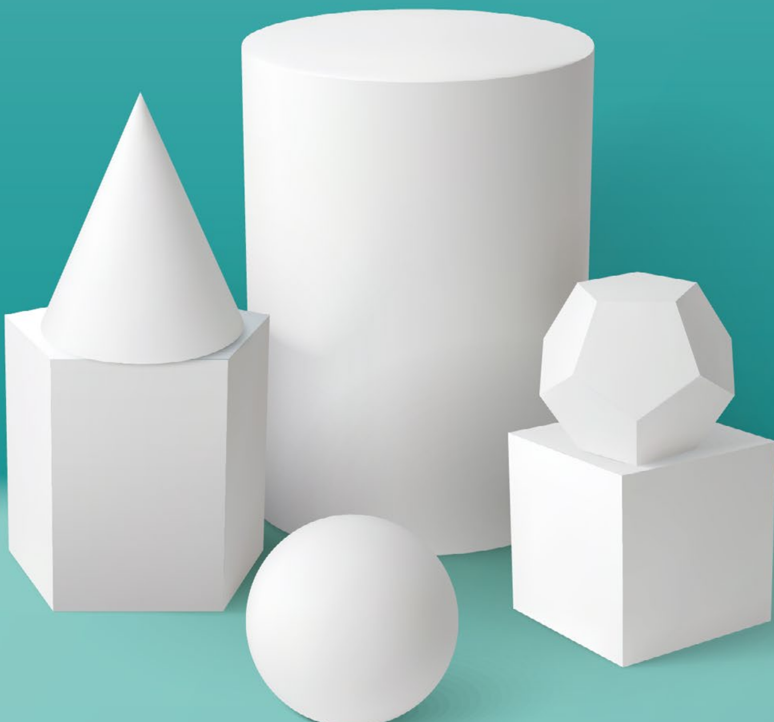
EBER OLIVEIRA SILVA
ELISABETH CRISTINA DE FARIA

GEOMETRIA ESPACIAL PARA A EJA:
UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

EXPLORANDO OS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

COM AUXÍLIO DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA



EDITORA
IF GOIANO

INSTITUTO FEDERAL
Goiano

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

GEOMETRIA ESPACIAL PARA A EJA: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

EXPLORANDO OS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM AUXÍLIO DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA

Geometria Espacial para a EJA: uma proposta pedagógica - Explorando os sólidos geométricos com auxílio do software de geometria dinâmica Geogebra © 2023 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – IF Goiano

ISBN: 978-65-87469-46-1

Revisão textual:
Bárbara Cardoso (Coelum Editorial)
Ondina Maria da Silva Macedo

Projeto gráfico e diagramação:
Varnei Rodrigues (Propagare Comercial Ltda.)

Bibliotecário responsável:
Johnathan Pereira Alves Diniz

Imagem da capa: Freepik - freepik.com

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Eber Oliveira Silva
Elisabeth Cristina de Faria

GEOMETRIA ESPACIAL PARA A EJA: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

EXPLORANDO OS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM AUXÍLIO DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA

1ª Edição

EDITORA
IF GOIANO

2023

ISBN: 978-65-87469-46-1

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas (SIBI) – Instituto Federal Goiano

S586

Silva, Eber Oliveira.

Geometria espacial para a EJA: uma proposta pedagógica explorando os sólidos geométricos com auxílio do software de Geometria Dinâmica GeoGebra / Eber Oliveira Silva; Elisabeth Cristina de Faria. – 1.ed. Goiânia, GO: IF Goiano, 2023.

122 p., il.: color.

ISBN (e-book): 978-65-87469-46-1

1. Ciências Exatas e da Terra. 2. Matemática. 3. Ensino de Matemática. 4. Geometria. 5. Educação de Jovens e Adultos. I. Faria, Elisabeth Cristina de. IV. Instituto Federal Goiano.

CDU: 514:376

Ficha elaborada por Johnathan Pereira Alves Diniz – Bibliotecário/CRB 1 nº 2376

Com imensa gratidão a Deus, à Editora IF Goiano e a todos os colaboradores e apoiadores, dedico essa obra à minha esposa Lucimar, aos meus pais Isac e Geralda, aos meus irmãos Mirson e Tânia e a todos os familiares e amigos, que sempre me apoiaram e incentivaram. De modo especial, à coautora, a quem trato carinhosamente de Profª Beth, aos professores Dr. Marcelo Almeida de Souza (IME/UFG), Dra. Vanda Domingos Vieira (PUC) e Me. Adriano Honorato Braga (IF Goiano), que fizeram uma revisão geral e contribuíram com valiosas sugestões e à Profa. Dra. Ondina Maria da Silva Macedo (IF Goiano), que nos apoiou com a revisão textual para aprimoramento desta obra.

[...]ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção.

Paulo Freire

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este livro digital interativo é uma obra original caracterizada por tratar-se de uma proposta pedagógica elaborada para alunos, fundamentada, teoricamente, em uma pesquisa bibliográfica, na qual se buscou compreender como ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos jovens e adultos, com ênfase nos principais desafios enfrentados pelo professor e pela escola e quais possibilidades poderiam potencialmente ser exploradas na pretensão de tornar significativo o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial na Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Diante do descaso com o ensino da geometria escolar, da escassez de materiais pedagógicos especificamente elaborados para a EJA e da falta de sentido que os alunos da EJA demonstram perceber na forma como os conteúdos geométricos normalmente são ensinados na escola, propomos elaborar e disponibilizar ao caro aluno da EJA – estendendo-se a outros que porventura vierem a se interessar – um material que os auxilie na compreensão de tão importantes conteúdos, de modo que os faça perceber a beleza da Geometria como ciência primordial para a compreensão do mundo que nos cerca. Nesse sentido, essa proposta traz algumas orientações importantes para o estudo de sólidos geométricos, mais especificamente direcionadas a alunos que não tiveram a oportunidade de aprofundar no estudo de Geometria Espacial, tratando esses assuntos de maneira leve, envolvente e de fácil compreensão, com uma linguagem simples e detalhada. Dessa forma, proporcionando ao leitor as condições necessárias para o estudo, valorizando seus conhecimentos prévios, respeitando seus níveis de pensamento geométrico e permitindo-lhes participar ativamente da construção do próprio conhecimento, de modo que a aprendizagem seja, de fato, significativa.

A essência desta obra é uma proposta pedagógica com exemplos de atividades no GeoGebra 3D, as quais o leitor pode propor ao seu professor explorá-las durante as aulas, caso ache conveniente, sendo que ainda terá a rica oportunidade de estudar em casa e aprimorar seus conhecimentos, principalmente em tempos nos quais o acesso presencial à escola não está tão fácil, a exemplo da fase pandêmica na qual nosso país e o mundo encontram-se momentaneamente.

CARTA AO LEITOR

Caro leitor,

Bem-vindo ao nosso estudo sobre sólidos geométricos com o auxílio do software GeoGebra.

Para facilitar sua compreensão, vamos ajudá-lo a construir, em um ambiente virtual dinâmico, sólidos geométricos que representam objetos com formas semelhantes àquelas que você pode observar em sua casa, na rua, no trabalho e em vários outros locais. Se você observar atentamente todos os detalhes de cada sólido geométrico que faz parte deste estudo, tenho certeza de que identificará muitas semelhanças com objetos que já conhece.

Se ainda não conhece o GeoGebra ou se conhece, mas tem dificuldades em trabalhar com esse programa, não se preocupe. Este material vai auxiliá-lo em todas as etapas da construção e manipulação dos objetos, de modo que, quando você menos esperar, perceberá que está aprendendo geometria de um jeito fácil e divertido.

Mesmo que no início as coisas pareçam um pouquinho complicadas, não se desanime. Se seguir todas as instruções com bastante atenção, vai perceber que as atividades são bem mais fáceis do que parecem. Para facilitar sua compreensão, as atividades são descritas passo a passo, de forma simples e detalhada. Com dedicação e paciência, você conseguirá realizar todas as atividades e aprender muitas coisas legais e interessantes.

Para que aprenda, de fato, é importante que não pule nenhuma etapa e fique atento(a) a todos os detalhes, pois, a cada passo, você descobrirá muitas informações curiosas e interessantes sobre as figuras que estiver construindo. Vá trabalhando sem pressa e aproveite para registrar suas observações para poder rever suas descobertas mais tarde. Registre também suas dúvidas e dificuldades, a fim de, posteriormente, pesquisar sobre o assunto ou tirar dúvidas com seu professor ou com seus colegas.

Tenho certeza de que você aprenderá muitas informações interessantes sobre os objetos do seu dia a dia, descobrir informações novas, divertir-se e encantar-se com a beleza da geometria.

Para complementar, inserimos vários vídeos on-line no corpo do texto para você assistir.

Bons estudos!

Os autores

PREFÁCIO

Este prefácio trouxe-me o desafio de tecer algumas palavras acerca deste livro interativo. Digo, logo, que ele é um guia que traz uma proposta fascinante na exploração de conhecimentos do meu ramo favorito na Matemática e suas tecnologias, a Geometria espacial – tudo isso usando a tecnologia por meio de um dos softwares de Geometria Dinâmica mais utilizados, o GeoGebra. Digo desafio, pois, ao ler o encantador Resumo e a Carta ao Leitor, fica bem clara a organização e a leveza na forma de apresentar um conteúdo tão belo. Pergunto-me, então, o que mais eu poderia acrescentar para apresentar esta obra? Decidi por explanar sobre a minha primeira sensação assim que recebi o livro, eu queria iniciar minha explicitação e colocá-lo imediatamente em prática. Já vou dizendo que aprendi muito ao seguir os passos indicados; e se você – quer seja, quer não aluno/professor da EJA – segui-los também, aprenderá com esta redação e excelente organização.

A cada novo objeto geométrico, é apresentada uma ilustração que pode e deve ser construída por quem quer aprender usando o GeoGebra. Além disso, ressalto os prints das telas, que funcionam como se o próprio professor Eber e a professora Elisabeth estivessem nos mostrando diretamente na tela do computador. Ainda têm os links para vídeos, reforçando a construção, de modo que nos fazem lembrar dos filmes do querido bruxinho Harry Potter, em que as imagens dos jornais e fotos com muita magia ganham movimento. Seu sucesso no aprendizado para dominar essa magia e o conteúdo de Geometria no espaço 3D vai depender apenas de sua dedicação em seguir o passo a passo.

Professor Dr. Marcelo Almeida de Souza
Instituto de Matemática e Estatística/
Universidade Federal de Goiás – IME/UFG

CAPÍTULO 1

EJA: UM DIREITO À EDUCAÇÃO A QUALQUER TEMPO

EJA: UM DIREITO À EDUCAÇÃO A QUALQUER TEMPO

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade da Educação Básica criada com o objetivo principal de promover a democratização do ensino no Brasil e destinada aos brasileiros que não tiveram condições de concluir o ensino fundamental ou o ensino médio na idade própria.

Ressalta-se que a EJA tem amparo legal na legislação vigente, conquistando maior reconhecimento após a criação da LDB, em 1996. O texto da Seção V, art. 37º, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9.394/96, reconhece a EJA como modalidade específica da educação básica e atribui ao poder público a obrigação de promover ações no sentido de viabilizar e gerir políticas de incentivo ao acesso a uma educação gratuita e de qualidade àqueles que não tiveram condições de concluir seus estudos na idade própria, conforme mencionado:

> **Art. 37º** A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria. **§ 1º**. Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
>
> **§ 2º** O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si. (BRASIL, 1996).

Em reconhecimento do grande potencial educativo da EJA, queremos motivá-lo(a), jovem ou adulto que teve poucas oportunidades de frequentar a escola, a retomar os estudos, por acreditar ser esse um meio de resgate da sua autoestima e conquista da cidadania plena, favorecido pelas relações sociais estabelecidas em um ambiente que busca atender aos seus anseios, necessidades e expectativas. Nosso desejo é que as práticas educacionais dessa modalidade de ensino tenham como personagem central você, aluno jovem, adulto ou idoso.

Por não encontrar muitas publicações especificamente elaboradas para o ensino de geometria na EJA de forma dinâmica e interativa, achamos por bem disponibilizar a você este material de estudo. Esperamos estar ajudando-o a aprender geometria de forma fácil e prazerosa.

Se deseja saber um pouco mais sobre a EJA, assista ao **Vídeo 1**.

Vídeo 1 — Saiba como funciona a EJA

Fonte[1]: EJA – Educação de Jovens e Adultos. [*S. l.*: *s. n.*], 2018. 1 vídeo (12 min). Publicado pelo canal TV BrasilGov. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=LOVhA5w_SZc&ab_channel=TVBrasilGov. Acesso em: 2 ago. 2022.

