INSTITUTO
FEDERAL
Goiano

Campus
Urutaí

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Campus Urutaí

HIAGO GONÇALVES DE SOUZA

Construções de Figuras Planas e Cálculos de Perímetros, Áreas e Volumes com régua e compasso e GeoGebra

Urutaí, 28/11/2023

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Campus Urutaí

Hiago Gonçalves de Souza

CONSTRUÇÕES DE FIGURAS PLANAS E CÁLCULOS DE PERÍMETROS, ÁREAS E VOLUMES COM RÉGUA E COMPASSO E GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Urutaí, para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Ricardo Gomes Assunção

Urutaí, 28/11/2023

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano

Souza, Hiago Gonçalves
SSO729 c
Construções de Figuras Planas e Cálculo de Perimétros, Áreas e Volumes com Régua e Compasso e GeoGebra / Hiago Gonçalves Souza; orientador Dr. Ricardo Gomes Assunção. -- Urutaí, 2023.
88 p.

TCC (Graduação em Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal Goiano, Campus Urutaí, 2023.

1. Áreas. 2. Construções geométricas. 3. Figuras planas. 4. GeoGebra. 5. Perı́metros. I. Assunção, Dr. Ricardo Gomes , orient. II. Título.

Responsável: Johnathan Pereira Alves Diniz - Bibliotecário-Documentalista CRB-1 n°2376

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO
PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano a disponibilizar gratuitamente o documento em formato digital no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

IDENTIFICAÇÃO DA PRODUÇÃO TÉCNICO-CIENTÍFICA

- [ ] Tese (doutorado)
- [ ] Dissertação (mestrado)
- [ ] Monografia (especialização)
- [x] TCC (graduação)
- [ ] Artigo científico
- [ ] Capítulo de livro
- [ ] Livro
- [ ] Trabalho apresentado em evento

- [ ] Produto técnico e educacional - Tipo:

Nome completo do autor:
Hiago Gonçalves de Souza

Matrícula:
2018101221230228

Título do trabalho:
Construções de Figuras Planas e Cálculos de Permetros, Áreas e Volumes com régua e compasso e GeoGebra

RESTRIÇÕES DE ACESSO AO DOCUMENTO

Documento confidencial: [x] Não [ ] Sim, justifique:

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: __ / __ / __
O documento está sujeito a registro de patente? [ ] Sim [ ] Não
O documento pode vir a ser publicado como livro? [ ] Sim [ ] Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O(a) referido(a) autor(a) declara:

• Que o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;

• Que obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autoria, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;

• Que cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Urutaí - GO — Local
11 / 12 / 2023 — Data

Hiago Gonçalves de Souza
Assinatura do autor e/ou detentor dos direitos autorais

Ciente e de acordo:
Ricardo Gomes Assunção
Assinatura do(a) orientador(a)

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Ata nº 177/2023 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulada Construções de Figuras Planas e Cálculos de Perímetros, Áreas e Volumes com Régua e Compasso e GeoGebra, sob orientação de Ricardo Gomes Assunção, apresentada pelo aluno Hiago Gonçalves de Souza (2018101221230228) do Curso Licenciatura em Matemática (Campus Urutaí). Os trabalhos foram iniciados às 14:02 pelo Professor presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

- Ricardo Gomes Assunção (Orientador)
- Agda Lovato Teixeira (Examinador Interno)
- Gilsimar Francisco de Souza (Examinador Externo)

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo do Trabalho de Conclusão de Curso, passou à arguição do candidato. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

[X] Aprovado [ ] Reprovado Nota: 9,5

Observação/ Apreciações:

Trabalho que mostra a evolução do aprendizado em geometria, mas que precisa de correções gramaticais, de estrutura e concepções teórico-metodológicas.

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu, Ricardo Gomes Assunção, lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Urutaí - GO, 28/11/2023

(Assinado Eletronicamente)
Ricardo Gomes Assunção
Orientador(a)

(Assinado Eletronicamente)
Agda Lovato Teixeira
Membro

(Assinado Eletronicamente)
Gilsimar Francisco de Souza
Membro

INSTITUTO FEDERAL GOIANO
Campus Urutaí
Rodovia Geraldo Silva Nascimento, Km 2.5, SN, Zona Rural, URUTAÍ / GO, CEP 75790-000
(64) 3465-1900

Agradecimentos

A Deus, pela minha vida, e por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso.

Aos meus pais e irmãos, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realizar o curso.

Aos colegas de curso, pois de uma certa forma todos contribuíram para essa formação. Aos professores do Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional.

Gostaria de deixar um agradecimento em especial ao meu orientador Ricardo Gomes Assunção pela paciência que teve em me orientar, não media esforço para sanar minhas duvidas, pelas importantes correções feitas ao trabalho o que tornou possível a conclusão dessa monografia e pelo exemplo como professor e pessoa.

Agradeço também em especial a professora Agda Lovato Teixeira pelos vários concelhos me dado e por ter me ajudado em todas as áreas, pelo exemplo como professora e pessoa, o qual tornou possível a conclusão desse curso.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é em realizar construções das principais figuras planas e entender a definição de cada figura geométrica e o conceito de calcular perímetros, áreas e volumes dessas figuras sem a utilização de fórmulas. Para o desenvolvimento dessas atividades, foram realizadas oficinas de construções geométricas com régua e compasso e de utilização do *software* GeoGebra. As oficinas foram realizadas no laboratório de informática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Goiano - Campus Urutaí, para alunos do 1° ano do curso técnico em agropecuária. Dentre os resultados, exaltamos o fato de atividades como essas tornarem mais dinâmica e interativa a arte de se ensinar geometria.

Palavras-Chaves: Áreas; Construções Geométricas; Figuras Planas; GeoGebra; Perímetros; Volumes.

Abstract

The main objective of this work is to perform constructions of the main flat figures and understand the definition of each geometric figure and the concept of calculating perimeters, areas and volumes of these figures without the use of formulas. For the development of these geometric constructions with ruler and compass and use of textitsoftware GeoGebra. The workshops were held in the computer laboratory of the Federal Institute of Education, Sciences and Technology Goiano - Campus Urutaí, for students of the 1.5 year of the technical course in agriculture. Among the results, we exalt the fact that activities like these make the art of teaching geometry more dynamic and interactive.

Keywords: Areas; Geometric Constructions; Flat Figures; GeoGebra; Perimeters; Volumes.

Lista de Figuras

Índice

Considerações iniciais

É sabido que há uma grande preocupação com o ensino de geometria, pois existe uma enorme defasagem dessa matéria tão importante. Pesquisando um pouco mais sobre os motivos de tamanha dificuldade nessa disciplina, pude perceber que um dos maiores fatores foi o abandono de se ensinar geometria, como diz Pavanello (1993), pois professores deixavam essa disciplina para o final do ano letivo por não considerar uma matéria tão importante ou talvez pelo medo de ensinar geometria, pelo fato de não terem uma boa formação ou a falta de domino do conteúdo. E por consequência, temos uma grande defasagem nessa disciplina que deparamos até os dias de hoje.

Ao longo do curso de matemática, ao realizar estágio, pude perceber quão grande é a dificuldade em geometria, na qual uma aula sobre perímetros e áreas e volumes de figuras planas observada, notei os alunos não sabiam o conceito de cálculo de áreas, perímetros e volumes, ou seja sabiam calcular ou até mesmo lembravam de fórmulas, mas os conceitos não sabiam o que de fato estava calculando. Foi o que me motivou a escrever esse trabalho, onde busquei orientação do meu orientador, na qual pesquisamos uma maneira de elaborar uma oficia envolvendo perímetros, áreas, volumes e construções geométricas por meio de régua e compasso com o GeoGebra, a fim de endossar os conceitos das figuras elementares e as construções.

Diante de tudo isso, pensamos[1] em uma oficia com o uso do *softaware* GeoGebra e com régua e compasso, tentando sair do quadro e giz, buscando uma aula mais dinâmica, além disso, por meio da oficina aplicada, buscamos trabalhar os conceitos do que é calcular perímetro, áreas e volumes sem a utilização de fórmulas a fim de que os alunos entendam os conceitos.

Assim sendo, os objetivos do trabalho é em, realizar as construções das principais figura planas, como o triângulo qualquer, triângulo isósceles, triângulo equilátero, quadrado, retângulo, losango, trapézio, circunferência, entender as definições de cada figura e compreender os conceitos de cálculos de perímetros, áreas e volumes sem a utilização de fórmulas.

[1]O presente trabalho está escrito tanto na primeira pessoa quanto na terceira pessoa. Quando estiver na terceira pessoa , é que estamos eu e orientador falando.

Para isso, o trabalho está estruturado em três capítulos. No capítulo 1 apresentamos os conceitos preliminares da geometria plana e espacial, a fim de relembrar ao leitor os conceitos que serão utilizados ao longo do capítulo 3.

No capítulo 2 falaremos um pouco do ensino e aprendizagem de geometria no Brasil e as consequências do seu abandono. Já no capítulo 3 é apresentado o roteiro da oficina, bem como sua aplicação, os resultados obtidos através do questionário aplicado antes e depois da oficina. Esse questionário é apresentado nesse capítulo.

Esperamos que ao final da leitura desse trabalho professores venham desenvolver essa metodologia nas suas aulas, pois buscamos mostrar que a geometria não é tão difícil assim, sendo que conceitos tão importante podem ser passados de uma forma prática e divertida não sendo algo penoso e melancólico de ser ensinar.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo, apresentamos uma breve revisão de geometria euclidiana plana e de geometria espacial, bem como os conceitos introdutórios, pontos; segmentos; retas; planos; figuras elementares; perímetros; áreas e volumes, afim de relembrar ao caro leitor alguns conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo do trabalho, principalmente no tocante às oficinas de construções geométricas com régua e compasso e com o GeoGebra. A escrita do presente capítulo teve como referências Barbosa (2007) e Dolce (2013a, 2013b).

1.1 Noções Primitivas

1.1.1 Ponto, reta e plano

As noções (conceitos, termos, entes) geométricas são estabelecidas por meio de definições. As noções primitivas são adotadas sem definição. Adotaremos sem definir as noções de:

Ponto, Reta e Plano

De cada um desses entes temos conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação.

1.1.2 Notação de Ponto, Reta e Plano

a) Com letras

Ponto: letras maiúsculas latinas: $A, B, C, ...$
Reta: letras minúscula latinas: $a, b, c, ...$

Plano: letras gregas minúscula: $\alpha, \beta, \gamma, ...$

b) Notações gráficas

Figura 1.1: Ponto A.

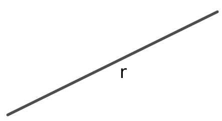


Figura 1.2: Reta r.

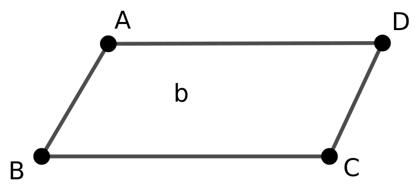


Figura 1.3: Plano b.

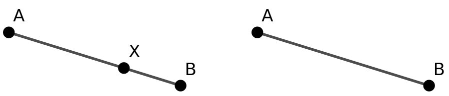
1.2 Segmento de Reta

1.2.1 Segmento de Reta e Semirreta

Definição: Segmento de Reta

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Assim, dado A e B, $A \neq B$, o segmento de reta AB (indicado porAB) é o que segue:



$$AB = \{A, B\} \cup \{X | X \text{ está entre } A \text{ e } B\}.$$

Os pontos A e B são extremidades do segmento AB é os pontos que estão entre A e B são pontos internos do segmento AB.

Se os pontos A e B coincidem ($A = B$), dizemos que o segmento AB é o segmento nulo.

Definição: Semirreta

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicado por$\overrightarrow{AB}$).

O ponto A é a origem da semirreta $\overrightarrow{AB}$:

$$AB = AB \cup \{X | B \text{ está entre } A \text{ e } X\}.$$

1.3 Ângulos

1.3.1 Ângulo e Ângulo Reto

Definição: Ângulo

Um ângulo é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semi-retas

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ então essas semirretas são chamados *lados* do ângulo, e o ponto A é chamado vértice do ângulo. Tal ângulo é representado por $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$, respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por $\hat{A}$.

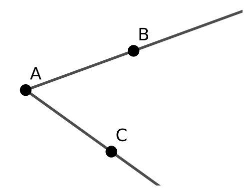


Figura 1.4: Ângulo $B\hat{A}C$.

Definição: Ângulo Reto

É todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.

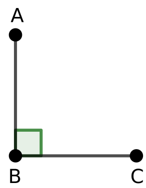


Figura 1.5: $A\hat{B}C$ é reto.

1.4 Retas Paralelas

1.4.1 Definição:

Duas retas r e s são paralelas se r e s não possuem pontos em comum, ou seja, $r \cap s = \emptyset$

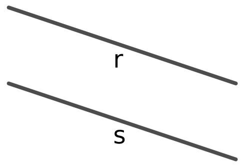


Figura 1.6: As restas $r//s$ são paralelas.

1.5 Retas Concorrentes

1.5.1 Definição:

Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

$$r \cap s = \{P\}$$

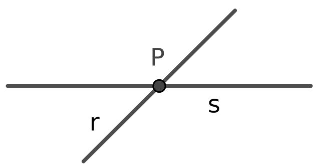


Figura 1.7: As retas r e s são concorrentes.

1.5.2 Bissetriz de um ângulo

Definição:

Uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ interna a um ângulo $A\hat{O}B$ é bissetriz se, e somente se, e somente se,

$$A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C.$$

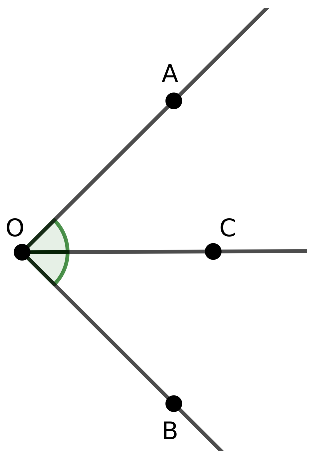


Figura 1.8: é a bissetriz.

1.6 Polígono

1.6.1 Definições e elementos

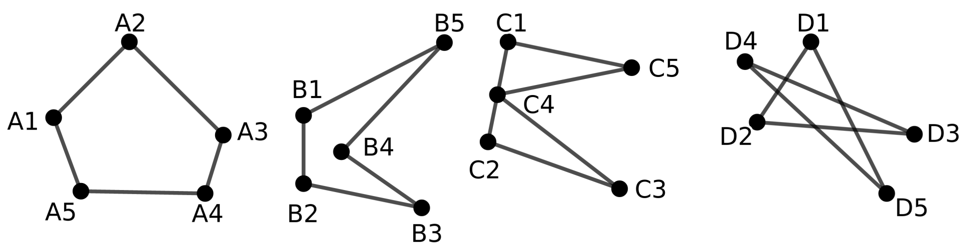
Definição:

Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, ..., A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n, A_1 e A_2, chama-se polígonos à reunião dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, ...A_{n-1A_n}, A_nA_1$.

Indicação:

polígono $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ ou, simplesmente, $A_1A_2A_3...A_{n-1}An = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup ... \cup A_{n-1}A_n \cup A_nA_1$.

