso em $C[a,b]$. Para conhecimento desta demonstração veja ((BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012), p. 17). Por outro lado, a separabilidade de c_{00} segue do Teorema 1.1.19 e da separabilidade de c_0.

Cabe questionar se o resultado do Teorema 2.4.2 se estende para espaços de dimensão infinita, isto é, se todo espaço de dimensão infinita é separável. Como é de se esperar a resposta é negativa, ou seja, existem espaços de dimensão infinita que não são separáveis. O espaço l_∞ das sequências limitadas de escalares definido em (2.12) não é separável. Seja $A = (x^n)_{n=1}^{\infty}$ um subconjunto enumerável de l_∞, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x^n = (a_1^n, a_2^n, \ldots)$. Mostraremos que A não é denso em l_∞. Para isto, para cada $j \in \mathbb{N}$, defina

$$b_j = \begin{cases} a_j^j + 1, & \text{se} \quad |a_j^j| \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad |a_j^j| > 1 \end{cases}.$$

Observe que $b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in l_\infty$, uma vez que $\|b\|_\infty \leq 2$. Além disso, para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$\begin{cases} \text{se } |a_j^j| \leq 1, \text{ então } |b_j - a_j^j| = |(a_j^j + 1) - a_j^j| = 1, \\ \text{se } |a_j^j| > 1, \text{ então } |b_j - a_j^j| = |0 - a_j^j| = |a_j^j| > 1, \end{cases}$$

ou seja, $|b_j - a_j^j| \geq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Disto, $\|b - x_n\|_\infty = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |b_j - a_j^n| \geq |b_j - a_j^j| \geq 1$.

Assim, $b \notin \overline{A}$ e, consequentemente, A não é denso em ℓ_∞. Portanto, ℓ_∞ não é separável.

CAPÍTULO 3

OPERADORES LINEARES EM ESPAÇOS DE BANACH

Neste capítulo, estudaremos os conceitos e propriedades dos operadores lineares em espaços de Banach. Entre os principais resultados que abordaremos destacam-se: O Princípio da Limitação Uniforme, O Teorema de Banach-Steinhaus, O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. Ao longo deste capítulo os conjuntos

$$B_E[x_0,r] = \{x \in E;\ \|x - x_0\| \leq r\} \text{ e } B_E(x_0,r) = \{x \in E;\ \|x - x_0\| < r\}$$

denotam, respectivamente, a bola fechada em E de centro x_0 e raio r e a bola aberta em E de centro x_0 e raio r, onde E é um espaço de Banach.

Os principais resultados deste capítulo se baseiam nos trabalhos de (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012), (OLIVEIRA, 2014), (KREYSZIG, 1989) e suas referências bibliográficas.

3.1 Operadores Lineares Contínuos

Nesta seção, estudaremos as propriedades dos operadores lineares definidos em espaços de Banach. Para isso, sejam E e F espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $T : E \longrightarrow F$ é um operador linear contínuo se:

(1) T é linear, isto é,

$$T(ax+y) = aT(x) + T(y) \quad \text{para todo} \quad x,y \in E \ \text{ e todo } \ a \in \mathbb{K}.$$

(2) T e contínuo, isto é, se para todo $x_0 \in E$ e todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in E$ com $\|x - x_0\| < \delta$ tem-se que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$.

É verdade, do estudo das funções entre espaços métricos, que toda função uniformemente contínua é uma função contínua. Porém, em geral, a recíproca não é verdadeira. De fato, a função $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é uniformemente contínua[1]. O seguinte resultado caracteriza os operadores lineares e contínuos em espaços normados e mostra a equivalência dos conceitos de continuidade e continuidade uniforme para tais operadores.

Teorema 3.1.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *T é lipschitziano.*
(ii) *T é uniformemente contínuo.*
(iii) *T é contínuo.*
(iv) *T é contínuo em algum ponto de E.*
(v) *T é contínuo na origem.*
(vi) $\sup\limits_{x\in E;\ \|x\|\leq 1} \|T(x)\| < \infty$.
(vii) *Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração.[2] Para mostrar a equivalência das afirmações basta provar que as implicações $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (v) \implies (vi) \implies (vii) \implies (i)$ são verdadeiras.

• Prova de $(i) \implies (ii)$: Seja $T : E \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação Lipschitziana com constante de Lipschitz $C > 0$. Vamos mostrar que T é uniformemente contínua. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ e considere $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Logo, para todo $x, y \in X$, com $\|x - y\| < \delta$, tem-se

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\| < C\delta = \varepsilon.$$

Portanto, T é uniformemente contínua.

• Prova de $(ii) \implies (iii)$: Evidentemente toda aplicação uniformemente contínua é, em particular, uma aplicação contínua para a qual a escolha de δ a partir do ε dado é independente do ponto onde se analisa a continuidade.

• Prova de $(iii) \implies (iv)$: É consequência direta da definição de continuidade.

• Prova de $(iv) \implies (v)$: Por hipótese, T é contínuo em algum ponto de E. Suponha T contínuo em $x_0 \in E$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon \ \text{ sempre que } \ \|x - x_0\| < \delta.$$

[1] Para demonstração desta afirmação veja ((LIMA, 2014), p. 85)

[2] Ao longo da demonstração o símbolo $(a) \implies (b)$ significa que a afirmação (a) implica na afirmação (b).