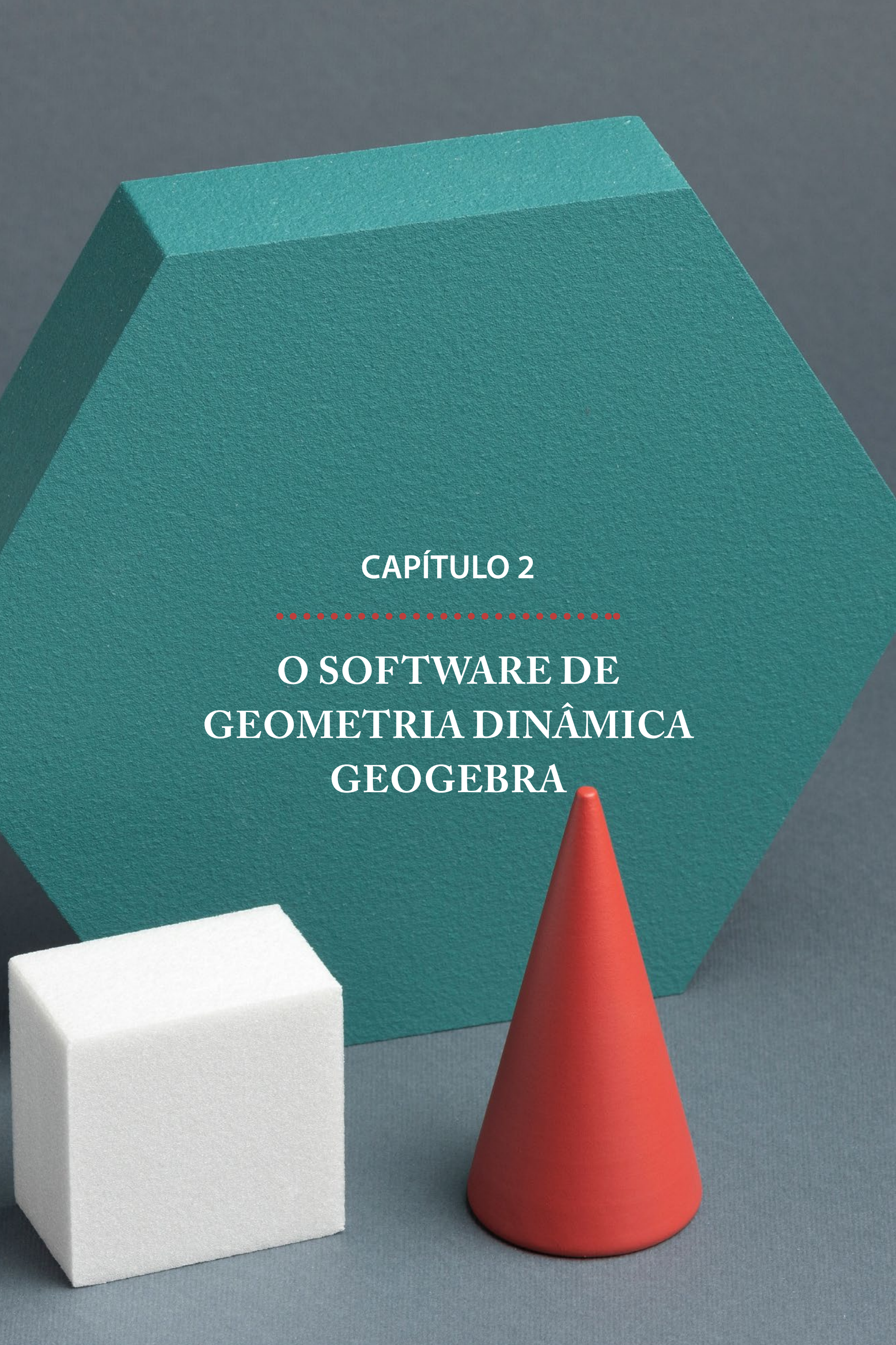
Mas... por que estudar geometria na EJA?

A geometria corresponde a um ramo da Matemática cujo estudo é fundamental para a compreensão da composição das formas existentes no mundo real, constituindo-se num vasto campo de possibilidades de investigação, reflexão, interpretação e dedução. Por favorecer a análise de fatos e o estabelecimento de ligações e relações entre elementos, o estudo da Geometria Espacial promove o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia, além da capacidade de conjecturar, sintetizar, formalizar e aplicar o conhecimento matemático.

Consideramos que você, aluno da EJA, ainda que esteja fora da escola há muito tempo, tem muita experiência de vida e plenas condições de aprender os conteúdos da forma como são tratados neste material de apoio. Acreditamos que tenha um conhecimento razoável sobre diversas formas

1 Todos os vídeos utilizados nesta obra, incluindo as imagens que os identificam, são de acesso livre e encontram-se disponíveis no YouTube. Contudo, atribuímos todos os créditos aos seus responsáveis.

geométricas presentes no seu dia a dia e que consiga identificar algumas de suas propriedades básicas. Aprender um pouco mais de geometria a partir daquilo que já sabe é muito importante para sua vida profissional e para o prosseguimento dos estudos.



CAPÍTULO 2

O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA

O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA

Em primeiro lugar, pensamos em propor atividades no GeoGebra porque as potencialidades reconhecidas nos softwares de geometria dinâmica são muito importantes para o desenvolvimento da abstração matemática, uma vez que possibilitam a análise de relações e propriedades de objetos matemáticos, bem como a formulação de conceitos, dando sentido ao estudo. No entanto, é muito importante que você utilize, além do GeoGebra, outros materiais como textos, figuras e objetos concretos. Dessa forma, perceberá várias relações e compreenderá melhor os conteúdos estudados.

As importantes descobertas proporcionadas pelo dinamismo dos softwares de geometria dinâmica revelam seu aspecto heurístico e a amplitude das possibilidades de visualização, deduções, conjecturas e provas visuais que situam o aluno em um importante cenário para a investigação, instigando-o a aventurar-se em novas descobertas, na comparação de objetos, percepção das relações entre elementos e no reconhecimento de suas propriedades. Como afirma Pereira, "as características do GeoGebra potencializam a constituição de cenários para investigação, nos quais o aluno é capaz de experimentar situações em um processo dinâmico" (PEREIRA, 2012, p. 32 *apud* SCALABRIN; MUSSATO, 2020, p. 131).

A diversidade de ferramentas disponíveis nesses ambientes permite que as características e propriedades desses objetos sejam percebidas visualmente durante cada fase da construção.

O que mais você precisa saber sobre o software GeoGebra

Criado em 2001 e atualmente utilizado em 190 países ao redor do mundo, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma, que vai ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem para todos os níveis de ensino, combinando conteúdos de geometria, álgebra, estatística e cálculo numa única aplicação. O dinamismo desse software possibilita a professores e alunos explorar, investigar, conjecturar e testar hipóteses acerca de situações na construção do conhecimento matemático.

Indicado para todos os níveis e modalidades de ensino, o GeoGebra reúne ferramentas de Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, numa interconexão prática, de fácil manuseio e de linguagem simples. Esse ambiente vem se destacando como um estímulo à criatividade e ao desenvolvimento do raciocínio lógico, facilitando a compreensão de conceitos, a criação de conjecturas e a comprovação visual de diversos resultados algébricos. Nesse contexto, ao completar o trabalho com régua, compasso, transferidor e outros materiais manipuláveis, o GeoGebra dispõe de recursos similares muito práticos.

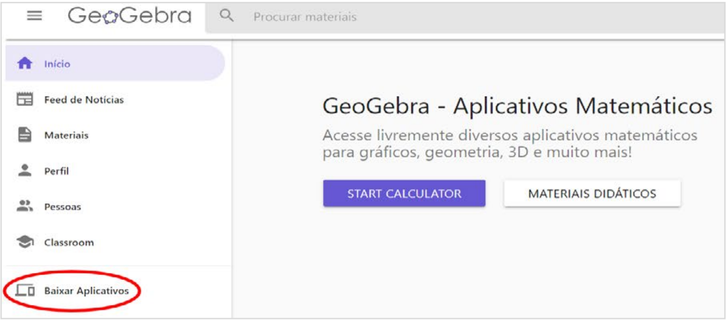
Dentre as versões para notebooks ou PCs, recomendamos o GeoGebra Classic para Desktop, por ser a versão mais limpa e completa do programa. Podendo ser executado em notebooks, PCs ou aparelhos com sistema Android, trata-se de um software relativamente leve. Existe, ainda, a versão on-line, que não requer o armazenamento de dados permanentes na memória do computador, contudo a versão para Desktop oferece a vantagem do trabalho offline em casos de indisponibilidade de rede.

A versão utilizada nesta obra é a 6.0.631.0-offline, atualizada em março de 2021. Embora você encontre diversos tutoriais em formato de textos e vídeos na internet, é muito importante que faça uma análise crítica dos materiais consultados e da possibilidade de descobrir sozinho a funcionalidade de diversas ferramentas. Recomendamos que consulte documentos mais recentes, verifique sobre qual versão estão falando e explore o software para descobrir como as ferramentas funcionam.

Para explorar o GeoGebra, você tem a opção de utilizar a versão on-line acessando o site www.geogebra.org/classic#classic6 ou, se preferir, pode instalá-lo em seu computador. A segunda opção oferece a vantagem de permitir que você trabalhe offline quando estiver sem acesso a uma rede de internet.

Para baixar o software e instalá-lo em seu computador, acesse o site www.geogebra.org e clique na opção Baixar Aplicativos, como indicado na **Figura 1**:

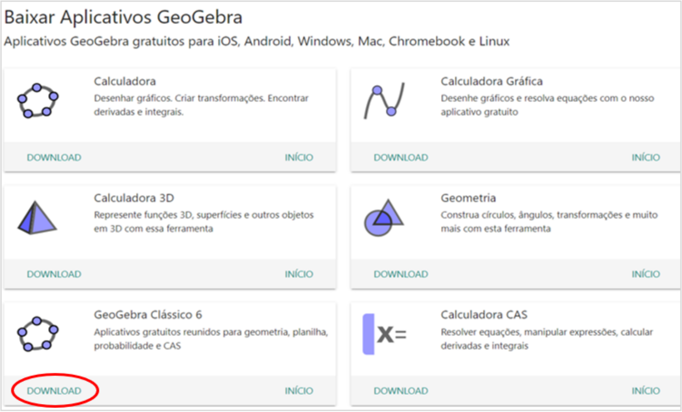
Figura 1 — Baixando o software GeoGebra



Fonte: GeoGebra - Aplicativos Matemáticos. GeoGebra, [*s. l.*], 2022. Disponível em: https://www.geogebra.org./. Acesso em: 20 fev. 2022.

Ao escolher essa opção, abrirá outra tela com vários aplicativos para download. É interessante escolher a versão mais recente. Para nosso estudo, sugerimos o GeoGebra Classic 6. Basta escolher essa versão e clicar em DOWNLOAD para baixar, como demonstrado na **Figura 2**.

Figura 2 — Escolhendo a versão e fazendo o download



Fonte: GeoGebra - Aplicativos Matemáticos. GeoGebra, [*s. l.*], 2022. Disponível em: https://www.geogebra.org./. Acesso em: 20 fev. 2022.

Concluído o download, basta instalar o software no seu computador e começar a explorá-lo. Para saber um pouco mais a esse respeito, sugerimos que assista ao **Vídeo 2**.

Vídeo 2 — Introdução ao GeoGebra

PARA SABER

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Fonte: CURSO BÁSICO GEOGEBRA - AULA #01: Apresentação do Curso e Funcionalidades Básicas do Geogebra. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (48 min). Publicado pelo canal Isaque de Souza Rodrigues www.youtube.com/watch?v=IRXmjQx7mWc. Acesso em: 02 de ago. 2022.

O GeoGebra 3D

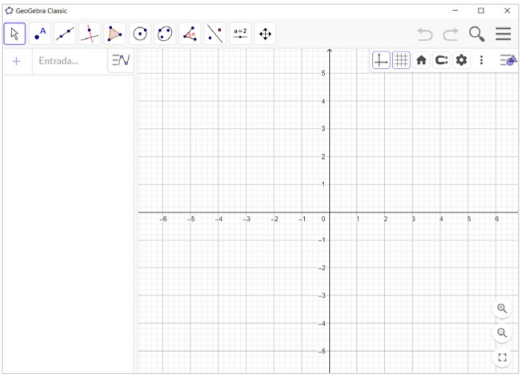
O GeoGebra 3D é um importante instrumento de apoio para você explorar, de maneira dinâmica, as mais variadas representações de objetos, a fim de perceber elementos e propriedades das figuras. Para melhor desempenho, recomendamos que comece construindo figuras na Janela 2D. Vá clicando nas ferramentas e vendo o que acontece na tela. Isso dará maior confiança para utilizar as ferramentas do ambiente 3D.

Contribuindo para o desenvolvimento da noção espacial, o GeoGebra 3D dispõe de ferramentas que permitem construir figuras tridimensionais e dar a elas movimentos translativos e rotativos no espaço virtual, favorecendo a análise de elementos que podem ser mais bem explorados quando a figura é observada por diferentes ângulos de visualização. Essa interação dinâmica possibilita a visualização desses objetos sob diferentes ângulos, favorecendo a compreensão da sua estrutura, o processo de formação de imagens mentais e a compreensão dos conceitos geométricos.