Exemplos:



$A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$ e $D_1D_2D_3D_4D_5$ são polígonos.

1.6.2 Polígono Convexo

Definição:

Um polígono é dito convexo quando todos os pontos de um segmento de reta que possui as extremidades no interior do polígono também estão contido nele.

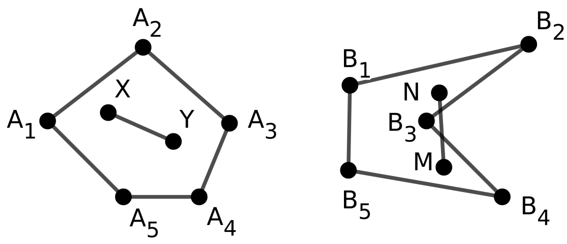


Figura 1.9: Polígono convexo e não convexo.

Veja que, na Figura1.9, o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$, se tomamos dois pontos quaisquer X e Y na região limitada pelo polígono, o segmento de reta que os une estará inteiramente contido nessa região. Já no polígono $B_1B_2B_3B_4B_5$ isso não ocorre. É possível encontrar dois pontos (M e N) de modo que o segmento de reta MN não esteja inteiramente contido na região limitada por esse. Portanto, o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$ é convexo e o polígono $B_1B_2B_3B_4B_5$ é não convexo.

1.7 Quadrilátero notáveis

Os quadriláteros (polígonos de quatro lados) notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

1.7.1 Trapézio

Definição:

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos.

$$ABCD \text{ é trapézio } (AB//DC).$$

Os lados AB e DC paralelos são as bases do trapézio, e os outros dois lados AD e BC não paralelos são as laterais do trapézio.

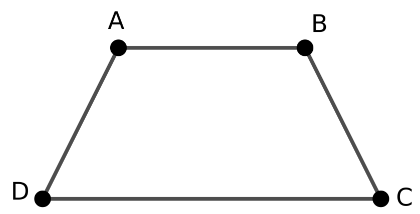


Figura 1.10: Trapézio ABCD.

1.7.2 Paralelogramo

Definição:

Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos.

$$ABCD \text{ é um paralelogramo} \Leftrightarrow (AB//CD \text{ e } AD//BC).$$

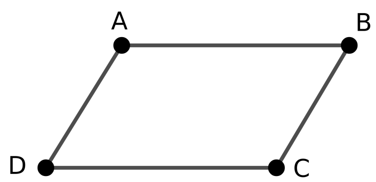


Figura 1.11: Paralelogramo ABCD.

1.7.3 Retângulo

Definição:

Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.

$$ABCD \text{ é retângulo} \Leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}.$$

Figura 1.12: Retângulo ABCD.

1.7.4 Losango

Definição:

Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.

$$ABCD \text{ é um losango} \Leftrightarrow (AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA).$$

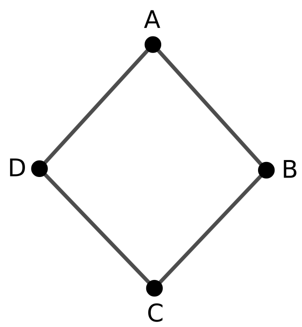


Figura 1.13: Losango ABCD.

1.7.5 Quadrado

Definição:

Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

$$ABCD \text{ é um quadrado} \Leftrightarrow (\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \text{ e } AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA).$$

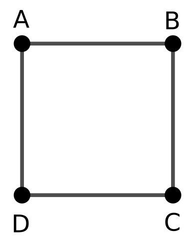


Figura 1.14: Quadrado ABCD.

1.8 Triângulo

1.8.1 Conceito, Elementos

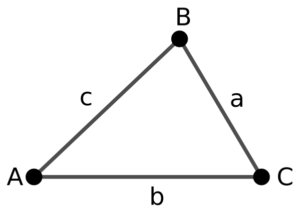
Definição:

Dado três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo $\triangle ABC$.

Indicação:

$$\text{Triângulo } ABC = \triangle ABC.$$

$$\triangle ABC = AB \cup AC \cup BC.$$



Elementos

Lados: Os segmentos $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ são os lados do triângulo.

Ângulos: os ângulos $B\hat{A}C$ ou $\hat{A}$, $A\hat{B}C$ ou $\hat{B}$ e $A\hat{C}B$ ou $\hat{C}$ são os ângulos do $\triangle ABC$ (ou ângulos internos do $\triangle ABC$).

Diz-se que os lados BC, AC e AB e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, opostos.

Vértices: Os pontos A, B e C são os vértices do $\triangle ABC$.

1.9 Triângulo Isósceles

1.9.1 Definição:

Se um triângulo tem dois lados congruentes, então

$$(\triangle ABC\ ,\ AB \equiv AC).$$

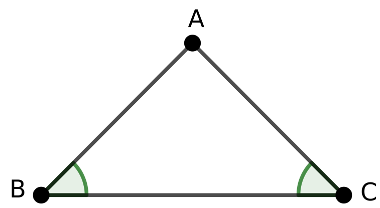


Figura 1.15: Triângulo Isósceles.

No triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes isto é,

$$\hat{B} = \hat{C}.$$

1.10 Mediana de um triângulo

1.10.1 Definição:

Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio[1] do lado oposto.

M é o ponto médio do lado BC.

AM é a mediana relativa ao lado BC.

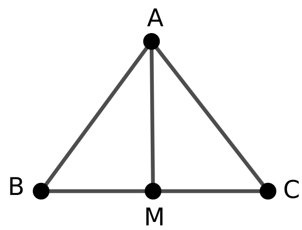


Figura 1.16: Mediana de um triângulo.

1.11 Bissetriz interna de um triângulo

1.11.1 Definição:

Bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

$$S \in BC,\ S\hat{A}B \equiv S\hat{A}C.$$

AS é a bissetriz relativa ao lado BC.

[1] Um ponto M é o ponto médio do segmento BC se, e somente se, M está entre B e C e $BM \equiv CM$.

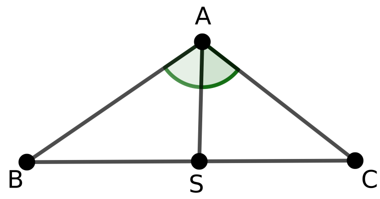


Figura 1.17: Bissetriz interna de um triângulo.

1.12 Altura de um triângulo

1.12.1 Definição:

Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.

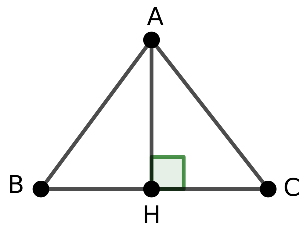


Figura 1.18: Altura do triângulo AH.

1.13 Mediatriz de um segmento

1.13.1 Definição:

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.

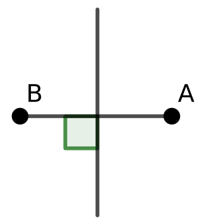


Figura 1.19: Mediatriz de segmento.

1.14 Circunferência

1.14.1 Definição:

Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio da circunferência.

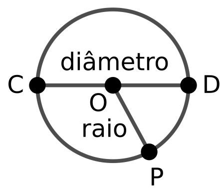


Figura 1.20: Circunferência.

Raio

Um raio de uma circunferência é um segmento com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência. OP é um raio.

Diâmetro

Diâmetro de uma circunferência é um segmento que passa pelo centro. CD é um diâmetro.

1.15 Áreas de Superfícies Planas

1.15.1 Definição:

Área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de forma tal que:

1. Às superfícies equivalentes estão associadas áreas (número iguais) e reciprocamente.

$$F \approx K \Leftrightarrow (\text{Área de F} = \text{Área de K})$$

2. A uma soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parceladas.

$$(\text{J} = \text{F} + \text{K}) \Rightarrow (\text{Área de J} = \text{Área de F} + \text{Área de K})$$

3. Se uma superfície é menor (ou igual) que a área da outra.

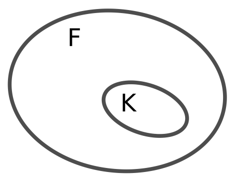


Figura 1.21: Superfície F e K

1.16 Áreas de Figuras Planas

1.16.1 Quadrado

Definição:

Dado um quadrado de lado a. Temos:

$$A_{quadrado} = a \cdot a \rightarrow A_{quadrado} = a^2.$$

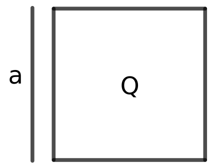


Figura 1.22: Quadrado Q de lado a.

1.16.2 Retângulo

Antes de definimos a área de um retângulo iremos apresentar o teorema entre as razão de dois retângulos quaisquer.

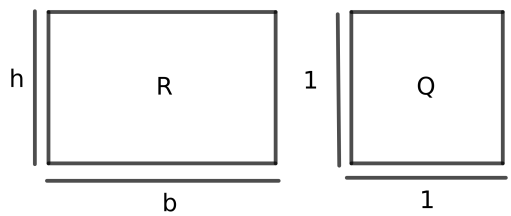
Teorema 1 *(Razão entre retângulos). A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas.*

Definição:

Dado o retângulo $R(b, h)$ e fixado o quadrado $Q(1, 1)$ como unitário, temos:

$$\text{Área do retângulo R(b, h)} = Ar = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1).}$$

Pelo **Teorema 1** (Razão entre retângulos)



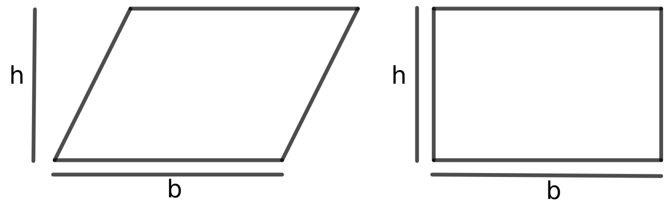
$$A_r = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} \Rightarrow A_r = \text{(medida de b)} \cdot \text{(medida de h)}.$$

que será representada simplesmente por: $A_r = b \cdot h$.

1.16.3 Paralelogramo

Definição:

Dado um paralelogramo $P(b, h)$, ele é equivalente a um retângulo cuja base mede b e a altura mede h logo:

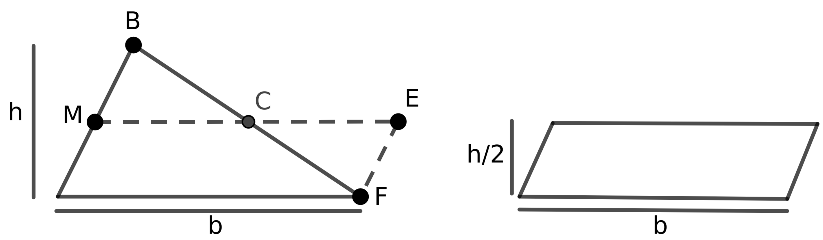


$$A_p = A_r \rightarrow A_p = b \cdot h.$$

1.16.4 Triângulo

Definição:

Dado um triângulo $T(b, h)$, ele é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b e altura mede $\frac{h}{2}$. Logo:



$$A_t = b \cdot \frac{h}{2} \rightarrow A_t = \frac{b \cdot h}{2}.$$

1.16.5 Losango

Definição:

Dado o losango $L(d, d_1)$, conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas ás diagonais.

$$A_L = A_{(4 \text{ triângulos})} = \frac{A_{(8 \text{ triângulos})}}{2} \rightarrow A_L = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

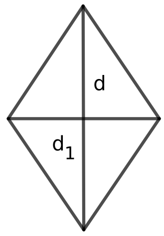
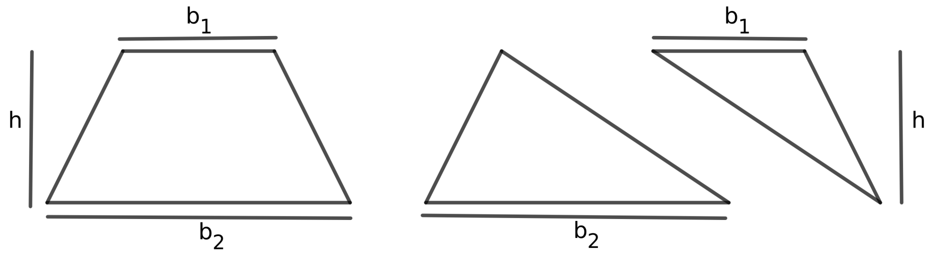


Figura 1.23: Losango

1.16.6 Trapézio

Definição:

Dado o trapézio $T_{ra}(b_1, b_2, h)$, ele é a soma de dois triângulos $T_1(b_1, h)$ e $T_2(b_2, h)$



$$A_{Tra} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow A_{Tra} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}.$$

1.17 Circunferência

1.17.1 Definição:

Considere um polígono regular[2] de n lados inscrito em um círculo de raio r. Como mostra a Figura 1.24, A área desse polígono é:

$$n \cdot \frac{ah}{2} = (na) \cdot \frac{h}{2} = (\text{perímetro do polígono}) \cdot \frac{h}{2}.$$

Essa área é menor que a área da circunferência; porém, fazendo o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender para o infinito), verificamos que:

[2]Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes.

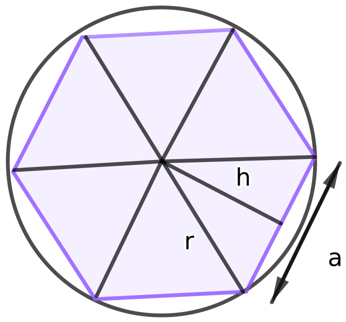


Figura 1.24: Circunferência de raio r

1. o perímetro do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência ($2\pi r$);

2. a altura h de cada triângulo tende a se igualar ao raio r da circunferência;

3. a área desse polígono tende a se igualar à área A da circunferência;

Assim, a expressão

(perímetro do polígono)$\cdot \frac{h}{2}$ tende a $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área A da circunferência.

$$A = \pi r^2.$$

1.18 Volume dos Sólidos

1.18.1 Definição:

Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

1. sólido congruentes têm volumes iguais;

2. se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos inteiros comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 com S_2.