Seja $x \in E$ tal que $\|x-0\| = \|x\| < \delta$. Observe que $\|x\| < \delta$ implica que $\|(x+x_0)-x_0\| < \delta$. Assim,

$$\|T(x)-T(0)\| = \|T(x)-0\| = \|T(x)\| = \|T(x)+T(x_0)-T(x_0)\| < \varepsilon,$$

ou seja, mostramos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)-T(0)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x-0\| < \delta$. Portanto, T é contínua na origem.

• Prova de $(v) \implies (vi)$**:** Da continuidade do operador T na origem, tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| = \|x-0\| < \delta$ implica que $\|T(x)-T(0)\| < 1$, para todo $x \in E$ com $\|x\| < \delta$. Além disso, da linearidade de T, tem-se que $T(0) = 0$ e

$$\|T(x)\| = \|T(x)-0\| = \|T(x)-T(0)\| < 1.$$

Se $\|x\| \leq 1$, então $\left\|\frac{\delta}{2}x\right\| = \frac{\delta}{2}\|x\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e, disto,

$$\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \left\|\frac{\delta}{2}T(x)\right\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| < 1. \tag{3.1}$$

Assim, temos que $\|T(x)\| < \frac{2}{\delta}$ e, portanto, $\sup\limits_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.

• Prova de $(vi) \implies (vii)$**:** Para cada $x \in E$, com $x \neq 0$, definindo $y = \frac{x}{\|x\|}$ é evidente que $\|y\| = 1$. Denotando $C = \sup\limits_{y \in E,\ \|y\| \leq 1} \|T(y)\|$ segue que $\|T(y)\| \leq C$, para todo $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Disto e da linearidade do operador T tem-se que

$$\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\|x\|\right)\right\| = \left\|\|x\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\|x\| = \|T(y)\|\|x\| \leq C\|x\|.$$

O caso $x = 0$ é imediato uma vez que $T(0) = 0$.

• Prova de $(vii) \implies (i)$**:** Se existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in E$, então, da linearidade do operador T, para todo $x_1, x_2 \in E$, tem-se que

$$\|T(x_1)-T(x_2)\| = \|T(x_1-x_2)\| \leq C\|x_1-x_2\|,$$

e, portanto, T é lipschitziano.

$\square$

Uma das principais consequências do teorema acima está no fato de que para mostrar que uma função linear é contínua é suficiente mostrar a continuidade desta função em um único ponto.

Segundo Botelho, Pellegrino e Teixeira (2012, p. 26), "[...] os operadores lineares contínuos são exatamente aqueles que transformam conjuntos limitados no domínio em conjuntos limitados no contradomínio. Por isso, os operadores lineares contínuos são muitas vezes chamados de operadores lineares limitados."

Neste caso, é importante estar clara a diferença entre os conceitos de função limitada e operador linear limitado, a saber: uma função f é dita limitada se tem imagem limitada. Já um operador linear T é dito limitado se transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados, isto é, se existe uma constante $C > 0$, tal que, $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in D(T)$[3]. Assim, quando não causar confusão, os operadores lineares contínuos podem ser denominados operadores lineares limitados.

Exemplo 3.1.2. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\in l_p$ e considere o operador $T : l_\infty \longrightarrow l_p$ dado por*

$$T((a_j)_{j=1}^{\infty}) = (a_j b_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Observe que T é linear devido as operações com sequências. Além disso, como

$$\|T(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{1 \leq j \leq \infty} |a_j| = \|(b_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty,$$

para toda sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_\infty$. Logo, T é contínuo e tem-se $\|T(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = C\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty$.

O seguinte resultado, que é consequência imediata do Teorema 3.1.1, fornece uma condição necessária e suficiente para que um operador linear bijetor T seja um isomorfismo.

Corolário 3.1.3. *Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear bijetor entre espaços normados. Então T é um isomorfismo se, e somente se, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Suponha que T é um isomorfismo. Então T é contínuo e existe $C_2 > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C_2\|x\|$. Por outro lado, como T^{-1} é contínuo, pelo item (vii) do Teorema 3.1.1 existe $C > 0$ tal que $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq C\|T(x)\|$. Logo, basta tomar $C_1 = C^{-1}$. A recíproca é consequência imediata do Teorema 3.1.1. □

Uma pergunta que surge neste ponto é se todo operador linear definido em um espaço normado é contínuo. No caso em que o espaço normado tem dimensão finita a resposta é afirmativa. De fato, sejam E um espaço normado de dimensão finita n, F espaço normado e

[3] $D(T)$ denota o domínio do operador T.

$T : E \longrightarrow F$ um operador linear. Seja $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de E. Logo, se $x \in E$, podemos escrever $x = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$, onde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Da linearidade de T e da desigualdade triangular temos que

$$\|T(x)\| = \|T(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n)\| \leq |a_1|\|T(u_1)\| + \cdots + |a_n|\|T(u_n)\| \leq M\sum_{i=1}^{n}|a_i|, \tag{3.2}$$

onde $M = \max\limits_{1\leq i\leq n}\|T(u_i)\|$. Pelo Lema 2.1.5, existe uma constante $c > 0$, tal que, $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i| \leq c\|x\|$. Disto e da desigualdade em (3.2) segue que existe uma constante $C > 0$, tal que, $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in E$ e, do Teorema 3.1.1, temos que T é contínuo.