A interface do GeoGebra 3D exibe o Campo de Entrada, Janela de Álgebra e duas janelas de visualização, que podem estar dispostas lado a lado. A primeira janela de visualização é do GeoGebra 2D, representando o plano xy, e a segunda é do ambiente 3D, que representa o espaço xyz.

Ao abrir o GeoGebra Classic, versão 6.0.631.0, será apresentada uma tela como na **Figura 3**.

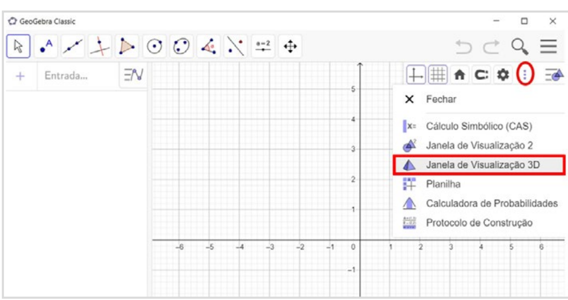
Figura 3 — Janela 2D do GeoGebra (versão 6.0.631.0)



Fonte: Elaborada pelo autor.

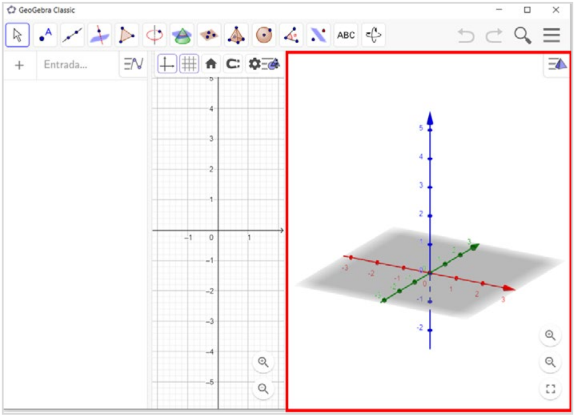
Para abrir a Janela de Visualização 3D, basta clicar nos três pontinhos que aparecem no canto superior direito, logo abaixo da lupa e, na caixa de diálogo que é aberta, clicar na opção "Janela de Visualização 3D", como indicado na **Figura 4**.

Figura 4 — Caixa de diálogo para acesso à Janela 3D do GeoGebra



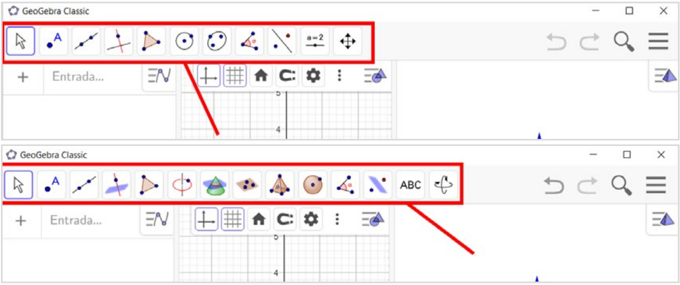
Fazendo isso, abrirá a tela da Janela 3D do GeoGebra, que permitirá construir e manipular objetos tridimensionais facilmente, como é o caso dos sólidos abordados nesse trabalho, demonstrados na **Figura 5**.

Figura 5 — Janela 3D do GeoGebra



Um simples clique em qualquer região da Janela 2D ou 3D faz com que a barra de ferramentas da respectiva janela apareça, como demonstrado na **Figura 6**.

Figura 6 — Barra de ferramentas das Janelas 2D e 3D, respectivamente

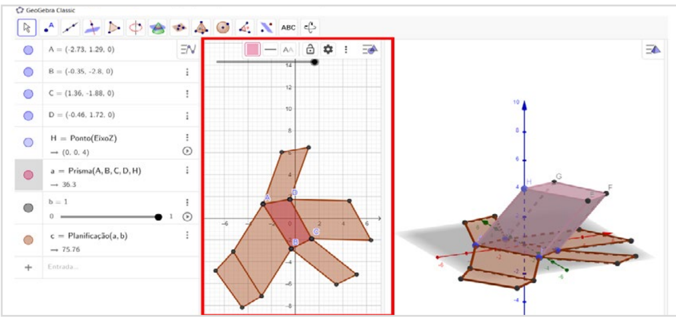


Fonte: Elaborada pelo autor.

Manter as duas janelas abertas lado a lado permite ao usuário, durante o estudo de sólidos geométricos, observar o comportamento de alguns elementos planos desses sólidos. No entanto, é importante ressaltar que, por razões óbvias, as ferramentas da Janela 2D não são as mesmas da Janela 3D. É fácil verificar isso clicando alternadamente nas duas janelas e observando o que ocorre na barra de ferramentas, como mostram as figuras a seguir.

A base plana das construções feitas no ambiente 3D, assim como as planificações de sólidos geométricos, é automaticamente projetada no plano xy e aparece na janela de visualização 2D, como apresentado na **Figura 7**.

Figura 7 — Projeção na Janela 2D de sólidos construídos no ambiente 3D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra.

Você pode aprender um pouco mais sobre o GeoGebra 3D assistindo ao **Vídeo 3**.

Vídeo 3 — O GeoGebra 3D

Fonte: APRENDENDO comandos 3d no geogebra. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (10 min). Publicado pelo canal Matemática olímpica fácil. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=VKFbr16REVk&t=71s. Acesso em: 2 ago. 2022.

CAPÍTULO 3

O ESTUDO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

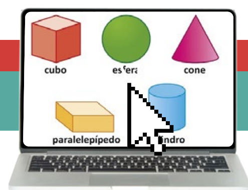
O ESTUDO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Nesta seção, aprenderemos um pouco sobre os poliedros (poliedros platônicos, prismas e pirâmides) e corpos redondos (cilindro, cone e esfera). Para esse estudo, é importante que consiga desenhar polígonos e círculos com o GeoGebra 2D, e, além disso, reveja definições e conceitos como lado, vértice, diagonal, raio e diâmetro, de modo a relembrar como são calculadas as áreas dessas figuras planas.

Que tal ter uma noção básica do que iremos estudar? O **Vídeo 4** o ajudará a compreender os conteúdos e a desenvolver as atividades propostas mais adiante.

Vídeo 4 — Poliedros e corpos redondos

PARA SABER
Clique no centro da tela da imagem
Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"



Fonte: SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: Poliedros e corpo redondos. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal Vem comigo. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=gHTSeS-8wDts&t=108s. Acesso em: 2 ago. 2022.

Ao avançar no campo da Geometria Espacial, é importante que você saiba sobre ângulos, paralelismo e perpendicularidade entre retas no plano, além de dominar os cálculos de distâncias entre objetos no plano e áreas de figuras planas.

Para ajudá-lo, apresentamos algumas definições, axiomas e teoremas, porém sem apresentar nenhuma demonstração. O objetivo é que explore essas afirmações no GeoGebra e tente, a partir da observação das figuras, compreender o significado de cada informação.

Tendo em vista os pré-requisitos básicos e outras informações importantes para este estudo, sugere-se afirmações como as que se seguem, contudo sem nenhuma demonstração, por considerar que esses alunos já passaram pelo estudo da Geometria Plana. A disposição dessas informações é apresentada como sugestão e sua importância se deve ao fato de que o aluno da EJA, em casos não raros de esquecimento ou não assimilação dos conteúdos estudados anteriormente a essa fase, necessita de uma opção para a qual possa recorrer quando tiver dúvidas. Essas informações, com certeza, facilitarão de modo que novos conceitos façam sentido para o referido aluno.

Seguem algumas afirmações elaboradas pelo autor, com base nos conhecimentos adquiridos ao longo dos anos, e outras baseadas nas obras de Azevedo Filho (2015), Corrêa (2019) e Dante (2001).

Caso desconheça alguns termos, não se preocupe, apenas preste atenção no texto relacionado a eles. De qualquer modo, vamos explicá-los de maneira bem superficial. *Definição* é um enunciado que define o significado de algo. *Axiomas* são conceitos primitivos, aceitos como verdadeiros sem a necessidade de demonstração. *Proposições* são afirmações que podem ser demonstradas.

Preste atenção nessas afirmações e tente verificar a veracidade delas no GeoGebra.

Definição 3.1 (Segmento de reta)
Sejam A e B dois pontos distintos sobre uma reta r. O conjunto de todos os pontos de r, localizados entre A e B, inclusive os próprios A e B, recebe o nome de segmento de reta e é denotado por segmento AB.

Definição 3.2 (Polígono)
Chama-se polígono toda figura plana fechada, formada por segmentos de reta que se encontram nos extremos e não se cruzam em nenhum ponto.

Definição 3.3 (Paralelismo)
Duas retas r e s no plano são ditas paralelas se, e somente se, não tiverem nenhum ponto em comum. Em linguagem matemática, escreve-se r//s. Duas retas não paralelas denominam-se retas concorrentes.

Definição 3.4 (Perpendicularismo)
Duas retas concorrentes no plano são perpendiculares se, e só se, o ângulo entre elas medir 90º.

Axioma 3.5 (Postulado de Euclides)
Por um ponto A, fora de uma reta r, passa uma única reta t paralela à reta r.

Definição 3.6 (Paralelogramo)
Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e só se, possuir os lados opostos paralelos.

Proposição 3.7
Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

Proposição 3.8
Em um paralelogramo, os pares de lados opostos são congruentes.

Definição 3.9 (Triângulo isósceles)
Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes.

Proposição 3.10
Em um triângulo isósceles, os ângulos da base têm a mesma medida.

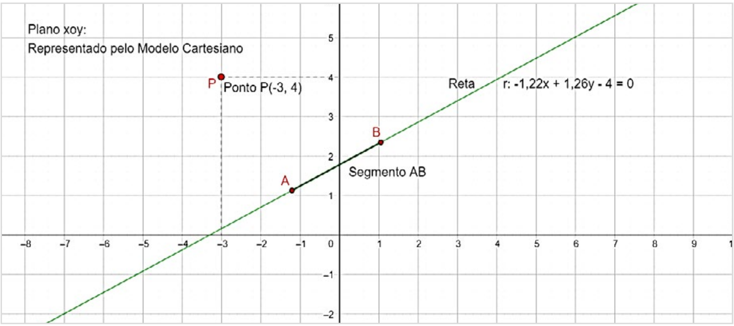
Definição 3.11 (Triângulo equilátero)
Um triângulo é dito equilátero se, e só se, os três lados forem congruentes.

Proposição 3.12
Em um triângulo equilátero, os três ângulos internos são congruentes e medem 60º.

Definição 3.13 (Plano)
Um plano é um ente geométrico com duas e somente duas dimensões. De acordo com Dolce e Pompeo (2013), a ideia do que seja ponto, reta e plano é uma noção primitiva e, portanto, adotada sem definição. Essa noção provém do nosso conhecimento intuitivo e decorre da experiência e observação.

O GeoGebra usa o Modelo Cartesiano xoy. Veja a Janela de Visualização 2D.

Figura 8 — Representação geométrica de ponto, reta e plano na Janela 2D do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra.

A Figura 8 viabiliza uma compreensão intuitiva, embora suficiente, de que:

- Ponto é o lugar geométrico determinado por um par ordenado P(x, y).
- Reta r é o conjunto infinito de pares ordenados que satisfazem a equação $ax + by + c = 0$, com "a" e "b" não sendo simultaneamente iguais a zero.
- Segmento de reta é o conjunto de pontos de uma reta, formado por dois extremos A e B e todos os pontos da reta situados entre A e B, como na **Definição 3.1**. É "parte" de uma reta.
- Plano é a região bidimensional determinada por duas retas paralelas ou concorrentes no espaço tridimensional, como o Modelo Cartesiano, que representa um plano no espaço com dimensões x e y determinadas respectivamente pelos eixos.

Axioma 3.14
Cada reta contém pelo menos dois pontos distintos; todo plano contém no mínimo três pontos não colineares; o espaço contém pelo menos quatro pontos distintos entre si não coplanares e não colineares.

Axioma 3.15
Por três pontos não colineares passa um único plano.

Definição 3.16 (Paralelismo no espaço)
Dados dois planos α e β, diz-se que esses planos são paralelos se a interseção entre eles for vazia. Nesse caso, existe uma reta r simultaneamente perpendicular aos dois. Saiba que, se a reta r é perpendicular a α e β, então todo plano que contém r é também perpendicular a α e β.

Definição 3.17 (Perpendicularidade no espaço)
Dados dois planos α e β, diz-se que esses planos são perpendiculares se a interseção entre eles for uma reta r e, além disso, existem duas retas perpendiculares s e t, uma pertencente a α e outra pertencente a β, ambas concorrentes com r em um ponto P.
Tomando o Sistema Cartesiano para o espaço tridimensional como exemplo, todo plano que contém o eixo z é perpendicular ao plano xoy, pois os eixos x, y e z são perpendiculares entre si.