1.18.2 Paralelepípedo

Definição:

Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos . A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

Volume do Paralelepípedo:

Seja $P(a,b,c)$ o paralelepípedo retângulo de dimensões a,b,c. Vamos medir esse paralelepípedo com o cubo unitário, isto é, com o paralelepípedo $P(1,1,1)$. Para isso, estabeleceremos a razão $\frac{P(a,b,c)}{P(1,1,1)}$. que será o volume procurado.

$$V = \frac{P(a,b,c)}{P(1,1,1)}$$

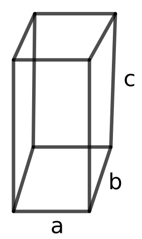


Figura 1.25: P(a, b, c)

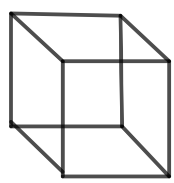
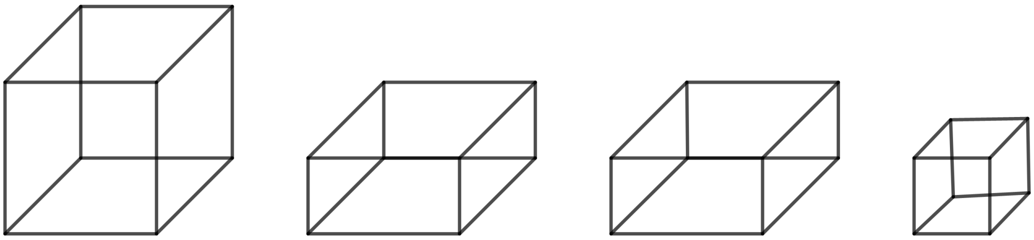


Figura 1.26: P(1, 1, 1)

Considere, então, os paralelepípedos P(a, b, c), P(a, b, 1), P(a, 1, 1) e P(1, 1, 1) em que é a unidade de comprimento.

$$P(a,b,c)\ P(a,b,1)\ P(a,1,1)\ P(1,1,1)$$

Com base na propriedade do item anterior, temos:



$$\frac{P(a,b,c)}{P(a,b,1)} = \frac{c}{1} \; bases\ (a,b)\ congruentes \tag{1.1}$$

$$\frac{P(a,b,1)}{P(a,1,1)} = \frac{b}{1} \; bases\ (a,1)\ congruentes \tag{1.2}$$

$$\frac{P(a,1,1)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} \; bases\ (1,1)\ congruentes \tag{1.3}$$

Multiplicando-se membro a membro (1), (2) e (3):

$$\frac{P(a,b,c)}{P(a,b,1)} \cdot \frac{P(a,b,1)}{P(a,1,1)} \cdot \frac{P(a,1,1)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{P(a,b,c)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \rightarrow V = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1}$$

$$\rightarrow V = (\text{medida de } a) \cdot (\text{medida de } b) \cdot (\text{medida de } c)$$

que será representada simplesmente por

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

em que a, b e c são as *medidas* das dimensões do paralelepípedo retângulo na unidade escolhida.

Conclusões:

1. O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas três dimensões.

2. Tomando como base a face de dimensões a e b, indicando por B a área dessa base ($B = a \cdot b$) e a altura c por h, podemos escrever:

$$V = B \cdot h$$

Isto é: O volume de um paralelepípedo retangular é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

Volume do cubo:

No cubo de aresta a, temos $b = a$ e $c = a$.

$$V = a \cdot b \cdot c \to V = a \cdot a \cdot a \to V = a^3.$$

1.18.3 Prisma

Definição:

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABCD... KL$ situado num plano α e um segmento de reta PQ, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se prisma (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

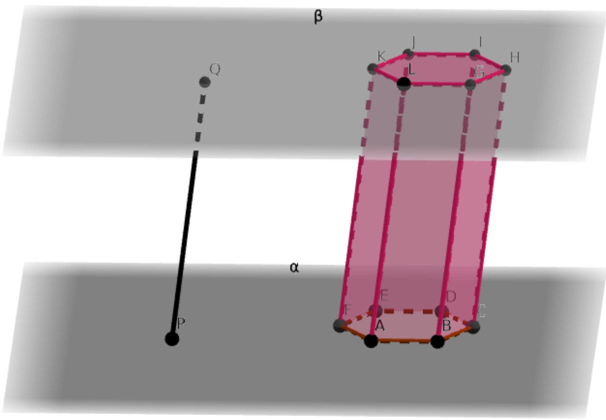


Figura 1.27: Prisma.

Volume do Prisma:

Considere um prisma P_1 de altura h e área da base $B_1 = B$ e um paralelepípedo retângulo de altura h e área de base $B_2 = B$ (o prisma e o paralelepípedo têm alturas congruentes e bases equivalentes). Suponhamos,

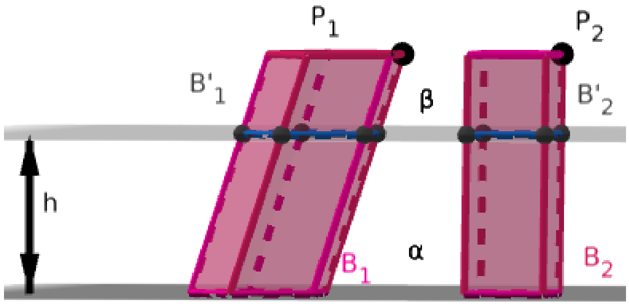


Figura 1.28: Volume do prisma.

sem perda de generalidade, que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α e estão num semi-espaços determinados por α. Qualquer plano β paralelo a α, que secciona P_1, também secciona P_2, e as secções (B_1' e B_2', respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$$(B_1' \equiv B_1, B_2' \equiv B_2, B_1 \equiv B_2 = B) \to B_1' \equiv B_2'.$$

Então, pelo princípio de Cavalieri[3], o prisma P_1 é o paralelepípedo P_2 têm volumes iguais.

$$V_{p1} = V_{p2}$$

Como $V_{p2} = B_2 h$, ou seja, $V_{p2} = B \cdot h$, vem $V_{p1} = B \cdot h$; ou, resumidamente

$$V = B \cdot h.$$

1.18.4 Tetraedro

Tetraedro é um poliedro [4] de faces triangulares.

[3] Dois sólidos, nos quais todos plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

[4] Os poliedros são sólidos geométricos limitados por um número finito de polígonos planos.

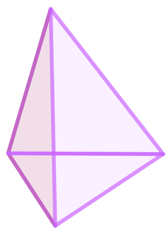


Figura 1.29: Tetraedro.

Volume do tetraedro:

Seja B a área da base e h a medida da altura do prisma. Esse prisma pode ser dividido em três tetraedros de mesma base do prisma e mesma altura. Assim sendo, o volume do tetraedro é:

$$V_{Tetraedro} = \frac{V_{Prisma}}{3} = \frac{Bh}{3}.$$

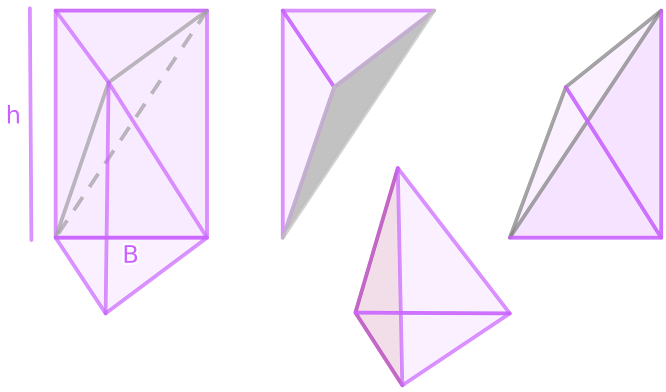


Figura 1.30: Volume do tetraedro.

1.18.5 Pirâmide

Definição:

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABC \dots MN$ situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se pirâmide (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono.

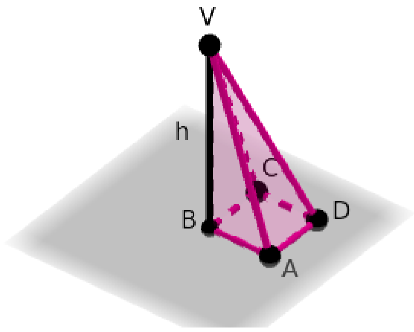


Figura 1.31: Pirâmide.

Um caso particular de pirâmide, é o tetraedro, que é uma pirâmide triangular.

Volume da Pirâmide:

Seja B a área da base e h a medida da altura de uma pirâmide qualquer. Esta pirâmide é soma de $(n-2)$ tetraedros. Onde n é o numero de tetraedros formado pela pirâmide.

$$V = V_{T1} + V_{T2} + \cdots + V_{Tn-2} \rightarrow V = \frac{1}{3}B_1 h + \frac{1}{3}B_2 h + \cdots + \frac{1}{3}B_{n-2} h.$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \dots B_{n-2})h \rightarrow V = \frac{1}{3}B \cdot h.$$

Conclusão: O volume da pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

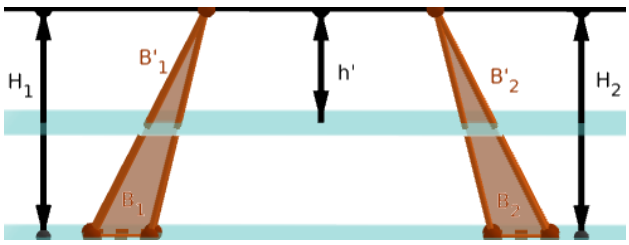


Figura 1.32: Volume da pirâmide

1.18.6 Cilindro

Definição:

Cilindro é a reunião da parte do cilindro circular ilimitado, compreendida entre os planos de suas secções circulares paralelas e distintas em relação a essas secções.

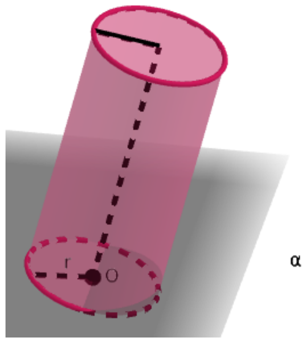


Figura 1.33: Cilindro.

Volume do Cilindro:

Consideremos um cilindro de altura h e área da base $B_1 = B$ e um prisma de altura h e área da base $B_2 = B$ (o cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes). Suponhamos que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α e estão num dos semi-espaços determinados por α.

Qualquer plano β paralelo e α, que secciona o cilindro, também secciona o prima e as secções (B_1' e B_2', respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes ás respectivas bases.

$$(B_1' \equiv B_1, B_2' \equiv B_2, B_1 \equiv B_2 \equiv B) \rightarrow B_1' \equiv B_2'.$$

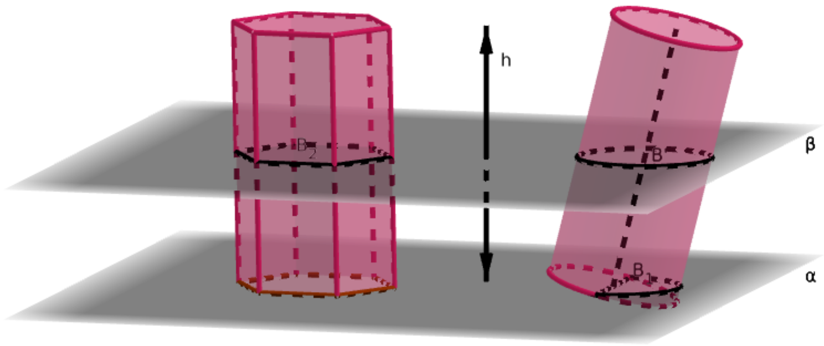


Figura 1.34: Volume do cilindro.

Então, pelo o cilindro e o prisma têm volumes iguais.

$$V_{cilindro} = V_{prisma.} \text{ Como } V_{prisma} = B_2 h.$$

Ou seja,

$$V_{prisma} = B \cdot h.$$

Vem que,

$$V_{cilindro} = B \cdot h.$$

Ou resumidamente,

$$V = B \cdot h.$$

1.18.7 Cone

Definição:

Consideremos uma circunferência (região circular) de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

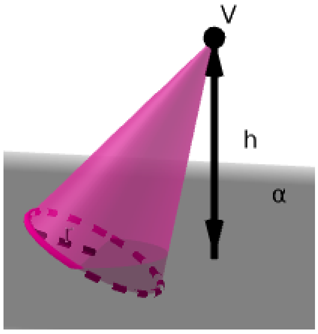


Figura 1.35: Cone

Volume do Cone:

Considere um cone de altura $H_1 = h$ e área da base $B_1 = B$ e um tetraedro de altura $H_2 = h$ e área da base $B_2 = B$ (o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes). Suponhamos que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α e que os vértices estão num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

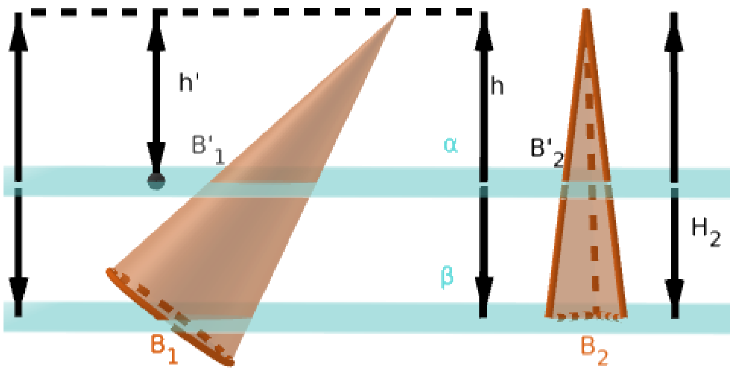


Figura 1.36: Volume do cone

Qualquer plano secante β paralelo a α, distando h' dos vértices que seccionam o cone, também secciona o tetraedro, sendo as áreas das secções B_1' e B_2', respectivamente, temos:

$$\left(\frac{B_1'}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2, \frac{B_2'}{B_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2\right) \rightarrow \frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_1'}{B_1}.$$

Como $B_1 = B_2 = B$, vem que $B_1' = B_2'$. Então, pelo Princípio de Cavaliere, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{cone} = V_{tetraedro}.$$

Como $V_{tetraedro} = \frac{1}{3}Bh$; ou seja, $V_{tetraedro} = \frac{1}{3}B \cdot h$, vem que $V_{cone} = \frac{1}{3}Bh$; ou resumidamente

$$V = \frac{1}{3}Bh.$$

Conclusão:

O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Se a base for uma circunferência, então $B = \pi \cdot r^2$, temos: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$

Por fim, concluímos esse capítulo com as noções elementares da geometria plana e espacial, bem como os resultados de perímetros áreas e volumes. No próximo capítulo será abordado sobre o ensino e aprendizagem de geometria no Brasil, buscando entender como está acontecendo o ensino de geometria no Brasil, e o porque de tamanha dificuldade nessa disciplina tão importante.

Capítulo 2

O Ensino e Aprendizagem de Geometria no Brasil

Sendo uma matéria muito ampla na área de matemática, a geometria é o ramo em que se estuda as medidas, espaços, figuras geométricas, áreas e volumes de sólidos geométricos. Seu próprio nome, geometria, carrega a ideia de medidas, já que vem do grego, GEO = terra e METRIA = medida. Ou seja a geometria é a "medida da terra". Segundo Eves (1997, p.1),

> Disso vem o sentido da palavra geometria "medida da terra."As primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parecem ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos.

O seu nome nos induz a pensar que a geometria está em tudo, pois ela está ligada a vivência do homem com o mundo. Quando nos referimos à geometria, podemos refletir sobre o quanto ela é importante para a vida profissional e também para pessoal, pois quando reparamos ao nosso redor podemos observar várias formas geométricas e os desafios do dia a dia.

Embora não tenhamos uma data sólida da origem da geometria, Boyer (1996, p.146) diz que "afirmações sobre a origem da geometria matemática, seja aritmética ou geometria são muito arriscadas, pois os primórdios são mais antigos do que a arte de escrever." Por volta do século V a.C., Heródoto defendia que a geometria surgiu no Egito através das necessidades do homem em resolver problemas com divisão de terras.

O que leva a uma estrutura sólida da geometria tanto na escola, quanto nos desafios em resolver problemas geométrico, como diz Heródoto, sendo, então, uma matéria da matemática muito importante na vida do aluno, levando com que ele construa a geometria de um mundo abstrato para um mundo concreto, onde Boyer (1998) acredita que a geometria surge a partir de uma concepção com o mundo e as necessidades do homem. O conhecimento da geometria teve início desde a antiguidade, por meio das atividades diárias, tornando então a geometria uma área de estudo muito antiga.