Por outro lado, a mesma afirmação não pode ser feita para operadores lineares definidos em espaços normados de dimensão infinita, ou seja, existem operadores lineares em espaços de dimensão infinita que não são contínuos. De fato, seja $P[0,1]$ o conjunto de todas as funções polinomiais definidas no intervalo $[0,1]$. Como toda função polinomial é contínua, segue que $P[0,1]$ é um subespaço vetorial de $C[0,1]$ com as operações usuais de soma de funções e produto de uma função por um escalar. Além disso, $P[0,1]$ é um espaço vetorial normado com a norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$ herdada de $C[0,1]$. Seja $T : P[0,1] \longrightarrow P[0,1]$ o operador derivada de f definido por

$$T(f) = f'.$$

Observe que T é linear. Com efeito, se $f, g \in P[0,1]$ e $a \in \mathbb{K}$, então

$$T(f + ag) = (f + ag)' = f' + ag' = T(f) + aT(g).$$

Além disso, T não é contínuo. Se fosse, pelo Teorema 3.1.1, existiria uma constante $C \geq 0$, tal que, $\|T(f)\|_\infty < C\|f\|_\infty$ para todo $f \in P[0,1]$. Seja $f_n(t) = t^n$, com $t \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$. É evidente que $f_n \in P[0,1]$ e, assim, $f_n'(t) = nt^{n-1}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$n = \|f_n'\|_\infty = \|T(f_n)\|_\infty \leq C\|f_n\|_\infty = C.$$

Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, temos que C é um número não fixado, o que é impossível. Logo T não é contínuo.

Agora, sejam E e F espaços de Banach. Denotaremos por $\mathscr{L}(E,F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F, isto é,

$$\mathscr{L}(E,F) = \{T : E \longrightarrow F;\ \text{T é linear e contínuo}\}.$$

É fácil ver que $\mathscr{L}(E,F)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de funções e produto de funções por um escalar.

Quando F é o corpo $\mathbb{K}$ dos escalares, o espaço $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, denotado por E', é denominado dual topológico de E, ou simplesmente dual de E e dizemos que seus elementos são funcionais lineares contínuos. O próximo resultado mostra que $\mathscr{L}(E,F)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|T\| = \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)\| \tag{3.3}$$

desde que F seja um espaço Banach.

Teorema 3.1.4. *Sejam E e F espaços normados. $\mathscr{L}(E,F)$ é um espaço de Banach se F for um espaço de Banach.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em partes segundo as afirmações a seguir:

Afirmação 1: $\|T\| = \sup\limits_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)\|$ define uma norma em $\mathscr{L}(E,F)$.

Para provar esta afirmação mostraremos que as condições da definição 1.1.3 são satisfeitas. Com efeito,

(1) É imediato que $\|T\| = \sup\limits_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)\| \geq 0$.

(2) Suponha que $\|T\| = 0$. Logo, $\sup\limits_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)\| = 0$ o que implica que $\|T(x)\| = 0$ e, disto, $T(x) = 0$, para todo $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$. Se $x \in E$ é qualquer com $x \neq 0$ tem-se que $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = 0$, de onde segue que $\|T(x)\| = 0$ e, novamente, $T(x) = 0$. Por outro lado, se $T(x) = 0$ para todo $x \in E$, então $\|T(x)\| = 0$, para todo $x \in E$. Portanto, $\|T\| = 0$.

(3) Veja que, pelo fato de F ser um espaço normado, vale que $\|T(ax)\| = |a|\|T(x)\|$, para todo $T \in \mathscr{L}(E,F)$, todo $a \in \mathbb{K}$ e todo $x \in E$. Logo,

$$\|aT\| = \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|aT(x)\| = \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} |a|\|T(x)\| = |a| \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)\| = |a|\|T\|.$$

(4) Como F é um espaço normado, para todo $T,S \in \mathscr{L}(E,F)$ e todo $x \in E$, vale que $\|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\|$. Logo, para todo $T,S \in \mathscr{L}(E,F)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|T+S\| &= \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|(T+S)(x)\| = \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)+S(x)\| \leq \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} (\|T(x)\| + \|S(x)\|) \\
&= \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)\| + \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} \|S(x)\| \\
&= \|T\| + \|S\|
\end{aligned}$$

Portanto, $\|T\|$ define uma norma em $\mathscr{L}(E,F)$.

Afirmação 2: Para todo $T \in \mathscr{L}(E,F)$ e todo $x \in E$ tem-se $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$.

Se $x = 0$ a igualdade é imediata. Por outro lado, pela definição da norma, segue que $\|T(x)\| \leq \|T\|$, para todo $T \in \mathscr{L}(E,F)$ e todo $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$. Logo, para todo $x \in E$ com $x \neq 0$,

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\|.$$

Disto e da linearidade de T vem, para todo $x \in E$ com $x \neq 0$, que

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Afirmação 3: Se F é um espaço de Banach, então $\mathscr{L}(E,F)$ é um espaço de Banach.

Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{L}(E,F)$. Mostraremos que existe $T \in \mathscr{L}(E,F)$, tal que, $T_n \longrightarrow T$. Com efeito, como $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, então para dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $m,n \geq n_0$ tem-se $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Pela Afirmação 2, para todo $x \in E$, tem-se que,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|. \tag{3.4}$$

Logo, para cada $x \in E$ fixo, $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em F. Como F é um espaço de Banach, $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F. Para cada $x \in E$, defina o operador $T : E \longrightarrow F$ por $T(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} T_n(x)$. Provaremos que $T_n \longrightarrow T$ em $\mathscr{L}(E,F)$. Primeiro, afirmamos que T é Linear. Com efeito, da linearidade de T_n e das propriedades de limite tem-se, para todo $x_1, x_2 \in E$ e $\beta \in \mathbb{K}$, que

$$T(x_1 + \beta x_2) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x_1 + \beta x_2) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x_1) + \beta \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x_2) = T(x_1) + \beta T(x_2).$$

Por outro lado, fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (3.4), para todo $x \in E$ e $n \geq n_0$, obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon\|x\|. \tag{3.5}$$

Em particular, $\|(T_{n_0} - T))(x)\| < \varepsilon\|x\|$. Disto e do Teorema 3.1.1 segue que $(T - T_{n_0}) \in \mathscr{L}(E,F)$. Já que $\mathscr{L}(E,F)$ é um espaço vetorial, escrevendo $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0}$, vem que $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Além disso, da equação (3.5), vale que

$$\|T_n - T\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|(T_n - T)(x)\| < \varepsilon.$$

Assim, $T_n \longrightarrow T \in \mathscr{L}(E,F)$ e, portanto, $\mathscr{L}(E,F)$ é um espaço de Banach.

$\square$

É importante observar que se E e F são espaços normados e $T : E \longrightarrow F$ é um operador linear contínuo, então as expressões

$$\|T\| = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}, \; \|T\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|T(x)\| \text{ e } \|T\| = \inf\{C \in \mathbb{R};\; \|T(x)\| \leq C\|x\|,\; \forall x \in E\}$$

definem uma norma em E equivalente a norma dada em (3.3). Para uma demonstração desta afirmação sugerimos consultar ((KREYSZIG, 1989), p. 92).

Como aplicação do Teorema anterior podemos mostrar que o dual E' de qualquer espaço normado E é um espaço de Banach. De fato, sabemos que o dual E é definido como o espaço de todos os funcionais lineares contínuos definidos em E, isto é, $E' = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. Como $\mathbb{K}$ é completo, pelo Teorema 3.1.4, segue que E' é um espaço de Banach.

Por outro lado, pode-se mostrar como aplicação do Teorema de Hahn-Banach que se $E \neq \{0\}$ e $\mathscr{L}(E,F)$ é um espaço de Banach, então F é um espaço de Banach, o que juntamente com o Teorema 3.1.4 mostra uma condição necessária e suficiente para que $\mathscr{L}(E,F)$ seja um espaço de Banach. O resultado em questão não será demonstrado neste trabalho uma vez que utiliza o Teorema de Hahn-Banach e, por isso, foge aos objetivos deste trabalho. Porém, ao leitor interessado em conhecer a demonstração deste resultado sugerimos consultar ((OLIVEIRA, 2014), p. 86, Proposição 12.6).

3.2 O Princípio da Limitação Uniforme e o Teorema de Banach-Steinhaus

Nesta seção, apresentaremos dois dos principais teoremas que fundamentam e estruturam a Análise Funcional, a saber: o Princípio da Limitação Uniforme e o Teorema de Banach-Steinhaus. Apesar da literatura os apresentarem como um único teorema, uma vez que um deles é consequência do outro, os apresentaremos separadamente para melhor entendimento e organização. Em termos gerais, o Princípio da Limitação Uniforme garante que uma sequência de operadores lineares é uniformemente limitada desde que seja pontualmente limitada. Já o Teorema de Banach-Steinhaus mostra que o limite de uma sequência convergente de operadores lineares contínuos é um operador linear contínuo. Para prova destes teoremas precisaremos de um importante resultado de topologia geral conhecido como Teorema de Baire e que será apresentado a seguir.

Teorema 3.2.1 (Baire). *Sejam (M,d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não-vazio.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $int(F_n) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $A_n = (F_n)^c = M \setminus F_n$. Logo, cada A_n é aberto e

$$\overline{A_n} = \overline{(F_n)^c} = (int(F_n))^c = \emptyset^c = M.$$

Assim, A_n é não vazio e cada A_n é denso em M. Logo, para todo $r > 0$ e $x \in M$ temos que $B(x,r) \cap A_n \neq \emptyset$. Seja $x_1 \in A_1$. Como A_1 é aberto podemos garantir a existência $0 < \delta_1 < 1$ tal que $B[x_1,\delta_1] \subset A_1$. Além disso, de $\overline{A_2} = M$ temos que $A_2 \cap B(x_1,\delta_1) \neq \emptyset$, pois sendo $\overline{A_1} = M = \overline{A_2}$ tem-se $B(x_1,\delta_1) \subset A_1 \subset M = \overline{A_2}$. Concluímos que $A_2 \cap B(x_1;\delta_1)$ é um aberto não vazio e, com isso, existem $x_2 \in A_2 \cap B(x_1,\delta_1)$ e $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$ tais que

$$B[x_2,\delta_2] \subseteq A_2 \cap B(x_1,\delta_1) \subseteq A_2 \cap B[x_1,\delta_1].$$