Sugerimos que você construa, no GeoGebra 3D, um plano que contenha o eixo z e meça, com as ferramentas do GeoGebra, o ângulo entre esse plano e o plano xoy. Caso ainda não consiga fazê-lo, não se preocupe, mais adiante você encontrará instruções neste material.

Axioma 3.18
A interseção de dois planos distintos não paralelos é uma reta.

Definição 3.19 (Distância entre dois planos)
A distância entre dois planos paralelos α e β, denotada por $d(\alpha, \beta)$, é definida como sendo a distância de um ponto qualquer de um dos dois planos ao outro plano.

Definição 3.20 (Planificação)
Planificar um poliedro consiste no processo de cortá-lo ao longo de algumas de suas arestas e abri-lo, de modo que suas faces apoiem-se totalmente sobre uma superfície plana, sem sobreposições ou deformações.

É importante saber que a planificação de um poliedro pode ser feita corretamente de diferentes maneiras. Não se frustre se encontrar em outros materiais de estudo planificações diferentes das que você verifica no GeoGebra. Todas elas podem estar corretas!

O **Vídeo 5** esclarece algumas dúvidas sobre as planificações.

Vídeo 5 — Planificação de sólidos

Fonte: PLANIFICAÇÃO DOS SÓLIDOS GEOMETRICOS. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (10 min). Publicado pelo canal Professora Mari Calhau. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=mSL27huvhIQ. Acesso em: 2 ago. 2022.

As atividades que se seguem o ajudarão a compreender as representações bidimensionais de objetos tridimensionais apresentados no livro didático. Isso é muito importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

3.1 Aprendendo sobre prismas (voltar ao sumário)

Para entender o que é um prisma, vamos construir e manipular esse sólido no GeoGebra e analisá-lo atentamente por diferentes ângulos, buscando compreender sua estrutura, identificar elementos e perceber algumas propriedades e relações. Procure comparar essas figuras com materiais concretos e observar todas as informações apresentadas na tela do computador, principalmente os dados numéricos da Janela de Álgebra.

A partir dessas observações, esperamos que você compreenda a **Definição 3.21**.

> **Definição 3.21 (Prismas)**
> Prisma é um poliedro composto por duas faces poligonais congruentes e paralelas, contendo n lados que formam suas bases e uma quantidade n de paralelogramos, que formam suas faces laterais.

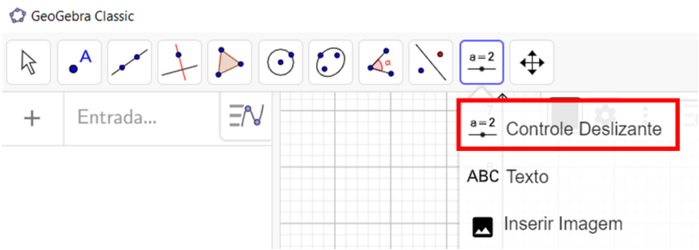
Para este estudo, vamos construir seis prismas distintos, o suficiente para que você perceba elementos, relações e propriedades, desenvolva imagens mentais e crie seu próprio conceito de prisma.

Para essa e todas as demais atividades deste estudo, você deve abrir o GeoGebra e dispor as janelas 2D e 3D lado a lado, como já indicado anteriormente nas figuras 2 e 3.

Tudo certo? Agora siga os seguintes passos:

1) Clique na Janela 2D para acionar sua barra de ferramentas, como já ilustrado na **Figura 4**, e crie um controle deslizante clicando em *Controle Deslizante*, como mostra a **Figura 9**, e, em seguida, selecione a Janela 2D novamente.

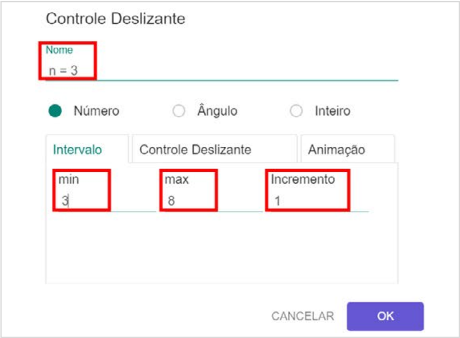
Figura 9 — Ferramenta para criar o controle deslizante (na Janela 2D)



Fonte: Elaborada pelo autor.

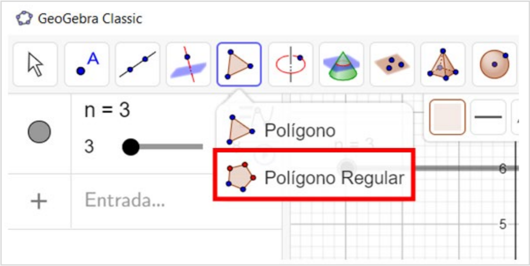
2) A caixa de diálogo aberta é para configuração do controle deslizante. Como se pretende construir polígonos com n lados, altere o nome do controle deslizante para "n = 3" e os demais valores de n para "min: 3", "max: 8" e "Incremento: 1", como demonstrado na **Figura 10**. Feitas essas alterações, clique em OK.

Figura 10 — Configuração do controle deslizante



3) Para criar uma base regular para o prisma, clique na Janela 3D e, na barra de ferramentas, na ferramenta "Polígono Regular", como demonstrado na **Figura 11**.

Figura 11 — Acesso à ferramenta "Polígono Regular"

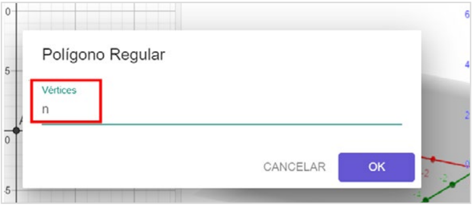


Fonte: Elaborada pelo autor.

4) Depois de clicar em "Polígono Regular", clique no ponto (0, 0, 0), que é o encontro dos três eixos e depois em outro ponto qualquer do plano xy. Essa ação determinará um dos lados do polígono regular que servirá de base para o prisma.

Ao clicar nesses dois pontos, abre-se a caixa de diálogo ilustrada na **Figura 12**. Para vincular o número de lados do polígono ao controle deslizante, preencha o campo "Vértice" com o parâmetro "n" e clique em “OK”. Vincular a base do prisma ao controle deslizante possibilita a construção de diversos prismas, a partir da variação do parâmetro “n”. Vale observar que o número de lados de um polígono é igual ao número de vértices, portanto o campo vértices define também o número de lados.

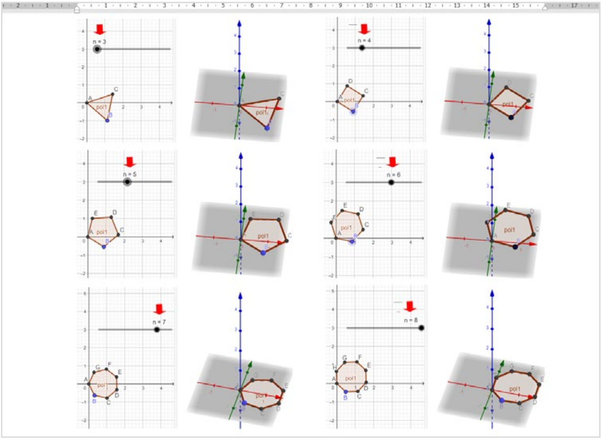
Figura 12 — Vinculando o número de vértices do polígono ao controle deslizante n



Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro polígono que surge imediatamente é o triângulo. Assim, como os valores de n variam de 3 a 8, os demais polígonos surgem na seguinte sequência: quadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono e octógono, conforme a **Figura 13**.

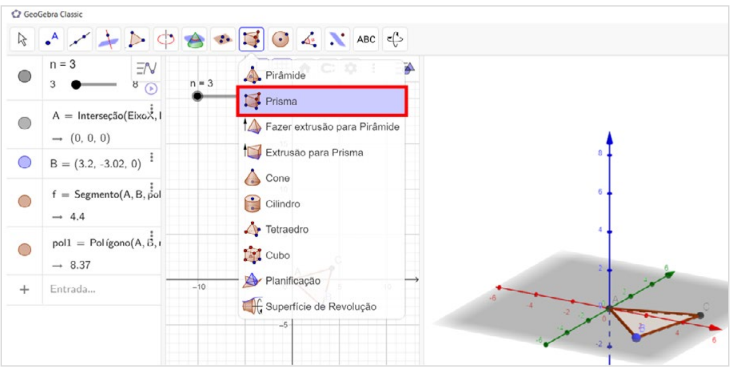
Figura 13 — Sequência de polígonos que serão base dos prismas a serem construídos



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

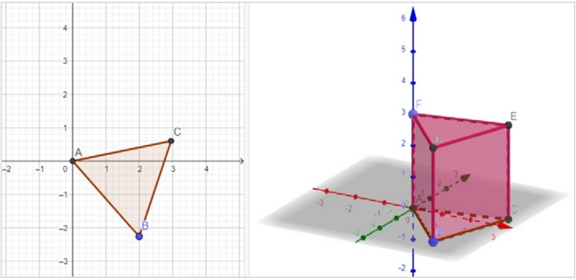
5) Com a base definida, clique na ferramenta prisma (**Figura 14**), em seguida, no polígono da base e, finalmente, em algum ponto sobre o eixo perpendicular ao plano da base (plano xy), normalmente o eixo vertical. Esse ponto definirá a altura H do prisma e a base superior estará situada em um plano paralelo ao plano onde foi criada a primeira base, distando H unidades do plano da base inferior. Será gerado um prisma similar ao apresentado na **Figura 15**.

Figura 14 — Acesso à ferramenta "Prisma" do GeoGebra 3D



Fonte: Elaborada pelo autor.

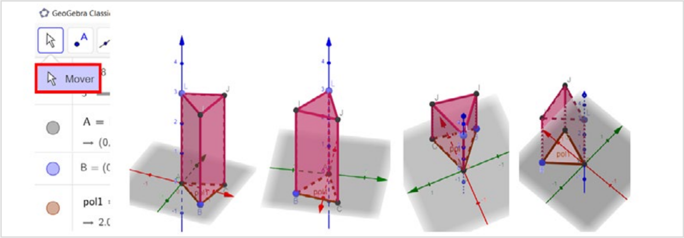
Figura 15 — Prisma triangular de altura 3 gerado na Janela 3D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Concluída a construção, você pode dar movimento à figura e visualizá-la por diferentes ângulos. Para isso, clique na ferramenta "Mover" e, em seguida, mantendo pressionado o botão auxiliar do mouse, clique na Janela 3D e mova o cursor sobre essa janela, para obter resultados parecidos com os apresentados na **Figura 16**.

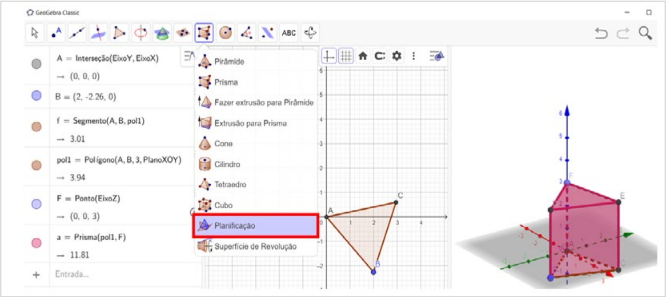
Figura 16 — Prisma triangular de altura 3 gerado na Janela 3D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

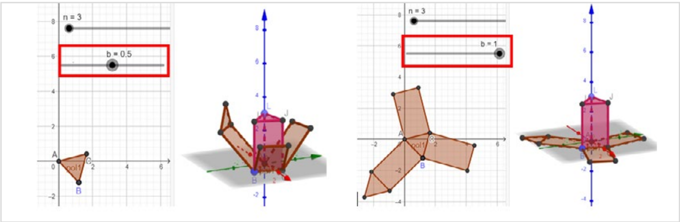
6) Do mesmo modo que a planificação de objetos manipuláveis é importante para a compreensão de sua estrutura, o GeoGebra 3D dispõe desse recurso para objetos virtuais. Para planificar um prisma, basta clicar na ferramenta "Planificação" (**Figura 17**) e, em seguida, no prisma. Será criado automaticamente um controle deslizante "b" com os parâmetros de 0 a 1. Quando b = 1, o prisma estará totalmente planificado e só então terá todas as faces apresentadas nas duas janelas de visualização, como demonstrado na **Figura 18**.

Figura 17 — Acessando a ferramenta "Planificação"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Figura 18 — Planificação do Prisma



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.1.1 Elementos do prisma

Você já deve ter observado que um prisma possui faces poligonais, vértices e arestas, sendo que, duas dessas faces são paralelas. Essas são as bases do prisma. Para compreender a relação entre esses elementos, copie e preencha a **Tabela 1**.

Para isso, manipule o controle deslizante e, para cada prisma, identifique o polígono da base de modo a preencher a linha correspondente na tabela.