Monteiro (2012, p.4) relata que, desde a antiguidade, a geometria se destacava "devido às necessidades que o homem tinha de resolver questões práticas do dia a dia, como divisões de terra férteis, construções de casas e também observar e prever os movimentos dos astros."

Podemos perceber que a resolução de problemas envolvendo geometria sempre esteve presente em nossa vida, dado que a todo momento nos deparamos com problemas de geometria, seja na escola ou no dia a dia. O homem sempre teve o contato com a geometria, indiretamente ou diretamente, como em medir o cercado de um campo, calcular a área de um terreno, o que nos leva a concluir que somos dependentes da geometria a todo momento. Por isso, a necessidade que nos faz perceber o quanto o papel da escola faz um grande diferencial no desenvolvimento dos alunos e da sociedade, devendo ser colocado em primeiro lugar nas escolas, desde o começo onde o aluno possui o primeiro contato com a escola sendo o ensino fundamental, focando em mostrar para os alunos as figuras geométricas como quadrado, retângulo etc, desenvolvendo a capacidade da criança distinguir as figuras geométricas, levando com que a criança perceba que as figuras geométricas fazem parte da sua vida.

Isso evidencia a importância de se estudar geometria desde cedo, fazendo com que a sociedade, desde o primeiro contato com a matemática, tenha a ideia do quanto essa matéria é eficaz para a formação acadêmica ou pessoal. Por isso, é importante que o ensino de geometria não tenha uma grande defasagem, principalmente quando se observa um alto índice de dificuldade dessa disciplina, fazendo com que o homem não esteja apto para resolverem problemas do seu cotidiano.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática para os anos finais, a geometria é muito importante para resolução de situações do nosso cotidiano, fazendo com que os desafios do dia a dia sejam resolvidos de forma práticas. É por isso que essa matéria deve ser ensinada na escola e, por consequência, pode ser levada para fora da escola como no mundo real onde vivemos.

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema [...]. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p. 51).

Pelos PCNs, podemos observar que quando envolvemos o trabalho com noções geométricas isso é muito útil, pois estimula o aluno a perceber as semelhanças e diferenças não só por meio do quadro, papel, caneta, que é a forma tradicional que a maioria dos professores utilizam, mas fazendo com que o aluno possa aprender observando a geometria ao seu redor.

Como o campo da geometria é um campo fértil para se trabalhar situações problemas, é possível estimular o aluno a ter experiência com áreas e medidas, fazendo com que ele saia do mundo abstrato para o real, em que aluno poderá perceber, de forma clara, o real sentido de se estudar geometria. Isso é um ponto muito forte para o ensino de geometria, estudando a teoria e a prática simultaneamente, mas infelizmente o ensino de geometria nas escolas tem sido abandonada, e uma consequência disso é a alta defasagem com essa matéria, o que é um absurdo, pois a geometria é onde o aluno desenvolve a sua capacidade de desenvolvimento de resolver problemas que se deparam no seu cotidiano.

Por essas questões, a geometria é uma matéria muito importante de ser estudada e ensinada nas escolas, embora, como citamos, tem grande defasagem e abandono, o que vem preocupando cada vez mais os educadores matemáticos. Essa defasagem se torna mais evidente nas escolas públicas depois da promulgação da Lei 5692/71, que tem como objeto decidir sobre os programas das diferentes disciplinas. Isso fez com que os professores de matemática deixassem de incluir a geometria em sua grade curricular, talvez pelo receio ou pela insegurança de se ensinar geometria. Segundo Fonseca (2002, p.7),

> A preocupação em resgatar o ensino da geometria como uma das áreas fundamentais da matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino.

Ainda de acordo com essa autora, existe uma grande escassez no ensino de geometria e uma grande preocupação, buscando resgatar a geometria e superar as dificuldades encontradas nas escolas, seja no ensino médio e superior.

Este abandono à geometria não foi só no Brasil, trata-se de um fenômeno mundial, e esta ligada a questões de ordem educacionais, onde não se colocava a geometria em primeiro lugar, acreditando que a geometria não iria ter influência na formação dos alunos, no seu aspecto intelectual, colocando essa em segundo plano, por considerar que ela devesse ceder espaço em outras áreas, como da álgebra. Esse impacto na geometria foi causada por vários fatores, sendo um deles, que muitos acreditavam que através do desenvolvimento da matemática seria desnecessário o ensino da geometria, o que é um absurdo pois como abandonar algo tão importante como a geometria, onde todos os dias nos deparamos com um desafio matemático envolvendo-a. Segundo Pavanello (1993, p.7),

> O gradual abandono do ensino da geometria verificado nestas ultima décadas no Brasil, é um fato que tem preocupado bastante os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas.

Podemos perceber que a grande defasagem do ensino de Geometria no Brasil, principalmente nas escolas públicas, vem preocupando cada vez mais os educadores matemáticos, principalmente o pensamento de não ser uma disciplina importante, mais sim como sua inimiga.

Com isso, esse impacto vem se alavancando cada vez mais na aprendizagem dos alunos, que tem sentido muita dificuldade ao se deparar com figuras geométricas, seja por não saber identificá-las e nem calcular o perímetro, a área, e também os volumes dos sólidos geométricos.

Vale lembrar que esse impacto no Brasil se inicia no século XX, pois o Brasil nessa época era um país muito forte na área da agricultura, sendo forte na comercialização e exportação dos seus produtos para outros países. Por isso, a maioria da população era composta por analfabetos, sem acesso a educação, sendo muito baixo o índice de quem conseguia estudar o elementar. Quem fazia o ensino superior, nessa época, eram os filhos de pais de classe alta, que buscavam sempre conhecimentos na área burocrática, e políticos do governo, tendo pouco interesse pelos estudos científicos.

Além disso, para quem conseguia fazer o ensino elementar, os conteúdos focados nessa área eram pensados para ensinar técnicas operatórias para atividades comerciais. O que foi um grande erro na área de ensino, pois tiraram a geometria, e focaram mais em outras matérias. Uma das consequências disso, é a grande defasagem até nos dias atuais, pois o ensino em si tinha como foco a aprendizagem do aluno para o meio comercial. O aluno não tinha o contato com a geometria na sala de aula, pois a ideia do governo estava voltado para o desenvolvimento econômico do país. Isso foi um grande equívoco, dado que os conhecimentos geométricos oferecem um vasto campo de ideias e métodos de muito valor, como diz Fainguelernt (1995, p. 9)

> A Geometria oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de absorção e generalização. A Geometria também ativa a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É portanto, tema integrador entre as diversas partes da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. Ela desempenha papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência.

Vale destacar que essa importância é na fase adulta, como na criança, pois é nessa fase que se desenvolve o raciocínio e o intelecto do ser humano. É nessa etapa que a geometria passa para a criança a diferença de um mundo concreto para um mundo abstrato, quer dizer, é nessa fase que a criança sai do seu mundo concreto para o abstrato. Pensando especificamente, essa transformação acontece mediante desenhos, jogos, brinquedos geométricos, fazendo com que a criança tenha a percepção dos objetos geométricos que esta ao seu redor. Para Fonseca *et al.* (2002), o aluno deve realizar experiências que favoreçam processos de explorar, visualizar, desenhar e comparar, usando materiais concretos e os relacionando com objetos/situações próprias do seu cotidiano.

> [...] os conhecimentos geométricos possibilitam a elaboração de representações mais facilmente traduzíveis em recursos visuais (gráficos, diagramas, organogramas, etc.) para diversos conceitos relacionados a tais conteúdos. Dessa maneira, a Geometria surge também como um aporte relevante para a compreensão de outros campos do conhecimento (FONSECA *et al.* 2002, p. 99).

Veja que, por meio do ensino de geometria, a criança gera uma compreensão de outros campos de conhecimentos, sendo isso útil no seu desenvolvimento, aumentando a percepção do mundo, e por meio dessa concepção, o ensino da geometria ensinada por meio de jogos é muito importante para o desenvolvimento da criança, podendo ser utilizado jogos de raciocínio lógico.

Podemos observar, diante de tudo que discutimos até aqui, que o ensino da geometria, seja nas séries iniciais e finais, é importante para o desenvolvimento de uma sociedade melhor, mas há ainda entre os matemáticos opiniões contrárias quanto ao papel da geometria no desenvolvimento do aluno, pois acreditam que ela deve seguir outros ramos mais em evidência no ramo da matemática. Além disso, a falta de interesse em ensinar geometria fez com que muitos professores não se sentissem seguros ao ensinar, que deixavam de incluí-la em sua programação, fazendo com que a disciplina fosse ensinada no final do ano letivo. Isso geralmente acontece pois os professores apresentam uma grande intranquilidade em relação ao seu ensino, dado que não dominam a geometria, como diz Pavanello (1989, p. 21).

> É possível que os professores que atuam nas series iniciais apresentem dificuldades semelhantes às dos alunos em relação ao conteúdo, pois temos observado que parece haver uma estreita vinculação entre o domínio do conteúdo e de procedimentos para resolução de situações-problema pelo professor e o desempenho de seus alunos na resolução das mesma.

Seja pela má formação dos professores ou desinteresse pelo ensino de geometria, uma consequência é que muitos alunos não sabem ou sentem muitas dificuldades ao se deparar com a geometria no ensino médio ou superior, pois não obtiveram uma base sólida no ensino fundamental. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, se os conteúdos geométricos não forem trabalhados de uma objetiva e significativa, isso formará indivíduos com dificuldades de se desenvolver com o mundo.

> A respeito do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial, a leitura e a utilização efetiva de mapas e de plantas, nas situações cotidianas, são fonte de numerosas dificuldades para muitas pessoas. Por exemplo, localizar um escritório num grande edifício, desloca-se numa cidade, encontrar um caminho numa montanha são procedimentos que muitas vezes solicitam uma certa sistematização dos conhecimentos espaciais. (BRASIL, 1998, p. 123).

Assim sendo, a atitude do governo em deixar o ensino da geometria em segundo lugar, e pela má formação dos professores, que não tinham segurança em ensinar o conteúdo, e davam a desculpa de não ensinar colocando a falta de tempo como empecilho, tudo isso gerou o que vemos hoje no Brasil, a falta de interesse de alunos e professores, não sabendo a definição de segmentos, os nomes das figuras geométricas, muito menos calcular a área dessas figuras.

Ainda bem a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está trazendo de volta a importância da geometria na educação básica, tanto para os anos iniciais quanto aos anos finais. Consta nesse documento curricular que

> Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e

> invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, 2017, p. 272).

Perceba o retorno de os conceitos de áreas de figuras planas; semelhança de triângulos, ângulos e perímetros. Importantíssima a atuação da BNCC na área de geometria, pois trouxe a relevância de estudar geometria em todos os anos e garantindo que a matemática seja estudada em sua diversas áreas, quebrando a ideia de que a geometria deve ser ensinada em segundo plano, como sugere os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Além disso, a BNCC sugere que a matemática deva estar relacionada aos seus diversos campos (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) no sentido de que os estudantes possam enxergar a matemática no seu mundo real. Por fim, esses conceitos precisam ser enfatizados nessa fase do ensino básico, de maneira que os estudantes possam identificar os conceitos de cada uma dessas disciplinas e suas relevância na área de matemática com o seu mundo real.

Nesse sentido que nosso trabalho aparece na tentativa de retomar a importância de estudar a geometria. Pensando nisso que surgiu a ideia de aplicar uma oficina para os alunos do ensino médio, focando na construção de figuras planas por meio de régua e compasso e cálculos de perímetros e áreas dessas figuras com o auxilio do GeoGebra. Essa oficina tem o intuito de mostrar ao aluno um modo diferente de ver a geometria, saindo do método tradicional como uso de fórmulas etc, sendo assim, uma maneira prática e dedutiva, a qual possibilita o aluno poder enxergar a geometria de uma maneira diferente. Além disso, vale ressaltar, a importância de aplicar atividades diferenciadas no ensino de geometria nas escolas, pois faz com que o aluno possar ver a geometria com um outro olhar e não somente pelo método tradicional por meio do uso do quadro e giz, o qual possibilita ao aluno um maior contato com as figuras geométricas, a dedução das fórmulas de cálculos de áreas das figuras planas.

Essas atividades diferenciadas aplicadas, são muito importantes para a formação do aluno, pois, além de mostrar ao aluno que a matemática pode ser vista com um outro olhar, é um momento essencial, o qual pode possibilitar uma maior participação dos alunos nas aulas fazendo perguntas e dando opiniões de como resolver tal problemas. Nesse sentido, é válido destacar que por meio de atividades e oficinas matemáticas aplicadas em sala de aula o aluno pode ter o contato com a geometria da vida real como, por exemplo, o uso de sólidos geométricos na utilização dessas atividades, o qual faz o ensino sair do ensino abstrato para o ensino concreto podendo diferenciar o imaginário do real, o que é primordial para obter um maior nível de aprendizagem.

O ensino de geometria por meio de atividades diferenciadas é interessante, pois oportuniza ao aluno entender de onde surgiu determinadas fórmulas, construções das figuras, não só jogando fórmulas e mais fórmulas para os alunos, mais sim fazendo sentido a utilização de cada umas delas.

Essas atividades são fundamentais, pois visam superar as dificuldades dos alunos em geometria de uma maneira descontraída, dado que o objetivo dessas atividades é fazer com que os conteúdos sejam passados de uma forma mais simples, sem aquela pressão da sala de aula, fazendo com que o aluno se sinta mais a vontade de participar das atividades. Isso aumenta mais o desejo de aprender e conhecer mais e mais o conteúdo estudado, o que é uma ótima ferramenta, uma vez que o professor utiliza o desejo do aluno em aprender, e isso é um ponto fundamental no sentido de ensino e aprendizagem de ambos, pois o professor também aprende nesse contexto.

Atividades diferenciadas, como jogos, oficinas com materiais manipuláveis, o uso de tecnologias, são fundamentais no ensino e aprendizado do aluno, pois busca outra forma de aplicar os conteúdos, o qual possibilita um maior visualização dos conceitos matemáticos. Conforme é afirmado nos PCNs tem-se:

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As Figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades (BRASIL, 1997, p. 82).

Uma das ferramentas muito importantes para essas atividades são os jogos matemáticos, pois o professor pode propor competições entre os alunos, os quais sentem desafiados, e com isso, vai construindo no aluno o conhecimento a partir da ação, reflexão e visualização, onde o aluno pode desenvolver através da sua ação uma concepção de como resolveria tal problema. Moura (1994) recomenda que o jogo seja utilizado como recurso metodológico na sala de aula, pois na sua concepção:

> O jogo na educação matemática parece justificar-se ao introduzir uma linguagem matemática que pouco a pouco será incorporada aos conceitos matemáticos formais, ao desenvolver a capacidade de lidar com informações e ao criar significados culturais para os conceitos matemáticos e o estudo de novos conteúdos. (MOURA, 1994, p. 83).

Pode-se considerar uma grande importância trabalhar com essas atividades, pois proporciona ao aluno possibilidades de resolver situações problemas e inserir novas possibilidades metodológicas no ensino da matemática.