Repetindo sucessivamente este argumento, temos $\overline{A_{n-1}} = M = \overline{A_n}$ e, consequentemente, $A_n \cap B(x_{n-1},\delta_{n-1}) \neq \emptyset$. Segue que existem $x_n \in A_n \cap B(x_{n-1},\delta_{n-1})$ e $0 < \delta_n < \dfrac{1}{n}$ tais que $B[x_n,\delta_n] \subset A_n \cap B(x_{n-1},\delta_{n-1})$. Assim, construímos duas sequências, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ e $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, tais que $x_n \in A_n \cap B(x_{n-1},\delta_{n-1})$, $0 < \delta_n < \dfrac{1}{n}$,

$$B[x_1,\delta_1] \subset A_1 \text{ e } B[x_n,\delta_n] \subseteq A_n \cap B[x_{n-1},\delta_{n-1}] \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ com } n \geq 2. \tag{3.6}$$

Vamos mostrar que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ é uma sequência de Cauchy. Para isso, dado $\varepsilon > 0$ escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Se $m,n \geq n_0$, por (3.6), temos

$$B[x_n,\delta_n] \subseteq B[x_{n_0},\delta_{n_0}] \text{ e } B[x_m,\delta_m] \subset B[x_{n_0},\delta_{n_0}].$$

Sendo M um espaço métrico e $x_m, x_n, x_{n_0} \in M$, pela desigualdade triangular, teremos

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x_{n_0}) + d(x_n,x_{n_0}) \leq \delta_{n_0} + \delta_{n_0} = 2\delta_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em M. Como M é completo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente e existe $x \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como, para todo $m,n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$, $x_m \in B[x_m,\delta_m] \subseteq B[x_n,\delta_n]$ e $B[x_n;\delta_n]$ é um conjunto fechado, segue que $x \in B[x_n;\delta_n]$ e, consequentemente, $x \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c = M^c = \emptyset,$$

o que é um absurdo. Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(F_{n_0}) \neq \emptyset$. $\square$

A importância do Teorema de Baire em nosso contexto está na sua aplicação para demonstração do Princípio da Limitação Uniforme e do Teorema da Aplicação Aberta. O próximo resultado, conhecido por Princípio da Limitação Uniforme, é de extrema importância para a demonstração do Teorema de Banach-Steinhaus e, em essência, garante que se T é um operador linear pontualmente limitado definido em um espaço de Banach E, então T é uniformemente limitado. Segundo Oliveira (2014, p. 49), o Princípio da Limitação Uniforme dá condições para que o conjunto das normas de uma família de operadores lineares, de qualquer cardinalidade, tenha um limite superior finito.

Teorema 3.2.2 (Princípio da Limitação Uniforme[4]). *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma sequência de operadores em $\mathscr{L}(E,F)$ tal que*

$$\sup_{i\in I}\|T_i(x)\|<\infty, \text{ para todo } x\in E. \tag{3.7}$$

Então, $\sup_{i\in I}\|T_i\|<\infty$, isto é, existe uma constante real C, tal que, $\|T_i\|\leq C$, para todo $i\in I$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$A_n=\left\{x\in E;\ \sup_{i\in I}\|T_i(x)\|\leq n\right\}.$$

Afirmação 1: A_n é fechado.

De fato, seja $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em A_n tal que, $x_k\longrightarrow x\in E$. Provaremos que $x\in A_n$. Como $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência em A_n então $\sup_{i\in I}\|T_i(x_k)\|\leq n$ e, com isso, $\|T_i(x_k)\|\leq n$. Logo, utilizando o fato de T ser linear e contínua, tem-se que

$$\|T_i(x)\|=\left\|T_i\left(\lim_{k\to\infty}x_k\right)\right\|=\left\|\lim_{k\to\infty}T_i(x_k)\right\|=\lim_{k\to\infty}\|T_i(x_k)\|\leq n.$$

Disto, $\sup_{i\in I}\|T_i(x)\|\leq n$ e, consequentemente, $x\in A_n$. Portanto, A_n é fechado.

Afirmação 2: Existe uma constante $0<C<\infty$, tal que, $\sup_{i\in I}\|T_i\|\leq C$.

Com efeito, da condição (3.7) segue que $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Logo, pelo Teorema de Baire, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que A_{n_0} tem interior não-vazio. Sejam $a\in int(A_{n_0})$ e $r>0$ tais que $B[a,r]\subseteq int(A_{n_0})$. Logo, se $x=a+ry$, com $y\in E$ e $\|y\|\leq 1$, então

$$\|x-a\|=\|ry\|=\|r\|\|y\|\leq r.$$

[4]No Princípio da Limitação Uniforme, I denota um conjunto de índices.

Assim, $x \in B[a,r]$ e, com isso, $x \in A_{n_0}$. Disto, da linearidade de T_i, da desigualdade triangular e da definição de A_{n_0} segue, para todo $i \in I$, que

$$\|T_i(y)\| = \left\|T_i\left(\frac{x-a}{r}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{r}T_i(x-a)\right\| = \frac{1}{r}\|T_i(x-a)\| \leq \frac{1}{r}(\|T_i(x)\| + \|T_i(a)\|) \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Tomando $C = \dfrac{2n_0}{r}$, temos que $\|T_i\| = \sup\limits_{y \in E,\ \|y\| \leq 1} \|T_i(y)\| \leq C$ e, portanto, $\sup\limits_{i \in I} \|T_i\| < \infty$. $\square$

O próximo resultado, demonstrado por Stefan Banach (1892-1945) e Hugo Steinhaus (1887-1972) por volta de 1927, é uma consequência do Princípio da Limitação Uniforme e, em resumo, mostra que o limite T de uma sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ de operadores em $\mathscr{L}(E,F)$, sendo E um espaço de Banach e F um espaço normado, é um operador linear e contínuo.