Tabela 1 — Registro sobre os elementos dos prismas

Polígono da Base	Núm. de Faces	Núm. de Vértices	Núm. de Arestas
Triângulo			
Quadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após o preenchimento da **Tabela 1**, observe qual relação existe entre a soma das duas primeiras colunas e o valor que você anotou na terceira coluna. Veja que vale a relação:

$$F + V = A + 2 \text{ (Relação de Euler)}$$

3.1.2 Classificação dos prismas

Um prisma pode ser reto ou oblíquo, definido conforme a **Definição 3.22**. Pode-se, também, classificar os prismas pelo polígono da base.

> **Definição 3.22**
> Um prisma é dito reto quando suas arestas laterais são perpendiculares à base e, consequentemente, suas faces laterais são retângulos.

As arestas adjacentes de um prisma reto estão contidas em um plano perpendicular aos planos das bases do prisma e as faces laterais desse prisma estão contidas em planos distintos, ambos perpendiculares aos planos das bases. Tente constatar a veracidade dessas afirmações com o auxílio de ferramentas do GeoGebra 3D.

Observe, ainda, as definições 3.23 e 3.24.

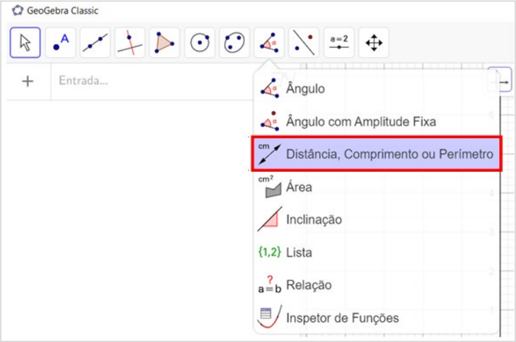
> **Definição 3.23**
> Dois planos serão perpendiculares se formarem entre si um ângulo reto, ou seja, se o ângulo entre eles medir 90°.

> **Definição 3.24**
> Um prisma oblíquo possui arestas laterais oblíquas à base. Nesse caso, as faces laterais são paralelogramos não retângulos.

3.1.3 Área lateral e área total do um prisma

Para calcular a área lateral de um prisma, você precisa reconhecer os polígonos das faces e saber calcular a área de quadriláteros. Da forma como as figuras foram construídas no GeoGebra, o elemento altura está explícito, restando a você determinar a medida da aresta da base, o que pode facilmente ser feito com auxílio da ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro", disposta na barra de ferramentas da Janela 2D, como demonstrado na **Figura 19**.

Figura 19 — Ferramenta para medição da distância entre objetos no plano

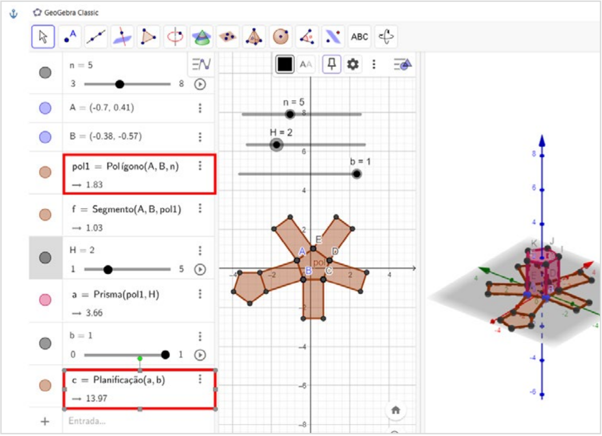


Fonte: Elaborada pelo autor.

Faça a planificação do prisma. Assim, você poderá observar a área da base – Polígono (A,B,n) – e a área total – Planificação (a,b) – apresentadas nessa ordem na Janela de Álgebra do GeoGebra, como pode ser verificado na **Figura 20**. Tente descobrir como calcular a área lateral.

Dica: a área lateral não envolve as áreas das duas bases.

Figura 20 — Identificação da área total e área da base do prisma na Janela de Álgebra



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

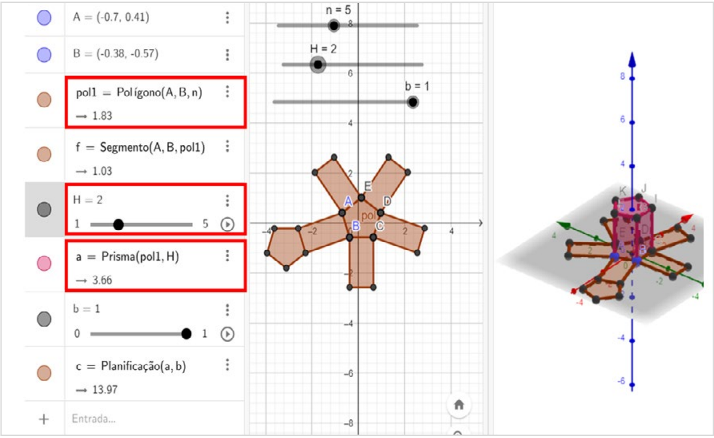
3.1.4 Volume do prisma

O termo *volume* representa a quantidade de unidades cúbicas de medida que preenche totalmente o sólido sem deixar sobras. O volume de um objeto pode conter uma quantia de unidades inteiras e mais uma parte de uma unidade, ou seja, nem sempre esse valor pode ser representado por um número natural, mas sempre por um decimal, normalmente com arredondamento de no máximo três casas.

As construções no GeoGebra 3D já fornecem o volume do sólido geométrico logo abaixo do nome do polígono, situado na Janela de Álgebra, como ilustrado a **Figura 21**. Contudo, é importante que você realize esses cálculos e utilize o software como apoio para verificar os resultados. Saiba que, devido às aproximações, podem ocorrer pequenas divergências nos resultados encontrados.

Na **Figura 21**, os valores destacados nos retângulos em vermelho representam, respectivamente, a área do polígono da base pol1 do prisma, a altura H desse prisma e, finalmente, o volume do Prisma (pol1,H). Altere as medidas usando os respectivos controles deslizantes e observe atentamente o que acontece. Percebe que o produto da área da base pela altura será sempre igual ou muito próximo ao do volume desse prisma?

Figura 21 — Identificação dos valores numéricos para cálculo algébrico do volume



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

A relação "Base x Altura" é válida para o cálculo do volume de qualquer prisma, conforme garante o Princípio de Cavalieri (**Teorema 3.25**).

> **Teorema 3.25 (Princípio de Cavalieri)**
> Considere dois sólidos, e , de mesma altura, apoiados sobre um plano . Se a interseção de todo o plano paralelo a é vazia ou determina sobre esses sólidos superfícies de áreas iguais, então os sólidos e têm volumes iguais.

O Princípio de Cavalieri será citado mais adiante nas demonstrações dos volumes de outros sólidos geométricos. Todavia, embora seja possível demonstrá-lo com maior rigor matemático, ele será aqui tomado por verdadeiro, sem esse tipo de demonstração.

Dada a sua importância para diversas demonstrações geométricas, recomendamos que você assista ao **Vídeo 6** e pesquise mais sobre o assunto.

Vídeo 6 — Princípio de Cavalieri para cálculo de volumes de sólidos geométricos

Fonte: VIDEOAULA princípio de cavalieri e sua relação com volume. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (20 min). Publicado pelo canal Jean Produções Buíque. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=9xPTuACdeZg&ab_channel=JeanProdu%C3%A7%C3%B5esBu% C3%ADque. Acesso em: 2 ago. 2022.

Agora que você assistiu ao vídeo, que tal tentar constatar a validade desse princípio por meio de uma atividade no GeoGebra? Para isso, prossiga como nos passos a seguir.

1) Crie um controle deslizante b e configure-o com min: 1, max: 5 e incremento: 0,5.

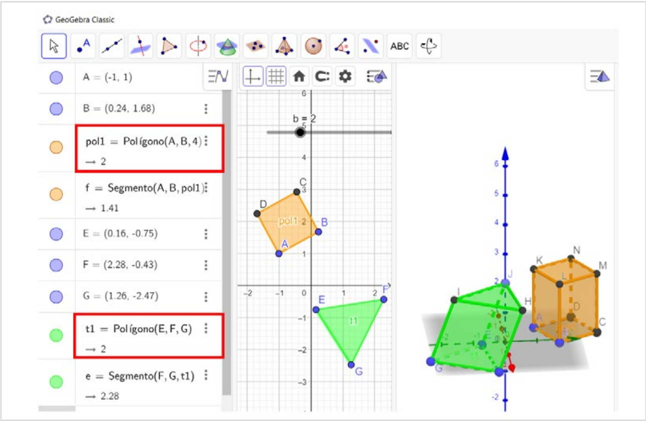
2) Usando a ferramenta "Polígono Regular", construa um triângulo e um quadrado. Depois vá ajustando seus pontos até que os dois fiquem com área igual a 2, como destacado na **Figura 22**.

3) Clique na ferramenta prisma, depois selecione o triângulo e, em seguida, o ponto (0, 0, 2) sobre o eixo z (vertical). Basta clicar em cima do ponto representado pelo numeral 2.
4) Na Caixa de Entrada, digite o comando "Prisma (pol1, b)".

Com isso, você acaba de construir dois prismas diferentes, cujas bases têm áreas iguais. Por favor, não altere os pontos da base, pois as áreas precisam manter-se iguais.

A altura do prisma triangular pode ser alterada pelo arraste do ponto J sobre o eixo vertical e a segunda por meio do controle deslizante b. Manipule as alturas e observe o que acontece com os volumes dos dois prismas sempre que as alturas forem iguais. Você pode observar o valor do controle deslizante e arrastar o ponto J para esse mesmo valor.

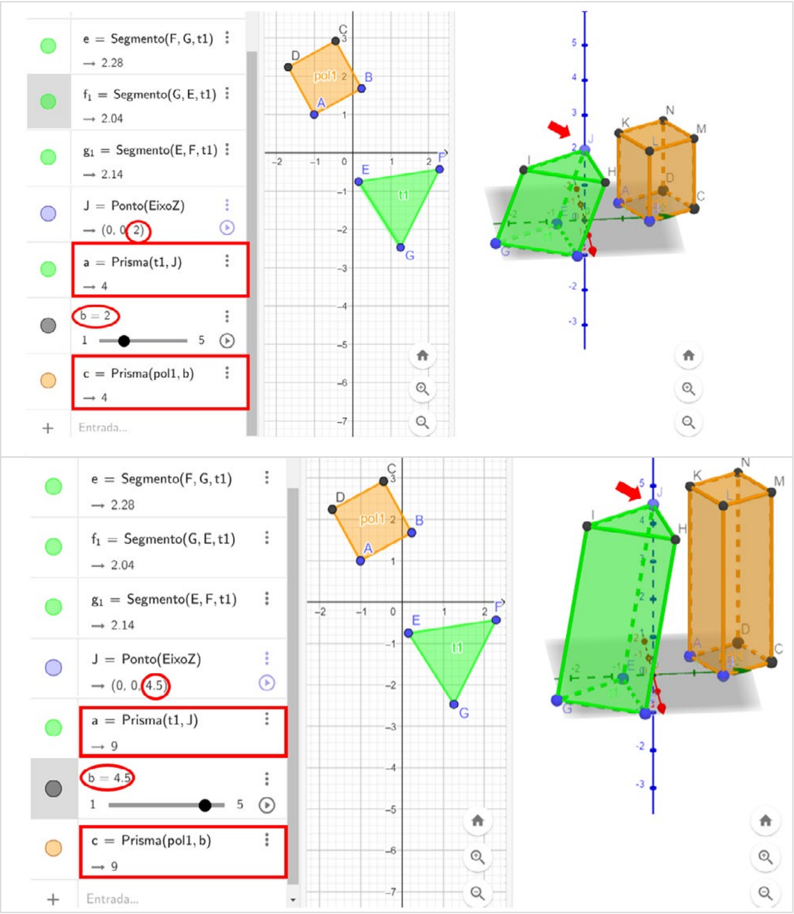
Figura 22 — Dois prismas de mesma altura com bases distintas de áreas iguais



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Embora as alturas dos dois prismas variem de forma independente, os resultados que mostram a validade do Princípio de Cavalieri só podem ser observados quando as alturas são iguais, por isso as manipulações devem manter sempre esse critério. Altere apenas as alturas e observe os campos referentes aos volumes para certificar-se de que o volume do prisma triangular "a" é sempre igual ao volume do paralelepípedo "c", como ilustrado na **Figura 23**.

Figura 23 — Variando as alturas e observando a manutenção da igualdade dos volumes



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Para saber mais sobre os prismas, assista ao **Vídeo 7**.

Vídeo 7 — Saiba mais sobre os prismas

PARA SABER

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Fonte: PRISMAS / O QUE É E COMO É / E SUA NOMENCLATURA #prisma #enem. [*S. l.*: *s. n.*], 2010. 1 vídeo (4 min). Publicado pelo canal VandoMat: Disponível em: www.youtube.com/watch?v=bBL_YJTiJPU&ab_channel=VandoMat. Acesso em: 2 ago. 2022.