Nesse sentido, por meio dessas atividades, o aluno constrói seu conhecimento de maneira ativa e dinâmica e os sujeitos envolvidos ajudam e são ajudados, e com isso podem aprender com os seu erros e com os erros dos outros envolvidos, gerando, então, um ambiente em que todos aprendem.

Pensando nisso, é que planejamos uma oficina com uso do *softaware* GeoGebra e com construções geométricas com régua e compasso, com foco nas construções das figuras elementares e cálculo de perímetros; áreas; volumes. No próximo capítulo veremos como foi desenvolvida essa oficina, porém, antes, vamos comentar rapidamente sobre as as construções geométricas com régua e compasso e o GeoGebra.

As construções com régua e compasso surgiram no século V a C., apesar de não se saber ao certo quando, quem e de que forma os instrumentos régua e compasso foram inventados. É sabido que na época, esses equipamentos foram utilizados para solucionar problemas, tais como: a construção de retas paralelas e perpendiculares a uma dada reta passando por um ponto dado, encontrar a mediatriz de um segmento, construir a bissetriz de um ângulo qualquer e traçar as tangentes de uma circunferência. A título de curiosidade, existem três problemas que não foram solucionados por meio da régua e compasso sendo eles: a trissecção de um ângulo[1], a quadratura do circulo[2] e

[1] Trissecção de um ângulo consiste em, dado um ângulo qualquer, construir um outro com um terço de sua amplitude.

[2] A quadratura do circulo consiste em construir um quadrado com área igual à de um

a duplicação do cubo[3].

O uso da régua e compasso pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras de acordo com as necessidades do dia a dia. Tais construções aconteciam com uma régua não graduada e um compasso, via operações finitas, cuja validação da construção se dava por meio de argumentos matemáticos. As operações anteriormente citadas, são as construções que podem ser feitas: retas, circunferências, interseções, mediatriz de um segmento, ângulos etc, como menciona Wagner (1993).

Já no século XXI, foram criados os *softwares* matemáticos, possibilitando o manuseio dinâmico da geometria, coisa que as construções com régua e compasso não faziam. O mais utilizado é o GeoGebra [4], criado por Markus Hohenwater no ano de 2001. Trata-se de um *software* livre, que pode ser instalado em computadores, celulares etc, o qual possibilitou uma maior praticidade para todos.

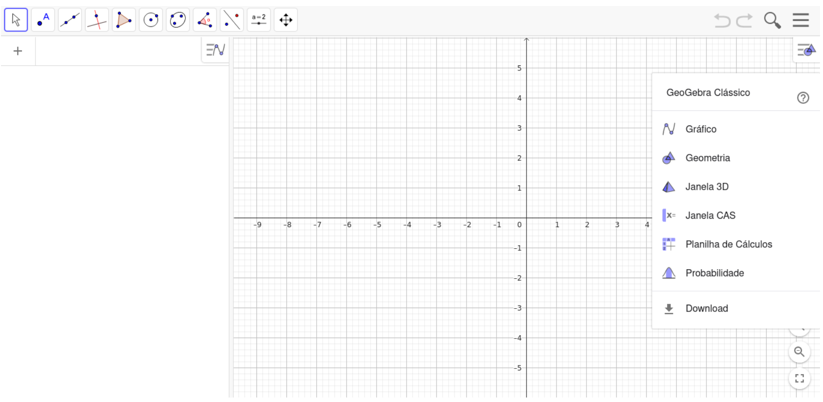


Figura 2.1: GeoGebra

A figura 2.1, mostra a interface do GeoGebra, bem como sua ferramentas, em que se pode ser fazer polígonos, retas, circunferências, ângulos etc. Além do gráfico em que pode ser realizadas as construções, a título de curiosidade, o GeoGebra também possui calculadora e é possível fazer planilhas.

círculo dado.

[3] Dado um cubo, construir outro cubo com o dobro do volume do anterior.

[4] https://www.geogebra.org/classic?lang=pt

Capítulo 3

Oficina de construções geométricas e com o GeoGebra

Nesse capítulo será mostrado o roteiro da oficina construção de Figuras Planas e Cálculos de Perímetros, Áreas e Volumes com construções geométricas com régua e compasso e o GeoGebra, aplicado na turma 1° ano do curso técnico em agropecuária integrado ao Ensino Médio, do Instituto Federal Goiano Campus - Urutaí. A turma era composta de 17 alunos, e foi necessário quatro aulas de 50 minutos cada para a aplicação da oficina. Os materiais utilizados foram: lápis, régua, compasso, computador, projetor e slides, sendo realizada no laboratório de informática. Nesse capítulo, também iremos apresentar os resultados observados/obtidos pela ocasião da aplicação da oficina.

Aula 01

1° Momento: Diagnóstico

1. Primeiramente, foi entregue pela professora da turma um questionário aos alunos sobre figuras planas, composto por treze questões [1].

2° Momento: Apresentação do GeoGebra e Figuras

[1] O questionário encontra-se no Apêndice.

1. Foi apresentado aos alunos o GeoGebra, história, ferramentas e interface. (Slide)

2. Em seguida apresentei as figuras geométricas, quadrado, retângulo, losango, trapézio, circunferência. (Slide)

3. Perguntei aos alunos o que eles podiam observar em comum nas imagens.

4. Apresentei aos alunos de forma formal a definição de figuras geométricas e logo em seguida mostrei a definição. (Slide)

Aula 02

1° Momento: Construção com Régua e Compasso

1. Foi feita uma revisão da aula anterior.

2. Perguntei aos alunos a definição de cada figuras (triângulo qualquer, isósceles, equilátero, quadrado, retângulo, paralelogramo, circunferência e trapézio) e a ideia de como construir cada uma delas por meio de régua e compasso. Em seguida dei um momento para os alunos darem as respostas e tentarem construir as figuras. Após esse momento, fui construir cada uma delas juntamente com os alunos, tanto no GeoGebra quanto com régua e compasso.

Aula 03

1° Momento: Introdução Perímetro

1. Foi feita uma revisão da aula anterior.

2. Perguntei aos alunos o que é perímetro de uma figura geométrica. Em seguida definir de maneira informal. Depois mostrei a definição. (Slide)

3. Mostrei o (quadrado, triângulo, trapézio.) Foi considerado a medida do segmento como 1cm. (Slide)

4. Dei um tempo para os alunos tentarem calcular o perímetro das figuras.

5. Mostrei que no GeoGebra pode ser calculado.

6. Deduzi a fórmula no quadro de perímetros de uma figura plana juntamente com os alunos.

2° Momento: Introdução Áreas de Figuras Planas

1. Foi feita uma revisão da aula anterior.

2. Perguntas aos alunos o que é área de uma figura geométrica.

3. Definir de maneira informal área de uma figura geométrica, logo após apresentei a definição. (Slide)

4. Dei um tempo para os alunos tentarem calcular.

5. Calculei as áreas das figuras com os alunos, (retângulo, triângulo, paralelogramo, trapézio), considerando como medida o quadrado de área 1cm^2.

6. Deduzi a formula de área de cada figura juntamento com os alunos.

Aula 04

1° Momento: Introdução Sólidos Geométricos

1. Foi feita uma revisão da aula anterior.

2. Apresentei para os alunos, cubo, paralelepípedo, pirâmide triangular, esfera, cilindro.

3. Deixei os alunos tentarem calcular o volume do cubo e do paralelepípedo no GeoGebra, considerando como unidade de volume o cubinho $1\ \text{cm}^3$.

4. Calculei com os alunos no GeoGebra o volume de cada figura, considerando como unidade o volume do cubinho $1\ \text{cm}^3$.

2° Momento: Diagnóstico

1. Foi entregue o mesmo questionário aplicado na primeira aula pela professora regente.

Vamos, agora, trazer alguns resultados acerca da aplicação da oficina anteriormente detalhada, trazendo para o leitor, alguns apontamentos e reflexões observados.

A aplicação da oficina de construções de figuras geométricas por meio de régua e compasso e com o auxilio do GeoGebra, realizada no laboratório de informática, foi aplicada para uma turma com alunos de diversas idades, sendo que alguns deles tinham muito tempo que estavam sem estudar, pois ao terminarem o ensino médio não ingressaram direto ao curso técnico em agropecuária, por cuidarem da sua família e dedicarem ao trabalho, a fim de ter o sustento para sua casa. Com isso, talvez pelo tempo que eles estavam sem estudar e por ser uma turma de pessoas com uma idade mais avançada, isso pode ter interferido um pouco no saber das definições das figuras e em manusear o *software* GeoGebra.

No início da oficina, alguns alunos estavam com muita dificuldade em manusear o computador e o *software* GeoGebra, por isso mostrei para eles as funções das ferramentas e deixei um tempo para eles interagirem com o *software*. Depois apresentei para os alunos as imagem de figuras geométricas aleatórias, perguntando o que todas aquelas figuras tinham em comum os alunos responderam "Dimensões", "Retas", "Figuras Geométricas". Diante dos comentários, questionei: o que são figuras geométricas? pude notar que os alunos não sabiam o conceito de figuras geométricas, ao que alguns falaram que sabiam o que eram, mas não sabiam definir o conceito do que realmente é figura geométrica. Outros já diziam que eram todos os tipos de figuras que existem no espaço. Defini que figuras geométricas são elementos com formas, tamanhos e dimensões no plano e espaço, aos quais muitos perguntaram "é só isso?" "Nossa como eu não sabia disso!"Em seguida apresentei aos alunos as principais figuras geométricas e perguntei o conceito de cada uma, momento em que iniciei as construções das figura geométricas no *software* GeoGebra.

3.0.1 Construção do triângulo qualquer

Para a construção do triângulo qualquer, perguntei para os alunos qual era a definição, na qual eles responderam "são figuras que possuem três lados professor?" "são figuras que tem três lados iguais?", o qual apresentei para eles que um triângulo qualquer possui todas as medidas do seus lados diferentes.

Na construção do triângulo qualquer utilizando a régua e compasso, os alunos não conseguiram construir, momento em que apresentaremos algumas imagens tiradas das construções dos alunos. Na Figura 3.1, o aluno construiu uma reta com os pontos A e B, logo em seguida disse que construiu uma circunferência com centro em A de raio qualquer, marcou um ponto C na circunferência que construiu, com isso, os segmentos AB e BC. Argumentei que estava errado pois ele não poderia marcar o ponto C na circunferência e sim construir o ponto C pela intersecção de outra circunferência de raio qualquer com centro em B.

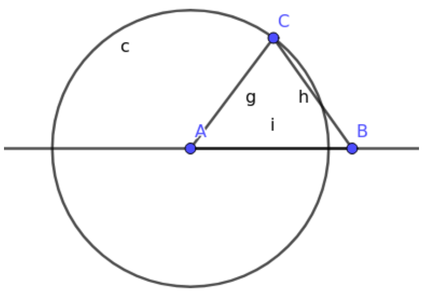


Figura 3.1: Construção triângulo qualquer 1.

A segunda figura, Figura3.2, o aluno construiu uma reta com os pontos A e B, sendo que com centro em A construiu a circunferência de raio AB, logo em seguida argumentou que era impossível construir um triângulo utilizando régua e compasso.

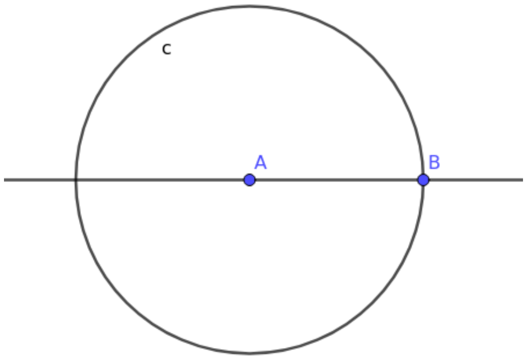


Figura 3.2: Construção triângulo qualquer 2.

Na Figura 3.3, o aluno apenas concluiu que para construir um triângulo qualquer bastava construir três retas diferentes. Disse a ele que a ideia dele não estava errada, pois com três pontos não colineares podemos construir um triângulo, embora argumentei que é preciso utilizar o compasso para construir os pontos não colineares, pois nas construções deve-se usar o compasso.

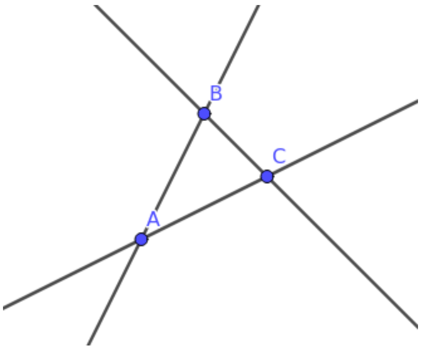


Figura 3.3: Construção triângulo qualquer 3.

Um fato interessante que aconteceu, foi que três alunos construíram uma mesmas figura, a Figura 3.4, concluindo que não sabia como construir, mas que precisava de pelo menos duas circunferências para traçar os pontos. O problema foi que os alunos construíram essas circunferências de forma que elas não se intersectavam, portanto, não obtendo nenhum ponto.

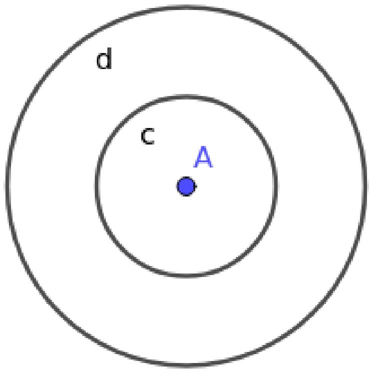


Figura 3.4: Construção triângulo qualquer 4.

Na construção do triângulo equilátero, perguntei aos alunos o que era um triângulo equilátero, os quais responderam "possui todos os lados diferentes professor?," "possui todos os ângulos iguais?" "eu achei que só existia o triângulo qualquer e o retângulo, não sabia que tinha esses nomes". Na figura abaixo apresentamos a construção de um aluno.

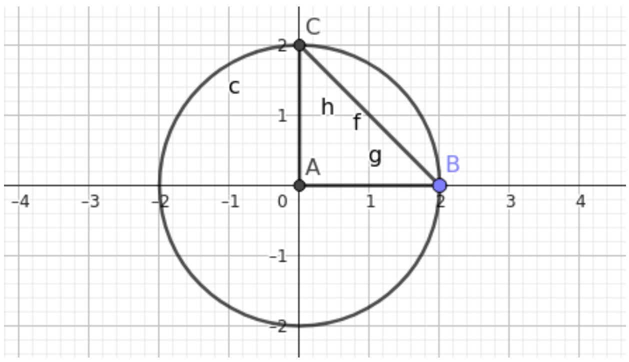


Figura 3.5: Triangulo equilátero 1.

O aluno concluiu que para construir um triângulo equilátero, bastava construir uma circunferência de raio 2 cm, observar que essa circunferência se interceptará em dois pontos C e B, sendo que, com isso, ele traçou os segmentos BC, AC e AB e concluiu que o triângulo era equilátero, pois as medidas dos raios eram todas iguais. Ele pensava que raio era todo segmento que se pode traçar dentro da circunferência, ligando as bordas ou centro, e por isso a consequência dos raios de uma circunferência eram todos iguais, pois estava dentro dela. Expliquei para ele que a figura dele estava errada, pois o lado BC não era o raio e tinha medidas maiores que os raios AB e AC, ao que defini para ele que raio é a distância da borda da circunferência ao centro neste, caso o A.