Teorema 3.2.3 (Banach-Steinhaus). *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço normado. Se $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de operadores em $\mathscr{L}(E,F)$, tal que, para todo $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é converge para $T(x) \in F$, então, T é um operador linear e contínuo.*

Demonstração. Como $T_n \in \mathscr{L}(E,F)$, tem-se que T_n é linear e contínuo. Defina $T : E \longrightarrow F$ por

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x).$$

Afirmação 1: T é linear.

A linearidade de T é consequência direta da linearidade de T_n e das propriedades operatórias de limites. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x, y \in E$ e $\beta \in \mathbb{K}$, tem-se

$$T(x+\beta y) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x+\beta y) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (T_n(x) + \beta T_n(y)) = T(x) + \beta T(y).$$

Afirmação 2: T é contínuo.

De fato, por hipótese, para cada $x \in E$ a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F, logo $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é limitada em F. Assim, para todo $x \in E$, tem-se $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ e, pelo Princípio da Limitação Uniforme, $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T_n\| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso e da Afirmação 2 do Teorema 3.1.4, para todo $x \in E$ e todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq C\|x\|.$$

Assim, para todo $x \in E$,

$$\|T(x)\| = \left\|\lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x)\right\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} C\|x\| = C\|x\|,$$

e, portanto, pelo item (vii) do Teorema 3.1.1, concluímos que T é contínuo. Isso conclui a demonstração do teorema.

$\square$

De acordo com Oliveira (2014, p. 53), não há consenso na literatura sobre o que é chamado especificamente de Limitação Uniforme e Banach-Steinhaus, com as duas denominações usualmente apresentadas como sinônimos. Historicamente, uma primeira versão desses resultados foi devida a Hahn em 1922, mas para funcionais lineares contínuos e usava um argumento de contradição, a qual foi adaptada para operadores lineares contínuos entre espaços de Banach pelo próprio Banach em sua Tese. A demonstração através do Teorema de Baire é devida a Banach e Steinhaus em 1927.

Uma pergunta que surge neste ponto é se há necessidade do domínio E ser um espaço de completo no Princípio da Limitação Uniforme e no Teorema de Banach-Steinhaus. Para elucidar este fato, considere $E = \{x = (x_j) \in \ell_\infty(\mathbb{N});\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tal que}\ x_j = 0,\ \text{para todo}\ j \geq n_0\}$ munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$ definida em (2.13) e seja $T_n : E \longrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N})$ o funcional definido por

$$T_n(x) = nx_n.$$

Logo, T_{n_0} é linear e contínuo e $\|T_n\| = \sup\limits_{x \in E,\ \|x\| \leq 1} \|T_n(x)\| = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, considere uma sequência $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$. Se $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $x_j = 0$ para todo $j \geq n_0$, então $T_j(x) = 0$. Assim, para todo $x \in E$, temos que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |T_n(x)| < \infty$ mas $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$. Isso mostra que a condição de completude de E é de fato necessária e que o Princípio da Limitação Uniforme, e consequentemente o Teorema de Banach-Steinhaus, podem não valer caso o espaço não seja completo.

3.3 O Teorema da Aplicação Aberta

Nesta seção, apresentaremos um teorema que, juntamente com o Princípio da Limitação Uniforme, o Teorema de Banach-Steinhaus e o Teorema do Gráfico Fechado, se caracteriza como um dos pilares do estudo da Análise Funcional. Este resultado foi provado por Stefan Banach por volta de 1929 e é conhecido por Teorema da Aplicação Aberta. Antes de enunciar este teorema, definiremos o que se entende por uma aplicação aberta.

Definição 3.3.1. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Uma aplicação $T : E \longrightarrow F$ é dita aberta se sempre que U é um conjunto aberto de E, $T(U)$ é um conjunto aberto de F.*

A seguir enunciaremos o Teorema da Aplicação Aberta. Em suma, este resultado garante que, sob certas condições, um operador linear e contínuo definido em um espaço de Banach transforma um conjunto aberto em um conjunto aberto.

Teorema 3.3.2 (Aplicação Aberta). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta.*

Antes de tratar sobre a prova deste resultado, provaremos o seguinte lema auxiliar que será essencial para demonstração do Teorema da Aplicação Aberta.