3.2 Aprendendo sobre paralelepípedos (voltar ao sumário)

Para compreender os paralelepípedos, é importante que você faça uma revisão sobre paralelogramos, reforçando sua definição, além de algumas propriedades e relações, já que esse é o polígono de interesse no estudo desses prismas. Sobre paralelismo, perpendicularidade e inclinação, as informações necessárias podem ser verificadas no tópico que trata dos prismas.

Convém relembrar que o estudo desse tema envolve conhecimentos conceituais de paralelismo, ângulos, áreas e volumes. Como foi feito o estudo dos prismas, sugerimos que você utilize também materiais concretos e imagens, reforçando-os com as atividades no GeoGebra.

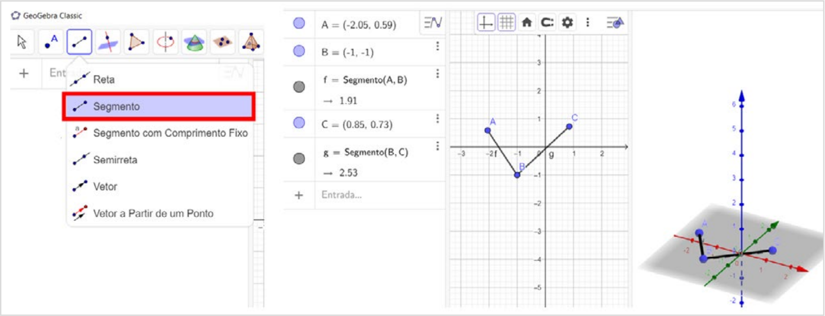
Nas primeiras tentativas de construir um paralelepípedo no GeoGebra, você vai perceber que a versão utilizada para esse trabalho não dispõe de ferramentas específicas para a construção de paralelogramos relativas à base do sólido, nem de ferramentas para a construção direta de paralelepípedos. Contudo, isso não impede que, com a adoção de algumas estratégias, essas figuras sejam construídas.

Um caminho relativamente fácil para a construção de um paralelepípedo na Janela de Visualização 3D é iniciar pela construção de um paralelogramo na Janela 2D, que servirá de base para esse sólido geométrico. Para isso, você deve proceder conforme os passos a seguir.

> **Passo 1.** Para criar o paralelogramo da base, clique na ferramenta segmento e em dois pontos quaisquer da Janela 2D, de modo que seja criado um segmento AB. Em seguida, clique no ponto B e

em outro ponto fora do segmento AB, para criar um segmento BC. Desse modo, ficam construídos dois lados adjacentes AB e BC do polígono ABCD, formando um ângulo qualquer, como mostra a **Figura 24**.

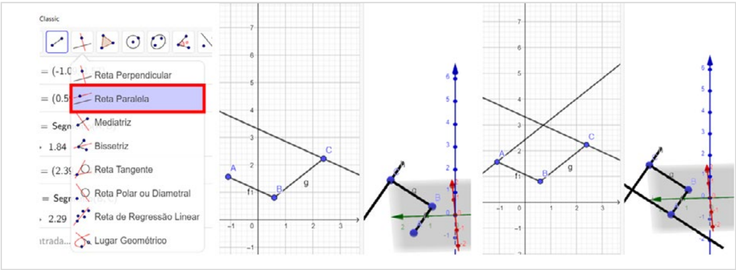
Figura 24 — Lados adjacentes AB e BC, base para a construção de um paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 2. Tendo em vista que os lados opostos do paralelogramo ABCD são paralelos, o ponto D deve ser estrategicamente inserido de modo que se tenha AB//CD e BC//DA. Para tal, trace duas retas, uma contendo o ponto A e paralela ao segmento BC e outra contendo o ponto C e paralela ao segmento AB. Isso pode ser feito clicando na ferramenta “Reta Paralela” e, em seguida, no segmento AB, depois no ponto C. Repita o procedimento para o segmento BC e o ponto A, como mostra a **Figura 25**.

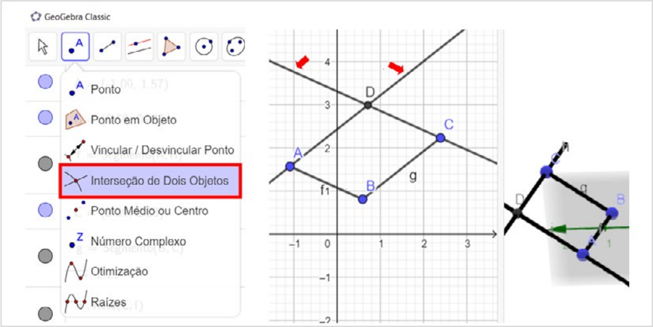
Figura 25 — Retas concorrentes em um ponto D, de tal modo que AD//BC e CD//AB, condição necessária e suficiente para que o quadrilátero ABCD seja um paralelogramo (lados opostos paralelos).



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

O ponto D procurado corresponde à interseção dessas duas retas estrategicamente construídas. Para defini-lo, clique na ferramenta "Interseção de Dois Objetos" e depois nas duas retas, como demonstrado na **Figura 26**.

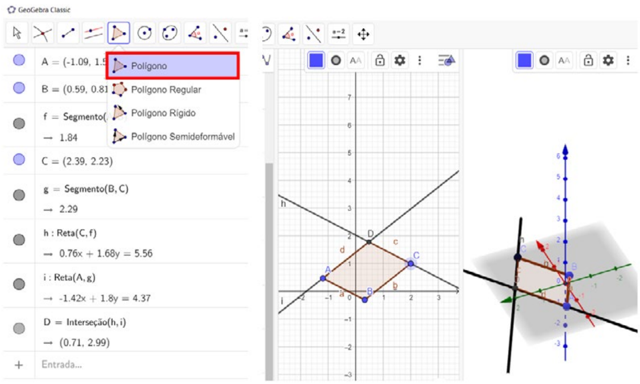
Figura 26 — Determinação do vértice D do paralelogramo com o auxílio da ferramenta "Interseção de Dois Objetos"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 3. Definidos os vértices A, B, C e D, construa o paralelogramo clicando na ferramenta "Polígono" e, em seguida, nos pontos ABCDA, nessa ordem. Assim, será criado o paralelogramo, como demonstrado na **Figura 27**.

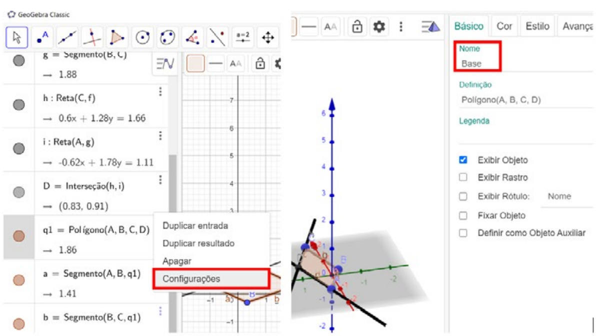
Figura 27 — Criação do paralelogramo com auxílio da ferramenta "Polígono", conhecendo-se os vértices A, B, C e D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 4. Para facilitar sua compreensão, altere o nome do polígono para "Base", procedendo como na **Figura 28**.

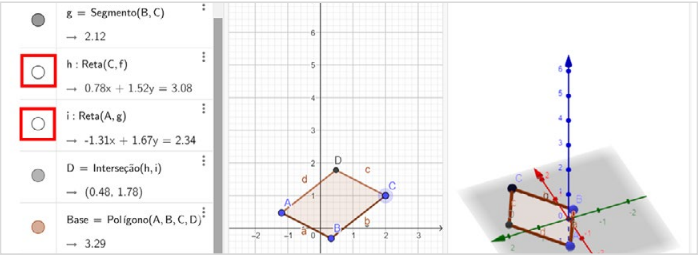
Figura 28 — Alterando o nome do polígono da base



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 5. Criado o paralelogramo, omita as retas auxiliares, deixando apenas o polígono. Para isso, desmarque com um clique os elementos identificados como "Reta" na Janela de Álgebra, como indicado na **Figura 29**.

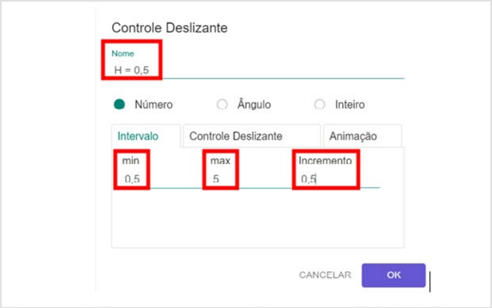
Figura 29 — Omitindo as retas auxiliares para melhor visualização da figura



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 6. Antes de criar o paralelepípedo, crie um controle deslizante e, na caixa de diálogo de criação, altere os dados como destacado na **Figura 30**. O parâmetro H determinará a variação da altura do sólido durante as manipulações dentro do intervalo [0,5; 5], em saltos de 0,5 unidades.

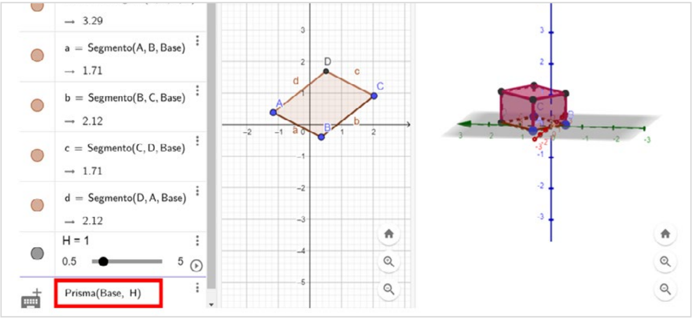
Figura 30 — Criação e configuração do controle deslizante para variação da altura do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 7. Para construir o paralelepípedo que tem como base o paralelogramo ABCD, aqui nomeado como “Base”, e a altura dependente do parâmetro H do controle deslizante, vá na Caixa de Entrada e digite o comando “Prisma (Base, H)”. Assim, será gerado o paralelepípedo ABCD, como demonstrado na **Figura 31**.

Figura 31 — Construção do paralelepípedo a partir do polígono “Base”, altura vinculada ao controle deslizante H

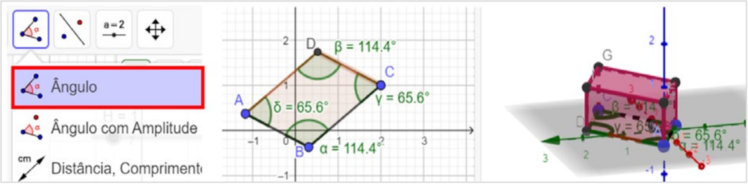


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Para verificar que, durante as manipulações, a base ABCD permanecerá sendo um paralelogramo, é interessante que, utilizando a ferramenta “Ângulo”, seja inserida a medida dos ângulos internos do polígono da Janela 2D, procedendo como se segue.

Passo 8. Clique na ferramenta “Ângulo” e, após isso, nos três extremos dos segmentos que determinam cada um dos quatro ângulos, seguindo a sequência no sentido horário. Por exemplo, para determinar a medida do ângulo A, deve-se clicar na ferramenta ângulo e, em seguida, nos pontos B, A e D, nessa ordem. Repita de maneira análoga para os demais ângulos. Assim, as medidas serão mostradas como na **Figura 32**.

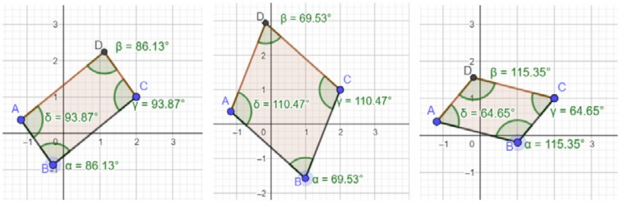
Figura 32 — Determinação dos ângulos do paralelogramo base do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Arraste os pontos A, B ou C, provocando deformações no polígono Base, e observe o que ocorre com as medidas dos ângulos internos, como demonstrado na **Figura 33**.

Figura 33 — Manutenção da congruência dos ângulos opostos diante das manipulações



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra.

Percebe que, embora haja alterações nas medidas desses ângulos, a figura mantém a congruência dos ângulos opostos? Lembre-se que essa é uma propriedade dos paralelogramos e, portanto, independente da manipulação que você fizer nesse polígono, ele será sempre um paralelogramo, por essa razão o prisma que você construiu será sempre um paralelepípedo.

3.2.1 Elementos do paralelepípedo

Manipule o paralelepípedo no GeoGebra e observe-o por diferentes ângulos. Tente identificar seus elementos e depois preencha a **Tabela 2**.

Tabela 2 — Registros sobre os elementos observados no paralelepípedo

Polígono da Base	Núm. de Faces	Núm. de Vértices	Núm. de Arestas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Da mesma forma como foi feito com os prismas, procure identificar o máximo de propriedades das figuras e as relações entre os dados numéricos referentes a cada elemento. Verifique se para esse sólido geométrico vale também a Relação de Euler.