Na Figura 3.6, os alunos perguntaram qual seria uma ideia para a construção do triângulo equilátero, da qual falei que deveria ter no mínimo duas circunferências, logo um aluno construiu uma reta e duas circunferências com raios diferentes.

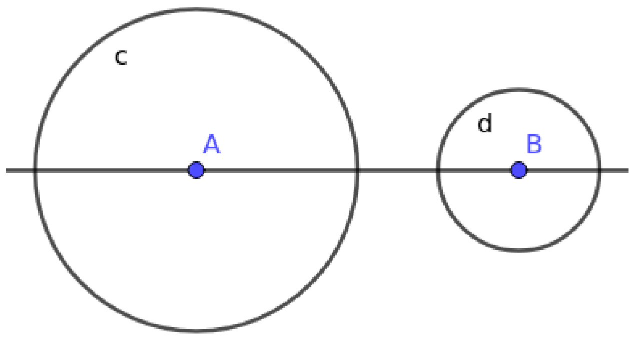


Figura 3.6: Triângulo equilátero 2.

Observe que o aluno construiu duas circunferências de raios distintos e de tal maneira que não se interceptassem, sendo impossível construir um triângulo equilátero. Depois de várias tentativas dos alunos, eles perceberam que para construírem um triângulo equilátero, precisavam de duas circunferências que se interceptassem, e as duas de mesmo tamanho, ou seja, mesmo raio, como mostra a construção de um aluno, Figura 3.7, em que ele construiu uma circunferência de raio qualquer com centro no ponto A se intersectando em um ponto B, logo em seguida construiu uma outra circunferência de mesmo tamanho da primeira com centro em B e ligou os segmentos de intersecção.

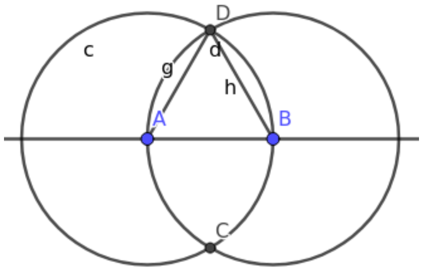


Figura 3.7: Triângulo equilátero 4.

3.0.2 Construção do quadrado

Para construção do quadrado, primeiro perguntei os alunos qual era a definição do quadrado, sendo que todos responderam que o quadrado possuía todos os lados iguais, mas não sabiam quanto media cada ângulo do quadrado. Defini que todo quadrado, além dos lados, possuía também todos os ângulos iguais a 90°.

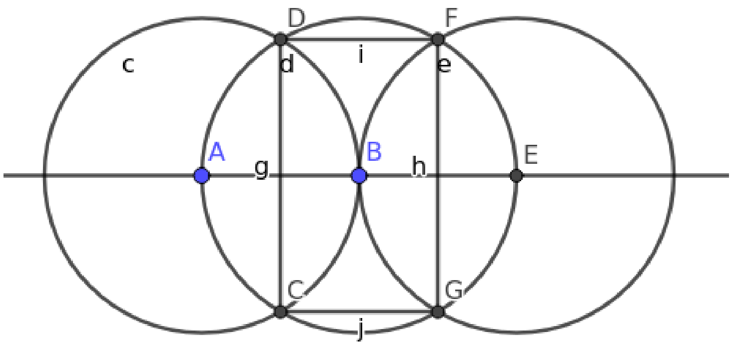


Figura 3.8: Construção quadrado 1.

Na construção do quadrado, a Figura 3.8, o aluno construiu uma reta, em seguida construiu uma circunferência de centro em A de raio AB, depois construiu outra circunferência com centro em B de raio AB, ao que essas duas circunferências interceptarão em dois pontos D e C. Em seguida, o aluno construiu uma outra circunferência de raio AB com centro em E, ao passo que essa nova circunferência se intersectará com a circunferência construída anteriormente em dois pontos F e G. Depois disso o aluno ligou os segmentos DF, DC, CG, FG e concluiu que era um quadrado, pois todos os ângulos tinham 90°. Expliquei para ele a definição novamente do quadrado, onde o mesmo concluiu que sua figura estava errada pois possuíam lados diferentes, e que, portanto, a figura não era um quadrado e sim um retângulo.

Na segunda figura, agora a Figura 3.9, o aluno construiu uma reta, e com centro em A, fez uma circunferência de raio AB. Depois, com centro em B, fez outra circunferência de mesmo raio e marcou os pontos G, H, I, J e ligou os segmentos, concluindo que era um quadrado.

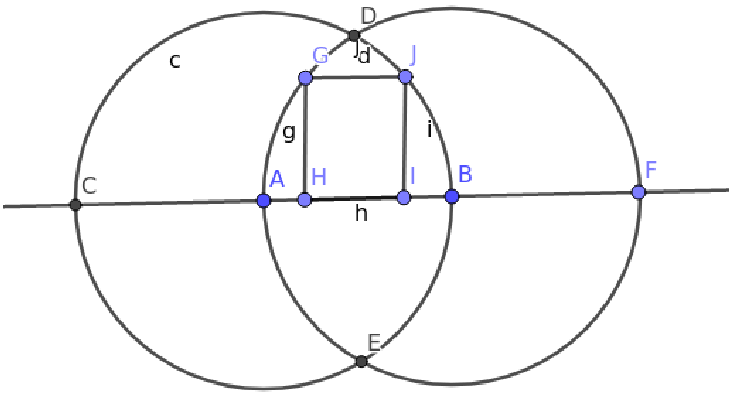


Figura 3.9: Construção quadrado 2.

Expliquei para ele que os pontos que G e J que ele tomou das duas circunferências deveriam ser construído pelas intersecções. Na construção do quadrado, pude observar que nenhum aluno conseguiu construir, sendo que alguns disseram que sabiam a definição, mas não a construção.

3.0.3 Construção do retângulo

Antes da construção do retângulo, perguntei para os alunos qual era a definição, ao que alguns alunos responderam que o retângulo era parecido com o quadrado, porém possui alguns tamanhos diferentes do quadrado.

Então peguntei sobre os ângulos do retângulo os alunos perguntaram: é o mesmo do quadrado professor? Respondi que sim e na sequência defini o que é um retângulo. Na construção do retângulo, diferente do que aconteceu na construção do quadrado, pude observar que a maioria dos alunos conseguiram construir. Na Figura 3.10, mostro a construção de uma aluna. Ela construiu uma reta e nela fez uma circunferência de raio AB. Depois, com centro em B, ela fez uma outra circunferência de mesmo raio AB, obtendo o ponto C. Em seguida a aluna construiu uma outra circunferência com centro em C de raio AB, em que as três circunferência se interceptarão onde obtemos os pontos D, E, F, G, em que, por fim, a aluna ligou os segmentos.

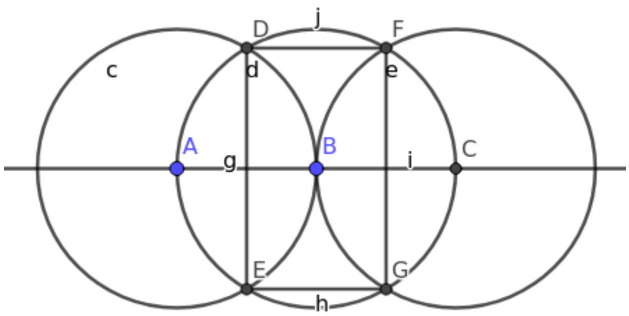


Figura 3.10: Construção do retângulo 1.

Na segunda construção, a da Figura 3.11, o aluno construiu uma reta com os pontos A e B, onde com centro em A, fez uma circunferência de raio AB, em seguida fez uma outra circunferência com centro em B de raio AB, ao que essas duas circunferência se interceptarão em dois pontos C e D. Depois, o aluno construiu a reta passando por C, e então tomou dois pontos dessa reta F e G , depois trançando os segmentos, uniu esses pontos.

Expliquei para o aluno que a ideia dele não estava errada, porém, a reta que ele fez tinha que ser paralela, e os pontos F e G que ele tomou da reta, tinham que ser construído por meio das intersecções.

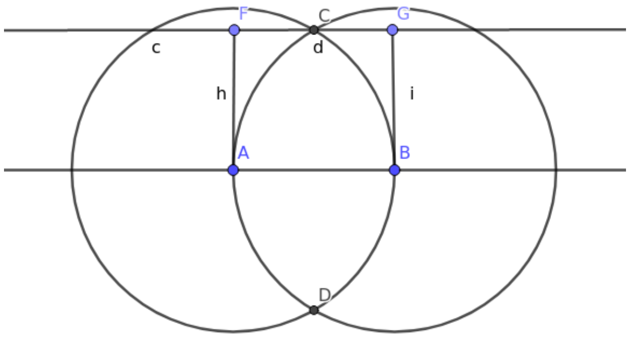


Figura 3.11: Construção do retângulo 2.

3.0.4 Construção do paralelogramo

Sobre o paralelogramo, pude perceber que nenhum aluno sabia a definição, mas assim que defini, os alunos falaram que sabiam o que era, mas não a definição. Observe, na Figura 3.12, que um aluno construiu dois triângulos equiláteros, justificando que era um paralelogramo.

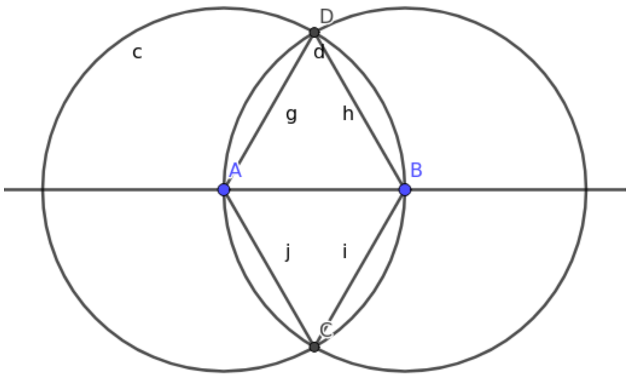


Figura 3.12: Construção paralelogramo 1.

Argumentei para ele que o paralelogramo possui dois lados opostos congruentes, que na figura ele construiu, todos os lados eram congruentes, particularizando para o caso do losango.

3.0.5 Construção do trapézio

Um fato interessante que pude perceber na construção do trapézio, foi o fato de que os alunos não sabiam a definição do trapézio, mas sabiam construir através da imagem mostrada no slide. Os alunos perceberam que para construir o trapézio era preciso construir uma reta e três circunferências de mesmo raio como mostra a Figura 3.13.

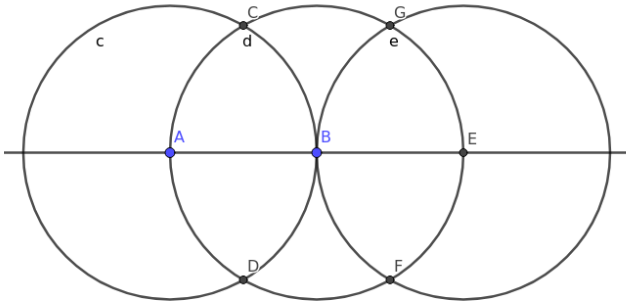


Figura 3.13: Construção do trapézio 1.

O aluno ligou os segmentos AC, CG, GE, como mostra a Figura 3.14.

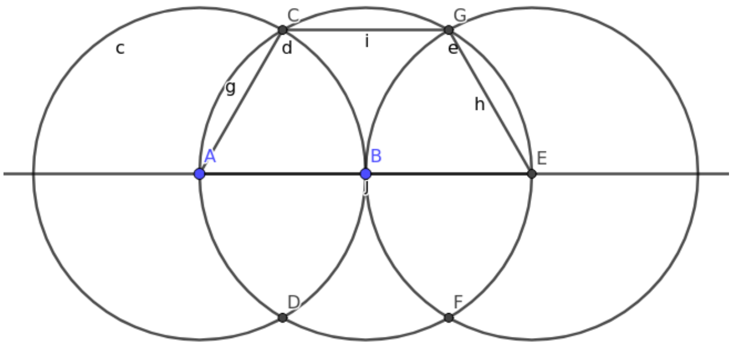


Figura 3.14: Construção do trapézio 2.

Segundo os alunos, essa foi a construção mais fácil de fazer, pois como eles já haviam construído, várias circunferências da Figura 3.13, apenas concluíram que precisava traçar os segmentos de maneira que forme um trapézio.

3.0.6 Construção da circunferência

Perguntei aos alunos qual era a definição de uma circunferência, e nenhum aluno soube responder a definição exata, ao que disseram que a circunferência é um círculo e tinha um ponto central. Para a construção da circunferência, os alunos disseram que era impossível construir pois no GeoGebra a circunferência já é dada. Assim sendo, mostrei para eles como se faz a construção. Como mostra a Figura 3.15, tomamos um ponto A, e com centro em A definimos o raio e construímos nossa circunferência.

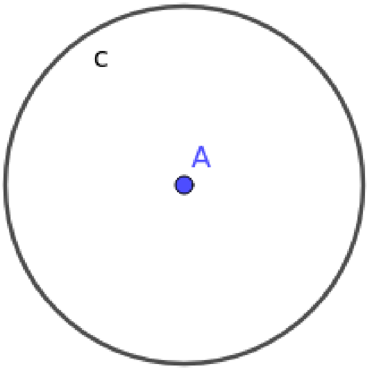


Figura 3.15: Construção da circunferência 1.

3.1 Perímetros de figuras planas

No cálculo de perímetros de figuras planas, primeiramente perguntei aos alunos o que era perímetro de uma figura plana, no qual responderam: "é a parte da medida de fora?," "é a medida de dentro?," "é a soma dos lados?," "é a parte do cercado?."Pude observar que os alunos tinham um pouco de entendimento sobre perímetros e áreas de figuras planas, mas não sabiam diferenciar uma da outra, logo dei a definição para eles e depois calculamos o perímetro do quadrado, triângulo e do trapézio. Para calcular o perímetros dessas figuras considerávamos um seguimento de medida $1cm$.

3.1.1 Perímetro do quadrado

Considerando um quadrado de lado 4 cm, o objetivo era calcular o perímetro desse quadrado como mostra a Figura 3.16

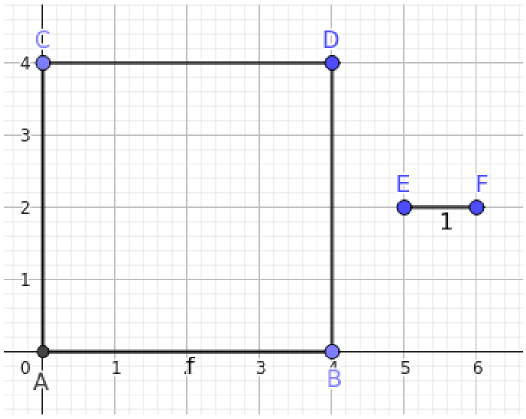


Figura 3.16: Quadrado 1.