Lema 3.3.3. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Se existem constantes $R > 0$ e $r > 0$ tais que $\overline{T(B_E(0,R))} \supseteq B_F(0,r)$, então $T(B_E(0,R)) \supseteq B_F(0,\frac{r}{2})$.*

Demonstração. Primeiro, do Teorema 1.1.11 e de $\overline{T(B_E(0,R))} \supseteq B_F(0,r)$ segue, para todo $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, que

$$\overline{T(B_E(0,aR))} \supseteq B_F(0,ar). \tag{3.8}$$

Mostraremos que todo elemento de $B_F(0,\frac{r}{2})$ é também um elemento de $T(B_E(0,R))$. Para isto, seja $y \in B_F(0,\frac{r}{2})$. Por (3.8), tem-se que $y \in \overline{T(B_E(0,\frac{R}{2}))}$, de onde existe $x_1 \in B_E(0,\frac{R}{2})$, tal que,

$$\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{4}, \text{ ou seja, } y_1 := y - T(x_1) \in B_F\left(0,\frac{r}{4}\right).$$

Como $y_1 \in B_F\left(0,\frac{r}{4}\right)$, novamente por (3.8), existe $x_2 \in B_E(0,\frac{R}{4})$ tal que

$$\|y_1 - T(x_2)\| < \frac{r}{8}, \text{ ou seja, } y_2 := y_1 - T(x_2) = y - T(x_1) - T(x_2) \in B_F\left(0,\frac{r}{8}\right).$$

Como a inclusão em (3.8) é verdadeira para todo número real $a > 0$, repetindo este argumento sucessivas vezes podemos construir uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_n \in B_E\left(0,\frac{R}{2^n}\right) \text{ e } \|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\| < \frac{r}{2^{n+1}}. \tag{3.9}$$

Note que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente pois, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|x_n\| < \frac{R}{2^n}$ e, disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{2^n} = R \text{ e } \left\|\sum_{j=n}^{m} x_j\right\| \leq \sum_{j=n}^{m} \|x_j\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ para } m > n.$$

Logo, $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E e, portanto, convergente em E, pois E é um espaço de Banach. Seja $x \in E$ tal que $x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_1\| + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} \|x_n\| < \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\| \\
&\leq \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{2^n} = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = R.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $x \in B_E(0,R)$. Por fim, da desigualdade em (3.9) e da linearidade de T, temos que

$$\begin{aligned}
\|y - T(x)\| &= \left\| y - T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \right\| = \left\| y - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} T(x_j) \right\| \\
&= \left\| y - \lim_{n\to\infty} (T(x_1) - T(x_2) - \cdots - T(x_n)) \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|y - T(x_1) - T(x_2) - \cdots - T(x_n)\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{r}{2^{n+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $y = T(x)$. Logo, $y \in T(B_E(0,R))$ e, portanto, $T(B_E(0,R)) \supset B_F(0, \frac{r}{2})$.

□

Agora, procederemos com a prova do Teorema da Aplicação Aberta.

Demonstração do Teorema 3.3.2: Seja $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_E(0,n)$. Como T é sobrejetiva temos

$$F = T(E) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0,n) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0,n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0,n))}.$$

Pelo teorema de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int\overline{T(B_E(0,n_0))} \neq \emptyset$. Logo, existem $a \in F$ e $r > 0$ tais que $\overline{T(B_E(0,n_0))} \supset B_F(a,r)$.

Afirmação 1: $\overline{T(B_E(0;n_0))}$ é simétrico.

De fato, seja $y \in T(B_E(0,n_0))$, então existe $x \in B_E(0,n_0)$ tal que $T(x) = y$. Como $x \in B_E(0,n_0)$, temos que $-x \in B_E(0,n_0)$, pois $B_E(0,n_0)$ é um conjunto simétrico. Como T é linear, segue que

$$-y = -T(x) = T(-x) \in T(B_E(0,n_0)).$$

Isso prova que $T(B_E(0,n_0))$ é simétrico. Como o fecho de um conjunto simétrico é um conjunto simétrico segue que $\overline{T(B_E(0;n_0))}$ é simétrico.

Afirmação 2: $\overline{T(B_E(0,n_0))}$ é convexo.

De fato, sejam $y_1, y_2 \in T(B_E(0,n_0))$ então existem $x_1, x_2 \in B_E(0,n_0)$ tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Como $B_E(0,n_0)$ é convexa, temos que $tx_1 + (1-t)x_2 \in B_E(0,n_0)$, para todo $t \in [0,1]$. Assim, da linearidade do operador T,

$$ty_1 + (1-t)y_2 = tT(x_1) + (1-t)T(x_2) = T(tx_1 + (1-t)x_2) \in T(B_E(0,n_0)).$$

Disso, $T(B_E(0,n_0))$ é convexo. Pelo Teorema 1.4.3, temos que $\overline{T(B_E(0,n_0))}$ é convexo.

Logo, se $B_F(a,r) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$ então $B_F(-a,r) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$ e, desta forma, $B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$. Disso e do Lema 3.3.3, segue que $T(B_E(0,n_0)) \supset B_F\left(0, \frac{r}{2}\right)$.