3.2.2 Classificação dos paralelepípedos

Assim como os demais prismas, os paralelepípedos são classificados em retos e oblíquos. Como você já estudou sobre prismas retos e oblíquos, não há necessidade de se ater novamente a esse assunto. De qualquer modo, tente utilizar o GeoGebra para verificar a veracidade das características expressas na definição seguinte.

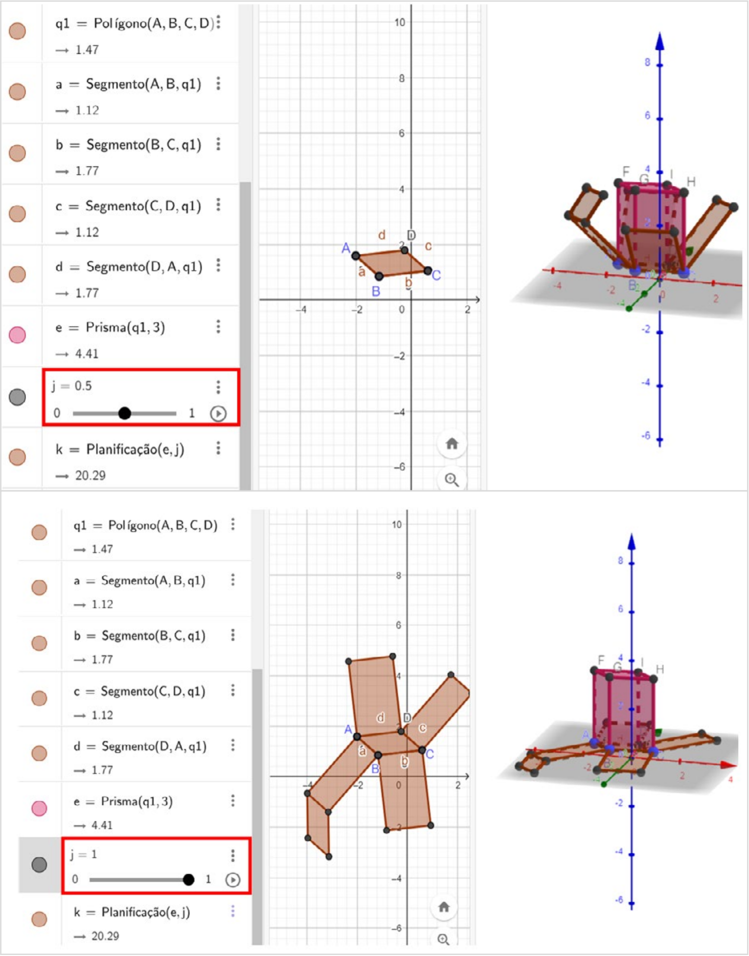
> **Definição 3.21 (Paralelepípedo reto)**
> Um paralelepípedo é dito reto quando suas arestas laterais são perpendiculares à base e, consequentemente, suas faces laterais são retângulos.

3.2.3 Área lateral e área total de um paralelepípedo

Para se determinar a área lateral do paralelepípedo, um caminho é utilizar a ferramenta “Planificação”, a exemplo do que foi feito com os prismas. Faça todos os cálculos algébricos ou utilize alguns dos resultados apresentados na Janela de Álgebra do GeoGebra. Para obtenção desses dados, volte à atividade do GeoGebra 3D, e proceda como no passo a seguir.

> **Passo 9.** Clique na ferramenta “Planificação” e, em seguida, no paralelepípedo apresentado na Janela de Visualização 3D. É criado automaticamente um controle deslizante cujo parâmetro define os estágios de planificação, como demonstrado na **Figura 34**.

Figura 34 — Planificação do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

A **Figura 34** mostra dois estágios de planificação, um quando j = 0.5, o que significa que o processo de planificação está em 50%; e o outro quando j = 1, que representa 100%. Vale observar que somente nesse estágio final da planificação, ou seja, quando j = 1, o objeto está totalmente planificado e, somente nesse estágio, todas as faces são apresentadas na Janela de Visualização 2D. Isso facilita determinar a quantidade de faces da figura e, a partir disso, verificar as medidas das arestas, valendo-se dos conhecimentos de Geometria Plana; além de calcular a área de cada face e realizar, por meio desses valores, o cálculo algébrico da área lateral e da área total, confrontando os resultados com os valores apresentados na Janela de Álgebra.

E aí, conseguiu perceber que os paralelepípedos pertencem a uma subclasse dos prismas?

Quanto à classe e ao polígono da base, um paralelepípedo pode ser definido da seguinte forma:

> **Definição 3.23-a (Paralelepípedo)**
> Denomina-se paralelepípedo todo prisma cuja base é um paralelogramo.

Observando a classificação do poliedro e as propriedades das faces, pode-se, assim, definir paralelepípedo:

> **Definição 3.23-b (Paralelepípedo)**
> Define-se paralelepípedo como sendo um hexaedro no qual cada face é um paralelogramo.

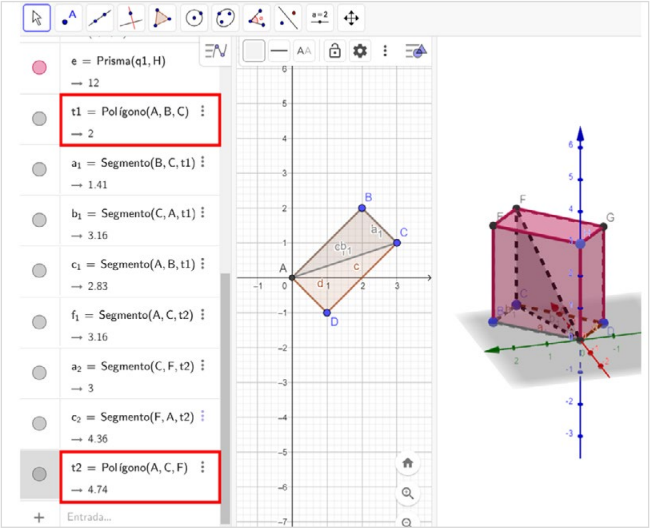
Finalmente, um paralelepípedo pode ter como base de sua definição o reconhecimento do paralelismo de cada um dos três pares de planos que contêm faces opostas.

> **Definição 3.23-c (Paralelepípedo)**
> Diz-se que um poliedro será um paralelepípedo se este for um hexaedro com três pares de faces paralelas.

3.2.4 Diagonal do paralelepípedo reto-retângulo

Para facilitar o cálculo da medida da diagonal do paralelepípedo, construa, no GeoGebra 3D, um paralelepípedo reto-retângulo e use seus vértices para construir triângulos clicando na ferramenta “polígono” e, em seguida, em três vértices do paralelogramo, convenientemente escolhidos, como ilustra a **Figura 35**.

Figura 35 — Visualização dos triângulos que auxiliam na dedução do cálculo da medida da diagonal do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Na **Figura 35**, o triângulo ABC, que contém a diagonal da base e o triângulo ACF, que, por sua vez, contém a diagonal do paralelepípedo, estão representados, respectivamente, pelos polígonos t1 e t2. Como a base é um retângulo e as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base, esses dois triângulos são retângulos. Caso isso não esteja claro para você, verifique a medida do maior ângulo interno de cada um deles por meio da ferramenta "Ângulo".

Para melhor visualização dos polígonos, desmarque, na Janela de Álgebra, o elemento prisma. Para os cálculos, as medidas de todos os segmentos estão apresentadas na Janela de Álgebra.

Ao analisar o paralelepípedo reto-retângulo na tela do GeoGebra, você consegue perceber que, pelas propriedades da figura, sua diagonal é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são uma aresta lateral e uma diagonal da base?

Percebe, inclusive, que a diagonal da base do paralelepípedo é também a hipotenusa de outro triângulo retângulo no qual os catetos são duas arestas adjacentes da base?

Se você percebeu isso, deve ter notado que a diagonal da base pode ser calculada aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABC e, para calcular a diagonal do paralelepípedo, deve-se aplicar o mesmo teorema, dessa vez no triângulo ACF.

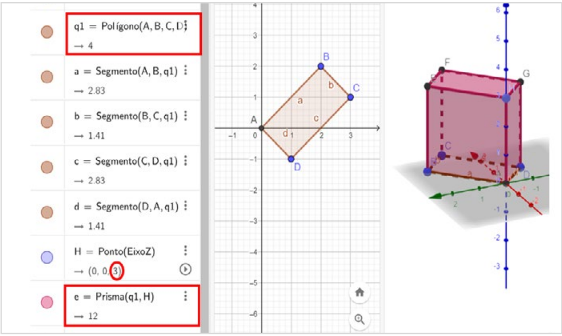
Faça os cálculos e depois compare os resultados com as medidas dos segmentos e , na Janela de Álgebra.

3.2.5 Volume do paralelepípedo reto-retângulo

Como o paralelepípedo é um prisma, seu volume pode ser calculado como já explicado. Do mesmo modo, a Janela de Álgebra do GeoGebra apresenta esse valor, mas é importante que você faça os cálculos e depois compare os resultados.

Tomando como exemplo a **Figura 36**, o volume do paralelepípedo, apesar de estar exposto no elemento *Prisma* disposto na Janela de Álgebra, deve ser calculado multiplicando-se a área do polígono ABCD da base pela altura do sólido, representada pela terceira coordenada do ponto H. Assim, sendo V o volume procurado, A a área da base e H a altura do paralelepípedo, o cálculo é como segue: .

Figura 36 — Área da base, altura e volume do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Para saber mais sobre os paralelepípedos, assista ao **Vídeo 8**.

Vídeo 8 — Saiba mais sobre os paralelepípedos

Fonte[2]: PARALELEPÍPEDO - Área Total e Volume. [*S. l.*: *s. n.*], 2016. 1 vídeo (10 min). Publicado pelo canal Prof. Kadu Landert: Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=a-GjQOBLtkZs&ab_channel=Prof.KaduLandert. Acesso em: 2 ago. 2022.

3.3 Aprendendo sobre cubos (voltar ao sumário)

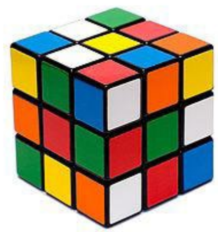
De acordo com o Wikipédia (2021), o Cubo Mágico (**Figura 37**), como originalmente chamado por seu inventor, o professor húngaro de arquitetura Ernő Rubik, é um quebra-cabeça tridimensional criado em 1974 e amplamente difundido na década de 1980, quando foi licenciado pela Ideal Toys e teve seu nome alterado para "Cubo de Rubik". Nesse mesmo ano, ganhou o prémio alemão do Jogo do Ano (Spiel des Jahres). Interessante o fato de que o professor Ernő Rubik demorou um mês para resolver o cubo pela primeira vez.

Geralmente confeccionado em plástico e apresentado em várias versões, é atualmente um dos brinquedos mais populares do mundo, com mais de 350 milhões de unidades vendidas. A versão mais comum é a 3x3x3, composta por 6 "faces" de 6 cores diferentes, com "arestas" medindo 56 mm cada.

Atualmente, cubistas de várias nações praticam e competem não só a resolução do 3x3x3, mas também outros similares. A partir de 2003, a Associação Mundial do Cubo Mágico (World Cubing Association – WCA) passou a organizar competições por todo o mundo e reconhecer recordes nacionais, continentais e mundiais.

2 Esse vídeo e todas as imagens contidas nele são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

Figura 37 — Cubo Mágico ou Cubo de Rubik



Fonte: FICHEIRO: Rubiks cube by keqs.jpg. Wikipédia, 2007. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Rubiks_cube_by_keqs.jpg. Acesso em: 3 fev. 2022.

Você já deve ter um conhecimento razoável sobre objetos com essa mesma forma geométrica, não é?

O que talvez você não saiba é que esse sólido geométrico é muito importante para o estudo da Geometria Espacial, pois o cubo cuja aresta mede 1 unidade de medida é a base para o cálculo do volume de todos os sólidos geométricos.

Você já deve conhecer as expressões metros cúbicos, centímetros cúbicos etc., mas fazia ideia de que essas expressões têm relação com o cubo?

Explorando as ferramentas do GeoGebra, existem diferentes modos de se construir um cubo, umas mais simples, porém com menos recursos; outras mais elaboradas, mas com a vantagem de permitir mais possibilidades de manipulações.

Para que você tenha melhor percepção das propriedades e relações presentes nesse sólido, vamos vincular a medida da aresta a um controle deslizante. Para tal, clique na Janela de Visualização 2D visando acionar sua barra de ferramentas e proceda conforme os passos a seguir.

1) Crie um controle deslizante e configure-o como na **Figura 38**.

Figura 38 — Configuração do controle deslizante "a", vinculado à aresta do cubo

Fonte: Elaborada pelo autor.