Perguntei aos alunos qual seria uma maneira de calcular o perímetro, sendo que eles observaram que se preenchesse o quadrado com os segmento de $1cm$ envolta do quadrado e somar quantos segmentos foram utilizados, então se teria o perímetro do quadrado. De maneira análoga, calculamos o perímetro do triângulo e trapézio. No final dessa aula, os alunos concluíram que se tiver uma figura com n lados basta somar todos os lados e que teremos o perímetro dessa figura.

$$P_n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_n.$$

3.2 Cálculo de áreas

No cálculo de áreas de figuras planas, perguntei aos alunos o que é a área de uma figura plana, no qual eles responderam que é a parte de dentro da figura. Antes de começar os cálculos das áreas das figuras, perguntei para os alunos se eles sabiam o que era um axioma, no qual eles responderam que não sabiam, foi onde expliquei para eles que axioma é uma verdade absoluta, e com isso, defini para eles o axioma da área do quadrado de lado 1 cm: "área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 cm^2."

3.2.1 Área do retângulo

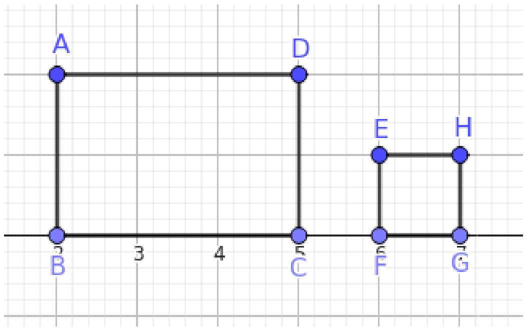


Figura 3.17: Retângulo.

Na Figura 3.17, era para calcular a área do retângulo de lado 2 cm e 3 cm utilizando o quadrado de área 1 cm^2, onde pude observar que alguns alunos não conseguiram entender como iriam calcular a área do retângulo utilizando a área do quadrado. Uma aluna concluiu que se ela contasse quantos quadradinhos cabia dentro do retângulo e multiplicasse pela área do quadrado de 1 cm^2 encontraria a área do retângulo. Outro aluno concluiu que o total de quadradinhos que ele conseguisse colocar dentro do retângulo e somasse todos eles, obteria a área do retângulo. Com isso defini a fórmula de cálculo de área de um retângulo:

$$A_r = bh, \text{onde } b \text{ é a base e } h \text{ a altura.}$$

3.2.2 Área do triângulo

No cálculo da área do triângulo, como mostra a Figura 3.18, a aluna concluiu que para calcular a área do triângulo era necessário preencher o triângulo com quadradinhos de área $1cm^2$, como no caso do retângulo.

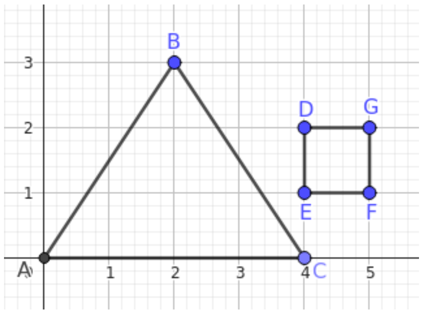


Figura 3.18: Área do triângulo 1.

Pela Figura 3.19, a aluna concluiu que poderia calcular a área do retângulo $QBKA$ e dividir por dois e calcular a área do retângulo $BTCK$ e dividir por dois e que, somar os valores dessas resposta seria a área do triângulo ABC. Com isso, eu perguntei como ela chegou nessa conclusão, ela disse que se observamos os retângulos $QBKA$ e $BTCK$ e dividisse a área de cada um por dois iriamos obter a área dos triângulos, a partir dos retângulos. Depois, somando esses triângulos, é exatamente a área do triângulo ABC. Com o término de cálculo de áreas do triângulo, mostrei para os alunos a fórmula

$$A = \frac{bh}{2}, \text{ onde } b \text{ é base e } h \ a \text{ altura.}$$

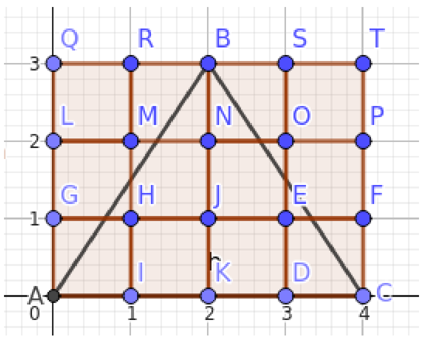


Figura 3.19: Área do Triângulo 2.

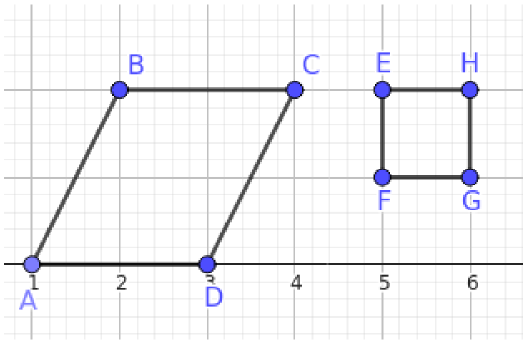


Figura 3.20: Área do paralelogramo 1.

3.2.3 Área do paralelogramo

Um aluno concluiu que para achar a área do paralelogramo, a partir do exposto na Figura 3.20, o primeiro passo era preencher o paralelogramo com $ABCD$ com vários quadradinhos $EHGF$ de área $1cm^2$, como mostra a Figura 3.21.

A conclusão dele foi que ao preencher o paralelogramo com os cubinhos e tirasse as áreas dos triângulos ANB e DCJ iria obter a área do paralelogramo. Ao terminar os cálculos de áreas do paralelogramo mostrei para eles a fórmula

$$A_p = b \cdot h, \text{ onde } b \text{ é a base } h \text{ altura.}$$

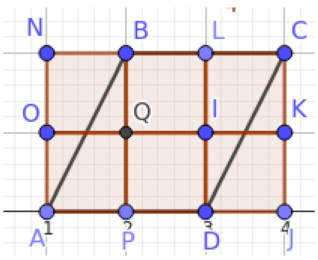


Figura 3.21: Área do paralelogramo 2.

3.2.4 Área do trapézio

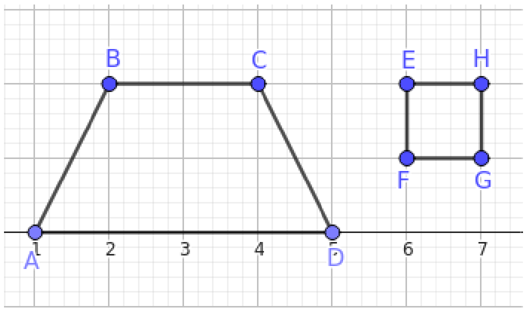


Figura 3.22: Área do trapézio 1.

, a partir do exposto na Figura 3.22, aluno percebeu que se ele preenchesse o trapézio com quatro quadradinhos de $1cm^2$, ele iria obter a área do quadrado, como mostra a Figura 3.23.

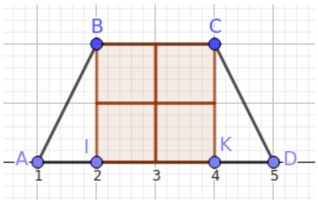


Figura 3.23: Área do trapézio 2.

Com isso, o aluno observou que para calcular a área do trapézio era necessário calcular a área dos triângulos ABI e KCD. Ele observou que se calculasse a área de dois quadradinhos e dividisse por dois, seria as áreas dos triângulos ABI e KCD, como mostra a Figura 3.24.

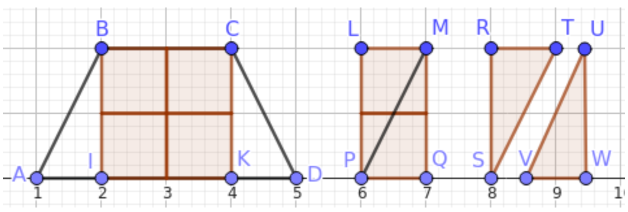


Figura 3.24: Área do trapézio 3.

Sua conclusão foi que para calcular a área do trapézio $ABCD$, bastava somar a área do quadrado $BCKI$ e dos dois triângulos RTS e VUW.

Já para outra aluna, para construir a área do trapézio, era necessário preencher o trapézio com os quadradinho de área $1cm^2$.

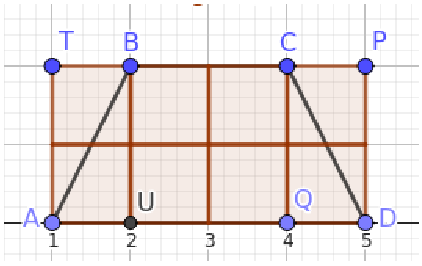


Figura 3.25: Área do trapézio 4.

Logo após, seria necessário tirar a área dos triângulos ATB e CPD, e que se somasse as áreas desses dois triângulos, iria obter um retângulo $VZKW$ de área $2cm^2$.

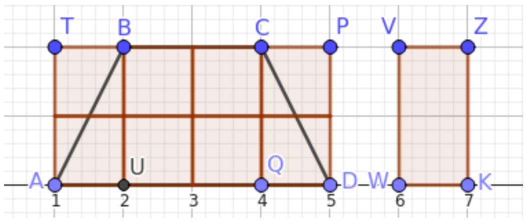


Figura 3.26: Área do trapézio 5.

Com isso, subtraindo, como a Figura 3.26 a área do retângulo menor $VZKW$ com a área do retângulo mair $TPDA$ iria encontrar a área do trapézio $ABCD$. Ao final deduzimos a fórmula para calcular a área de um trapézio:

$$A_t = \frac{(B+b)\cdot h}{2}, \text{ onde } B = base\ maior,\ b = base\ menor, h = altura$$

3.3 Volumes dos sólidos geométricos

No cálculo de volumes dos sólidos geométricos, perguntei para os alunos o que era o volume de um sólido geométrico, ao que responderam que poderia ser a soma das áreas das figuras, onde pude observar que os alunos não sabiam a definição de volume de um sólido. Na sequência, defini para eles o que é volume de um sólido, antes de dar início os cálculos de volume, expliquei para eles o axioma que o volume de um cubo de lado $1cm$ é igual a $1cm^3$.

3.3.1 Volume do cubo

Antes de calcular o volume do cubo perguntei aos alunos qual era a definição de um cubo, e muitos alunos responderam "é um quadrado em 2D", "é um quadrado com seis lados", "eu sei o que é mais não sei definir." Assim sendo, defini o volume do cubo para eles. Observando a Figura 3.27, a ideia era para os alunos calcular o volume do cubo $ABEHCGDF$ de lado $2cm$, considerando o cubinho de volume $1cm^3$.

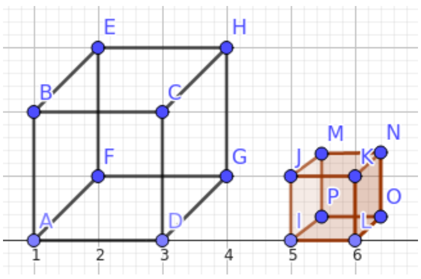


Figura 3.27: Volume do cubo 1.

Alguns dos alunos concluíram, mediante a Figura 3.28, que era possível colocar oito cubinhos de $1cm^3$ dentro do cubo $ABEHCGDF$.

Depois dos cálculos dos alunos do volume dos cubos, mostrei a fórmula para eles de como calcular o volume de um cubo:

$$V = a^3, \text{ onde } a \text{ é o comprimento, largura e altura.}$$

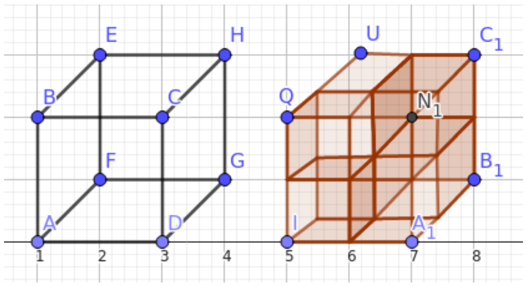


Figura 3.28: Volume do cubo 2.

3.4 Volume do prisma

Antes de calcular o volume de um prisma, perguntei aos alunos qual era a definição de um prisma, ao que pude perceber que os alunos não sabiam o que é um prisma, muito menos a definição. Então defini para eles, sendo que muitos deles disseram que nunca tinha ouvido falar em prisma, mais já tinha conhecimento da figura quando mostrei no slide.

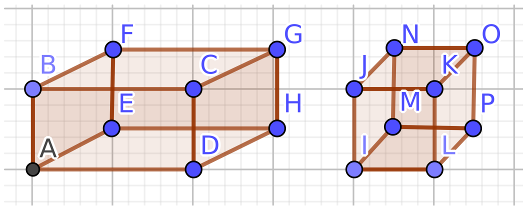


Figura 3.29: Volume do prisma 1.

Observando a Figura 3.29, a conclusão dos alunos para calcular o volume do prisma de altura $1cm$ e largura $2cm$, foi que se colocassem 2 cubos de volume $1cm^3$ e somasse o volume desses cubos, seria o volume do prisma $ABFEGHCD$. Com isso, defini para eles a fórmula do cálculo do volume de um prisma retangular.

$$A = bhc \text{ ,onde } b \text{ é a base, } \; h \text{ altura, } c \text{ comprimento.}$$

Depois de explanar as atividades das oficinas em si, passamos para uma análise mais qualitativa. O diagnóstico era composto por 13 questões, sendo que a questão 1 tinha como objetivo analisar se os alunos sabiam o conceito do que são figuras geométricas. A questão 2 tinha por finalidade saber se os alunos já realizaram construções de figuras geométricas por meio de régua e compasso. A questão 3 tinha o intuito de analisar se os alunos já usaram o *software* GeoGebra. Na questão 4, o objetivo foi saber se os alunos sabiam construir um triângulo qualquer por meio de régua e compasso. As questões 5 e 6 tinham o objetivo de saber se os alunos conheciam a definição do triângulo equilátero e construir com régua e compasso. Nas questões de 7 e 8, o intuito era saber se os alunos sabiam a definição de perímetro de uma figura geométrica e o cálculo do perímetro de um quadrado de lado 1 cm. Nas questões de 9 à 11, os objetivos eram saber se os alunos conheciam a definição de área de uma figura geométrica e os cálculos de áreas do triângulo e trapézio. Por fim, as questões de 12 e 13 tem por objetivo analisar se os alunos sabiam definir volume de uma figura geométrica e cálculo do volume de uma figura geométrica.

O primeiro diagnóstico foi aplicado e recolhido no mesmo dia pela professora regente, onde 17 alunos responderam. Como foi mencionado, a questão 2 tinha o intuito de saber se os alunos já fizeram construções de figuras geométricas utilizando régua e com passo, e analisando as respostas, nenhum aluno nunca havia construído figuras geométricas por meio de régua e compasso. Olhando para as respostas da questão 3, nenhum aluno nunca utilizou o GeoGebra e relataram que também não conhecia o *software* matemático. A Tabela 3.1 representa os acertos, erros e respostas em branco do primeiro diagnóstico aplicado.