Agora, seja $U \subset E$ aberto. Mostraremos que $T(U)$ é aberto em F. Seja $y \in T(U)$. Então, existe $x \in U$ tal que $y = T(x)$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_E(x,\varepsilon) \subset U$. Assim, da linearidade de T, tem-se que

$$T(U) \supset T(B_E(x,\varepsilon)) = T(x + B_E(0,\varepsilon)) = T(x) + T(B_E(0,\varepsilon)). \tag{3.10}$$

Como T é linear e $T(B_E(0,n_0)) \supset B_F(0,\frac{r}{2})$, para todo $c > 0$ temos

$$T(B_E(0,cn_0)) \supset B_F\left(0, c\frac{r}{2}\right).$$

Tomando $c = \dfrac{\varepsilon}{n_0}$, segue que $T(B_E(0,\varepsilon)) \supset B_F\left(0, \frac{\varepsilon r}{2n_0}\right)$. Disso e de (3.10), tem-se

$$T(U) \supset T(x) + T(B_E(0,\varepsilon)) \supset y + B_F\left(0, \frac{\varepsilon r}{2n_0}\right) = B_F\left(y, \frac{\varepsilon r}{2n_0}\right).$$

Definindo $\delta = \dfrac{\varepsilon r}{2n_0} > 0$, segue que $B_F(y,\delta) \subset T(U)$ e, portanto, $T(U)$ é aberto. Isso prova o teorema.

$\square$

Uma importante consequência do Teorema da Aplicação Aberta é a garantia de que a inversa T^{-1} de um operador linear, contínuo e bijetivo entre espaços de Banach é contínua. Este fato será demonstrado no teorema a seguir.

Teorema 3.3.4. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear, contínuo e bijetivo. Então, T^{-1} é contínua.*

Demonstração. Pela sobrejetividade de T, segue do Teorema da Aplicação Aberta que T é uma aplicação aberta. Logo, sendo $A \subset E$ um conjunto aberto, temos que $T(A) \subset F$ é aberto. Como T é bijetiva, $T^{-1} : F \longrightarrow E$ existe e $(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$ é aberto em F. Portanto, T^{-1} é contínua. $\square$

Vale ressaltar que a hipótese de sobrejetividade do operador T é necessária no Teorema da Aplicação aberta, uma vez que se E e F são espaços normados, então toda aplicação aberta e linear $T : E \longrightarrow F$ é sobrejetiva. Fato este que não provaremos neste trabalho. Porém, ao leitor interessado em saber mais sobre o assunto sugerimos consultar (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012).

3.4 O Teorema do Gráfico Fechado

Sejam E e F espaços normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. O gráfico de T é o conjunto

$$G(T) = \{(x,y);\ x \in E \ \text{ e } \ y = T(x)\} \subseteq E \times F.$$

Note que $G(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$ com as operações usuais de soma de vetores e produto de um vetor por escalar. O resultado que apresentaremos a seguir é uma consequência do Teorema da Aplicação Aberta e, em essência, fornece uma condição necessária e suficiente para que o gráfico de um operador linear entre espaços de Banach seja fechado. Mais precisamente, o teorema mostra que para operadores lineares entre espaços de Banach, a continuidade de T é equivalente ao fato de $G(T)$ ser fechado.

Teorema 3.4.1 (Gráfico Fechado). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração. Por um lado, suponha que T é contínuo e provaremos que $G(T)$ é fechado. Defina a função $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \|T(x) - y\|.$$

Observe que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \{(x,y) \in E \times F : f(x,y) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in E \times F : \|T(x) - y\| = 0\} \\ &= \{(x,y) \in E \times F : T(x) - y = 0\} \\ &= \{(x,y) \in E \times F : T(x) = y\} \\ &= G(T). \end{aligned}$$

Como f é contínua e a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua é um conjunto fechado temos que $G(T)$ é fechado.

Reciprocamente suponha $G(T)$ fechado e provaremos que T é contínuo. Considere a aplicação $\pi : G(T) \longrightarrow E$ definida por

$$\pi(x, T(x)) = x.$$

Como π é a projeção sobre a primeira coordenada segue que π é linear e bijetora. Além disso, π é contínua, pois

$$\|\pi(T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1,$$

onde $\|\cdot\|_1$ é a norma da soma definida em (2.5). Do Teorema da Aplicação Aberta segue que π^{-1} é contínua e portanto existe $C > 0$ tal que $\|\pi^{-1}(x)\|_1 \leq C\|x\|$ o que implica $\|(x, T(x))\|_1 \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$. Assim,

$$\|T(x)\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Portanto, T é um operador contínuo. $\square$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, exploramos o campo dos operadores lineares em espaços de Banach, revelando propriedades fundamentais que permeiam essa área da Análise Funcional. Ao explorar operadores lineares em espaços de Banach, encontramos uma rica interseção entre Álgebra Linear, Análise Funcional e Topologia.

A teoria dos operadores lineares em espaços de Banach não apenas fornece ferramentas poderosas para a análise, mas também abre portas para a compreensão de fenômenos abstratos. Ao abordar questões relacionadas à convergência de sequências de operadores lineares, percebemos como a estrutura dos espaços de Banach pode ser aplicada de maneira eficaz.

Além disso, ressaltamos a importância dos teoremas fundamentais, tais como o Princípio da Limitação Uniforme, o Teorema do Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado, além dos outros estudados, que desempenham um papel central no estudo da propriedades dos operadores lineares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM, 1ª edição, 2012.*

BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer Verlag, 2011.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1989.

LIMA, E. L. *Análise Real. Coleção Matemática Universitária*. Rio de Janeiro: IMPA, v.1, 2014.

LIMA, E. L. *Curso de Análise. Projeto Euclides*. Rio de Janeiro: IMPA, v.1, 2010.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos. Projeto Euclides*. Rio de Janeiro: IMPA, v.1, 2014.

OLIVEIRA, C. R. d. *Introdução à Análise Funcional. Projeto Euclides*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.