QUESTÕES	**ACERTOS**	**ERROS**	**BRANCOS**
1	0	0	17
2	-	-	-
3	-	-	-
4	2	14	1
5	0	15	2
6	0	7	10
7	5	8	4
8	0	17	0
9	0	17	0
10	0	16	1
11	0	17	0
12	1	13	3
13	0	0	17
TOTAL	**8**	**124**	**55**

Tabela 3.1: Dados do diagnóstico obtidos na primeira aplicação.

Na segunda aplicação do diagnóstico, 16 alunos responderam. A Tabela 3.2 mostra os resultados obtidos. Comparando essa tabela com a tabela 3.1, pude notar um alto índice de acertos dos alunos na questões, já que na primeira Tabela obtemos um total de 8 acertos, 124 erros e 55 questões deixadas em brancos, e na segunda Tabela podemos notar que temos um alto índice de acertos sendo, 60, além de 24 erros e 42 questões deixadas em brancos, o qual foi um alto ganho em relação a primeira tabela.

A título de curiosidade, na questão 7 dois alunos responderam diferente dos outros nove alunos. Considerei tanto do aluno A, quanto do aluno B, como certa, até mesmo pela turma quase toda estar já há um bom tempo sem estudar, sendo alunos pais de família etc. Não exigi muito dos alunos nessa questão, até por que a ideia central era saber se o aluno tinha entendido as definições.

Aluno A

"O perímetro de uma figura plana é a soma do contorno."

Aluno B

"O perímetro de uma figara é a soma das bordas."

Já os outros nove alunos responderam de uma maneira mais formal, matematicamente falando.

"Perímetro de uma figura plana é a soma de todos os lados dessa figura"

Na questão 5 dois alunos sabiam a definição de triângulo equilátero e isósceles, porém não sabiam qual era ao certo os triângulos.

Aluno K

"Triângulo Equilátero possui dois lados iguais, já o isósceles possui todos os lados iguais."

Observando a resposta desse aluno, ele sabia a definição mas não sabia diferenciar uma da outra.

QUESTÕES	**ACERTOS**	**ERROS**	**BRANCOS**
1	4	2	11
2	-	-	-
3	-	-	-
4	4	13	0
5	9	7	1
6	8	1	8
7	11	6	0
8	0	17	0
9	7	10	0
10	5	11	1
11	9	6	2
12	3	10	3
13	0	1	16
TOTAL	**60**	**84**	**42**

Tabela 3.2: Dados do diagnóstico obtidos na segunda aplicação.

Comparando as duas tabelas anteriores em forma de gráficos temos,

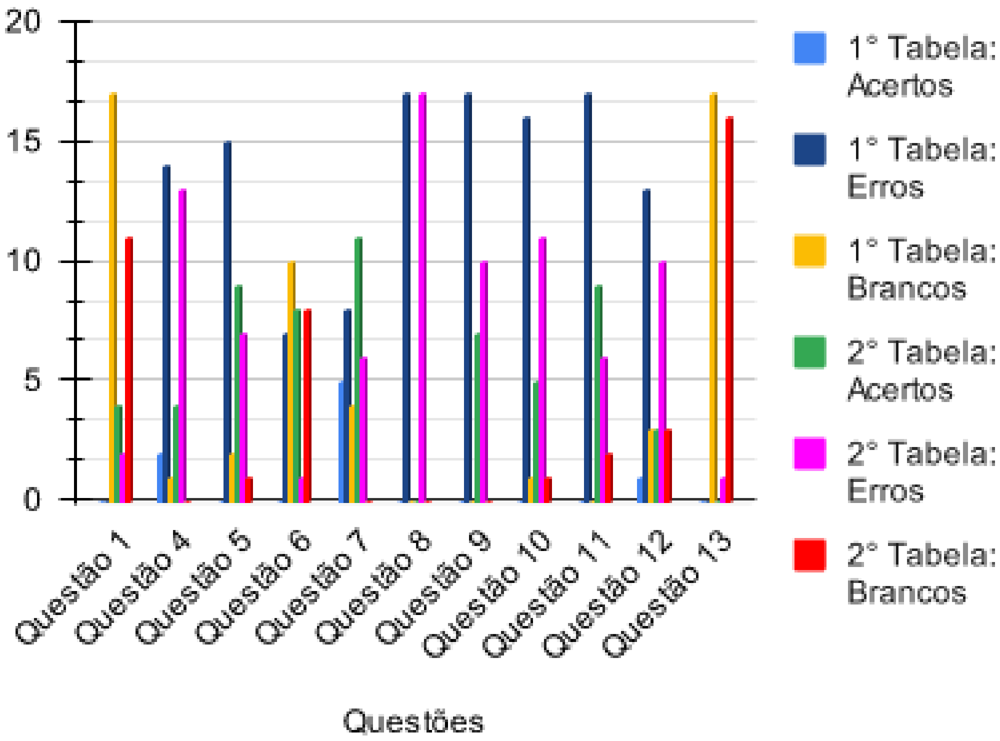


Figura 3.30: Comparação entre as duas tabelas.

Diante de todos esses dados, pude perceber que, ao final da oficina aplicada, obtemos um avanço muito grande em relação aos conteúdos que exploramos. Em relação a observação da turma durante a aplicação da oficina, teve uma melhora muito boa, pois os alunos não tinham muita maturidade matemática, como os dados tem as nos dizer. Além disso, podemos perceber, no primeiro diagnóstico, uma defasagem muito grande dos alunos sobre as figuras elementares e cálculos de perímetros, áreas e volumes, além das construções dessas figuras por meio de régua e compasso com auxilio do *software* GeoGebra que foi algo novo para eles, que alegaram não saber construir figuras com régua e compasso, mais ao final da, oficina perceberam que não era tão difícil assim, e que o *softaware* GeoGebra era muito interessante para fazer as construções.

Importante ressaltar que alguns alunos, no início da aplicação da oficina, não estavam muitos interessados pela oficia, mas ao longo da aplicação pude perceber que eles estavam muitos animados, ainda mais quando era para construir as figuras e cálculos de áreas, pois se sentiam desafiados. Foi muito gratificante ver, no decorrer da oficina, a interação dos alunos um com o outro e a maturidade que adquiriram ao manusear o *software* pois, a proposta do uso do GeoGebra na aplicação dessa oficina, foi com o objetivo de se ensinar geometria de uma maneira dinâmica e diferente, saindo um pouco do quadro e giz, o que foi algo muito interessante, também, para mim como aluno.

Apesar de alguns imprevistos que aconteceram no decorrer da oficina, como o fato de alguns computadores desligando e travando, no final deu tudo certo. Além disso, o tempo da oficina ficou um pouco corrido, pelo tempo que foi estimado de quatro aulas, algo que na próxima aplicação dessa oficina como futuro professor, eu mudaria, deixando um tempo maior para as construções.

Ao final desse trabalhos tive alguns *feedbacks* muito importantes, o que me deixou ainda mais animado.

Aluno X

"Essa atividade foi muito interessante pois pude ver as definições das figuras geométricas e construir cada uma delas, o que fixou ainda mais na minha cabeça."

Aluno Y

"Foi bem legal pois eu não sabia que tinha como construir as figuras por meio de régua e compasso."

Aluno Z

"Entendia o conceito de áreas somente pelas fórmulas agora entendo o que calcular áreas."

Foi algo bem positivo, tanto para mim quanto para a professora regente, que, ao término das oficinas, me falou que foi uma atividade diferente, pelo fato de ter usado o compasso, régua e o computador o que cativou nos alunos a vontade de aprender.

Para mim, foi importantes ouvir esses *fedbacks* pois isso, junto com todos os dados obtidos nesse trabalho, mostra que o auxilio do *softaware* GeoGebra, assim como as construções geométricas com régua e compasso, no ensino de Geometria, deixa a aula de matemática mais dinâmica e atrativa. Além disso, mostra para os alunos que a geometria não é uma disciplina tão difícil assim como se quer alguns e algumas.

Considerações Finais

Diante de tudo que foi exposto nesse trabalho, cujo o objetivo central foi apresentar aos alunos definições das principais figuras elementares, e dos cálculos de perímetros, áreas e volumes dessas figuras sem a utilização de fórmulas, nossa avaliação é de que esse objetivo foi cumprido. O intuito dessas atividades, foi fazer com que os alunos, de fato, entendessem o que é realmente calcular perímetro, área e volume das figuras, até porque, foi somente ao final dos cálculos dos alunos que apresentei a fórmula de como calcular perímetros das figuras, áreas e volumes. Além disso, construímos todas as figuras elementares no *software* GeoGebra, com o intuito dos alunos aprenderem as construções.

Como já foi mencionado, apesar que no começo da aplicação da oficina alguns alunos estivessem desinteressados, pois falaram que era muito difícil construir as figuras, no decorrer eles começaram a pegar o jeito de construir algumas figuras e ficaram muito animados. Foi muito gratificante ver que os alunos estavam se interagindo e conseguindo construir algumas figuras, e entendendo os conceito de perímetros, áreas e volumes.

Apesar de alguns alunos não conseguirem realizar algumas construções como foi mostrado no decorrer desse trabalho, foi um ganho também, pois através dos erros que cometiam, aprendiam algum conceito de geometria, como por exemplo, um aluno construiu uma circunferência dentro da outra formando então duas circunferências concêntricas. Aproveitei a oportunidade para falar disso com eles.

A aplicação da oficina utilizando régua e compasso, como mostra os resultados obtidos, foi de suma importância para se ensinar geometria, pois foi uma oportunidade dos alunos, inclusive, conhecerem o compasso. Muitos alunos nunca tinham manuseado um compasso, o que achei muito estranho, dada uma ferramenta tão importante e os alunos nunca tivessem usado no ensino fundamental, o que mostra o quão negligenciado está o ensino de geometria, talvez pelos fatores que o ensino de geometria vivenciou no século XX, como diz Pavanello (1993), onde o foco não era a geometria e sim a agroindústria, o que pode ter interferido até nos dias atuais o ensino dessa disciplina tão importante, bem como a escassez do uso da régua e compasso.

Por fim, enquanto aluno do curso de licenciatura em matemática, foi muito gratificante realizar esse trabalho, em poder ver os alunos entenderem os conceitos e definições. Também pelo entusiamo dos alunos ao realizar as construções no GeoGebra, apesar de nem todos conseguirem construir no início. Mesmo com os erros, acredito, que de algum maneira, aprendiam algum conceito matemático na aplicação das oficinas.

A realização desse trabalho, sem dúvida, contribuiu bastante para minha formação, pois pude ter a experiência de aplicar na oficina, algo que nunca tinha realizado antes, e obter bons resultados! Com isso, gostaria de concluir esse trabalho dizendo que valeu muito a pena realizá-lo, como mostra os resultados e a gratidão de ver os alunos entenderem os conceitos da geometria, algo que muitas das vezes passa no decurso das aulas tradicionais.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Ceará: Sbm, 2007. 280 p.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Versão final. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL, M.E.C e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos da Matemática Elementar**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013a. 468 p.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos da Matemática Elementar**: geometria espacial. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013b. 484 p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011. 849 p.

FAINGUELERNT, E.K. **O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus**. A

Educação Matemática em Revista. SBEM, nº 4, p.45. Blumenau. 1º semestre, 1995.

FONSECA, M. C. F. R. et al. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental**: Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2002.

FONSECA, A. C. F. R.; LOPES, M. P.; BARBOSA, M. G. G.; GOMES, M. L. M. DAYRELL, M. M. S. S. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

MONTEIRO, I. A. **O desenvolvimento histórico do ensino de Geometria no Brasil**. Universidade Estadual paulista Unesp – SP, 2015.

MOURA, Manoel Oriosvaldo. **A série busca no jogo: do lúdico na matemática**. In: KISHIMOTO,Tizuko Morchida.(Org.) Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. São Paulo: Cortez, 2010. p.81-98.

PAVANELLO, Regina Maria. O ABANDONO DO ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL: regina maria pavanello. **Zetetiké**, [s. l], p. 7-17, 1993. Anual.

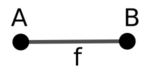
WAGNER E. **Construções geométricas. Matemática). Rio de Janeiro: SBM, 1993. (Coleção do Professor de Matemática)**. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

Apêndice

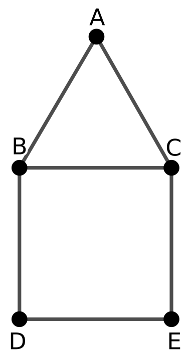
Diagnóstico Geometria

Aluno (a):
Ministrante:

1. O que são figuras geométricas?
2. Já fez construção de figuras geométricas por meio de régua e compasso? Sim ( ) , Não ( ) , Já fiz mas não aprendi ( ).
3. Já utilizou o GeoGebra? Sim ( ) , Não ( ) , Nunca vi essa ferramenta GeoGebra ( ).
4. Construa um triângulo por meio de régua e compasso de lados 3 cm , 5 cm e 6 cm.
5. Defina triângulo equilátero.
6. Considere um segmento AB = f, construa por meio de régua e compasso um triângulo equilátero de lado f.



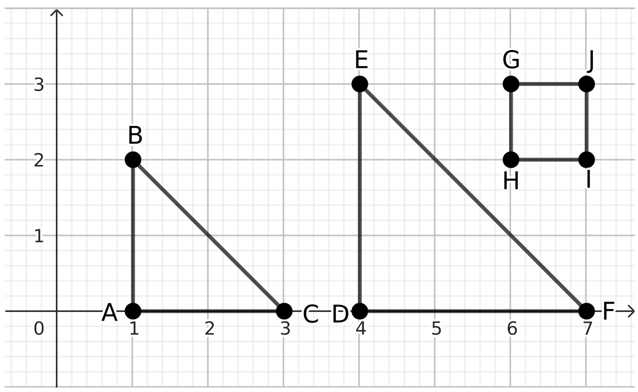
7. Defina o perímetro de uma figura geométrica.



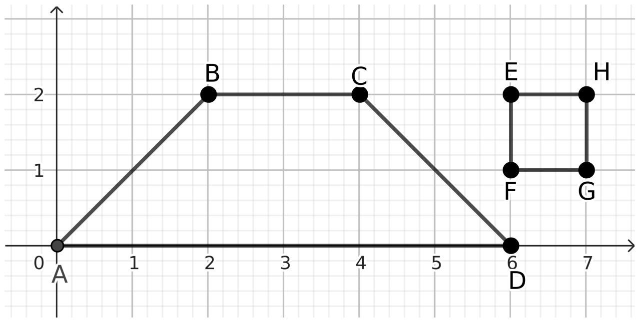
8. Considere o triângulo ABC equilátero de lado AB = 2 cm e o quadrado BCED como mostra a figura abaixo. Calcule o perímetro dessa figura.

9. Defina a área de uma figura geométrica.

10. Sabendo que o quadrado GHIJ possui lado de 1 cm e área de 1 cm^2. Calcule a soma das áreas do triângulo ABC e do triângulo DEF.



11. Sabendo que o quadrado EFGH possui lado de 1 cm e área de 1 cm^2. Calcule a área do trapézio ABCD.



12. Defina volume de uma figura geométrica.

13. Considere o cubo menor AJNMLOIK de lado 1 cm, e volume de 1 cm^3, como na figura abaixo. Calcule o volume do cubo maior GCBFHEDA de lado 2 cm.