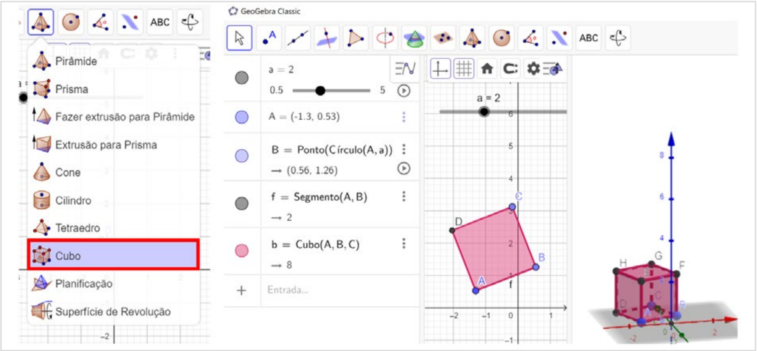
2) Para vincular o comprimento das arestas do cubo ao controle deslizante, deve-se clicar na ferramenta segmento de comprimento fixo e preencher o campo "comprimento" da caixa de diálogo com o parâmetro do controle deslizante, nesse caso "a". Clicando em OK, será criado um segmento (**Figura 39**) que corresponderá a uma das arestas do cubo.

Figura 39 — Construção de um segmento com comprimento fixo para a aresta do cubo

Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Clique na ferramenta cubo e, em seguida, nos pontos A e B do segmento AB. Será gerado o cubo apresentado na **Figura 40**.

Figura 40 — Cubo de arestas vinculadas ao controle deslizante "a"

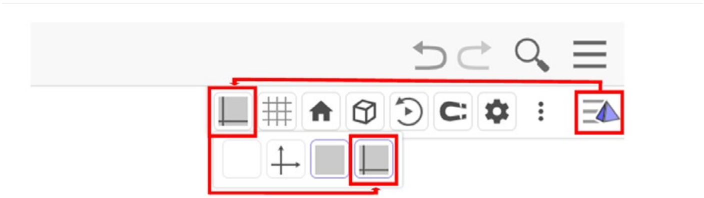


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.3.1 Elementos do cubo

Uma vez construído o cubo, pode-se melhorar sua visualização por meio da omissão dos eixos, mantendo apenas o plano como referência para dar ao aluno a noção do espaço. Isso pode ser feito seguindo a sequência mostrada na **Figura 41** e vale também para o estudo de qualquer outra figura geométrica.

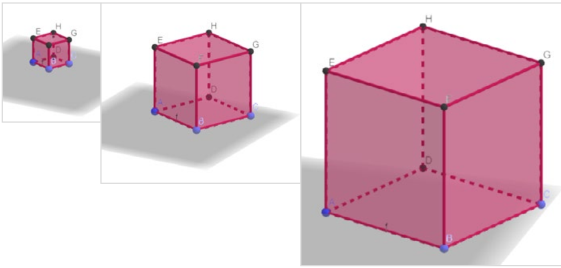
Figura 41 — Sequência de procedimentos para omitir os eixos e manter o plano na Janela 3D



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, o sólido é exibido como na **Figura 42**, com variações de tamanho definidas pelo controle deslizante.

Figura 42 — Representações do cubo com arestas medindo a = 0,5, a = 2,5 e a = 5



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

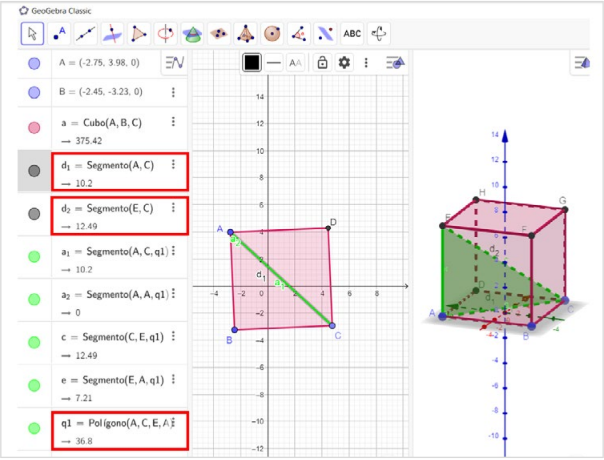
Manipule a figura, após isso tente identificar elementos e perceber propriedades, bem como relações importantes para a compreensão da estrutura desse sólido geométrico e das expressões algébricas aplicadas aos cálculos de comprimento, área e volume. Isso fará com que você veja sentido nesse estudo e tenha condições de aplicar esses conhecimentos a situações do cotidiano.

3.3.2 Diagonal do cubo

Tente calcular a medida da diagonal do cubo que você construiu. Você deve traçar duas diagonais para calcular a medida da diagonal de um cubo: a diagonal do cubo e a diagonal da base. Perceba que, ao traçar a diagonal da base e, a partir de um dos seus extremos, a diagonal do prisma, você consegue identificar dois triângulos retângulos cujas medidas das diagonais podem ser calculadas algebricamente, aplicando-se o teorema de Pitágoras duas vezes? De modo a facilitar a identificação desses triângulos, faça como nos passos a seguir.

4) Clique na ferramenta *cubo* e, em seguida, nos pontos A e B do segmento AB, gerando o cubo ABCDEFGH. Para visualizar as diagonais do cubo e da base, com suas respectivas medidas, vá na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra e digite os comandos *Segmento* (A,C) e depois *Segmento* (E,C). Após isso, digite o comando *Polígono* (A,C,E,A), gerando o triângulo retângulo ACE. Para visualizar melhor, tente mudar a cor e aumentar a transparência desse triângulo, acessando suas configurações. A imagem deve ser apresentada como ilustrado na **Figura 43**.

Figura 43 — Diagonal da base e diagonal do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Embora as medidas das diagonais já estejam apresentadas na Janela de Álgebra, tente utilizar as medidas dadas para calcular esses valores e, ainda mais, deduzir uma expressão genérica para determiná-los em um cubo qualquer em função da medida “a” da aresta.

Ao analisar o triângulo retângulo CAE destacado no cubo, perceba que a medida da diagonal do cubo pode ser calculada por meio do teorema de Pitágoras, mas apenas o cateto AE tem medida “a” conhecida. Analisando um pouco mais, você vai perceber que pode utilizar o mesmo teorema para calcular a medida do cateto , diagonal da base, em função da aresta “a”.

Desse modo, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, você pode deduzir que a medida da diagonal da base do cubo é dada por

$$d_1 = a\sqrt{2}$$

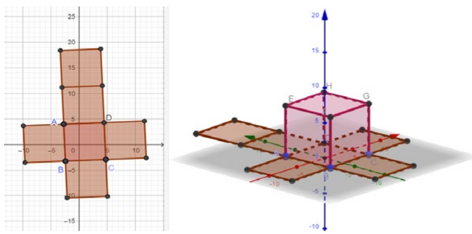
e, aplicando o mesmo teorema, dessa vez no triângulo CAE, é possível concluir que a medida da diagonal do cubo de aresta “a” pode ser calculada pela expressão

$$d_2 = a\sqrt{3}$$

3.3.3 Área lateral e área total do cubo

Do mesmo modo que nos sólidos abordados anteriormente, é provável que a essa altura o aluno da EJA, explorando a figura na Janela 3D GeoGebra, consiga identificar as propriedades do cubo, concebendo esse sólido como um paralelepípedo composto de seis faces quadradas e congruentes. Para melhor visualização, recomenda-se que o cubo seja planificado no GeoGebra clicando na ferramenta “Planificação” e, depois, na figura, como já foi feito anteriormente com outros prismas. Agindo dessa forma, o cubo será apresentado como ilustrado na **Figura 44**.

Figura 44 — Cubo planificado



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Sabendo que as faces do cubo são todas quadradas e congruentes e que esse sólido possui duas bases e quatro faces laterais, é muito provável que o aluno deduza que a área lateral do cubo é igual à soma das áreas de quatro quadrados de lado “a” e que a área total corresponde à área lateral acrescida do dobro da área de uma base. Em linguagem matemática, tem-se que:

$$A_{\text{Base}} = a^2 \text{ ,}$$

$$A_{\text{Lateral}} = 4a^2$$

e

$$A_{\text{Total}} = 6a^2$$

Tente elaborar um argumento para justificar que a área lateral do cubo consiste na soma das áreas de quatro quadrados congruentes e a área total na soma das áreas de seis desses quadrados.

3.3.4 Volume do cubo

Esperamos que você tenha percebido que, por possuir as mesmas propriedades do prisma e ter como bases quadrados, o cubo é um prisma, em razão disso seu volume pode ser calculado como o volume de um prisma. Contudo, com as manipulações no GeoGebra e a compreensão de que todas as faces do cubo são quadradas, é possível que tenha notado que a altura e as arestas da base têm medidas iguais e, então, ao calcular algebricamente o volume do cubo, você vai deduzir que o volume do cubo de aresta "a" é

$$V = a^3 \ ,$$

Para saber mais sobre os cubos, assista ao **Vídeo 9**.

Vídeo 9 — Saiba mais sobre os cubos

Fonte: VOLUME do cubo. [*S. l.: s. n.*], 2020. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal Prof Laís - Matemática: Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-Xrs8437krE&ab_channel=ProfLa%C3%ADs-Matem% C3%A1tica. Acesso em: 2 ago. 2022.

3.4 Aprendendo sobre pirâmides (voltar ao sumário)

Em um breve apanhado sobre a história das pirâmides do Egito Antigo, Santos (2021) salienta que há várias discussões sobre a origem dessas construções e as possíveis explicações para a complexa engenharia que possibilitou construí-las. Embora a história desses locais sagrados seja cercada de misticismos, o que se sabe é que historiadores e arqueólogos chegaram à conclusão de que cada um dos blocos de pedra – os quais eram lapidados e encaixados uns sobre os outros nessas construções – pesava cerca de duas toneladas, sendo que os próprios egípcios desenvolveram mecanismos para o transporte das rochas e outros materiais utilizados nessas construções. Quanto à curiosa forma geométrica desses monumentos, Mendonça (2019) esclarece que os egípcios escolheram o formato piramidal porque acreditavam ser essa uma forma de ascensão do faraó aos céus, acolhido por Rá, a divindade mais poderosa da mitologia egípcia.

O processo de construção dessas obras piramidais durava de 20 a 30 anos. Nesse contexto, os camponeses eram recrutados durante o período de seca do rio Nilo e, embora tais monumentos tenham sido implantados há mais de 2500 anos, os egípcios, já naquela época, demonstravam um conhecimento matemático bastante desenvolvido, pois utilizavam cálculos precisos na elaboração de técnicas que determinavam a posição exata para que as pedras se encaixassem perfeitamente umas sobre as outras. Além disso, há um grande conhecimento geométrico na engenharia utilizada na construção de labirintos na parte interna das pirâmides como estratégia para enganar os violadores de tumba e proteger toda as riquezas dos faraós, que seriam guardadas junto a eles no momento em que fossem mumificados.

Segundo Mendonça (2019), existe um total de 123 pirâmides no Egito. As mais conhecidas são as pirâmides de Queóps, de Quéfren e de Miquerinos (**Figura 45**), as quais representam uma família de faraós e estão localizadas na península de Gizé. Curiosamente, essa terna de pirâmides é a única das sete maravilhas do mundo que até os dias atuais resiste intacta às ações do tempo.

Figura 45 — As três principais pirâmides do Egito

Fonte: MENDONÇA (2019). Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/ artes/piramides-do-egito. Acesso em: 15 jun. 2022.

Esperamos que esse breve histórico tenha despertado em você o interesse e a curiosidade em aprender mais sobre as pirâmides e que tenha conseguido memorizar a forma geométrica delas, pois essa compreensão é muito importante para o conhecimento do mundo e para a continuidade dos seus estudos, incluindo a matemática e outras disciplinas.

Como você já estudou sobre os prismas, já conhece os polígonos e possui uma boa noção espacial, não terá dificuldades em identificar a base, as faces, as arestas e os vértices das pirâmides, além de calcular áreas e volume. Não mostraremos muitos detalhes, porém você pode avançar nesse estudo com o auxílio do GeoGebra.

Que tal iniciarmos observando os elementos da pirâmide?

3.4.1 Elementos da pirâmide

Agora que você tem ideia do que seja uma pirâmide, veja se encontra algum objeto com a mesma forma geométrica para facilitar suas observações. Se não encontrar, não tem problema! Vamos tentar construir e compreender a estrutura das pirâmides no GeoGebra. Para isso, prossiga como nos passos a seguir.

Passo 1. Na Janela de Visualização 2D, crie um controle deslizante n, configurando-o como na Figura 46.

Figura 46 — Criação e configuração do Controle Deslizante "n" para o polígono da base

Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 2. Ainda na Janela 2D, construa a base da pirâmide clicando na ferramenta "Polígono Regular", em seguida, em dois pontos distintos A e B, e defina, na caixa de diálogo, o número de vértices pelo parâmetro n do controle deslizante, como demonstrado na **Figura 47**.

Figura 47 — Construção da base da pirâmide vinculada ao Controle Deslizante "n"

Fonte: Elaborada pelo autor.

Use o controle deslizante n para visualizar todas as bases que você construiu para as pirâmides.

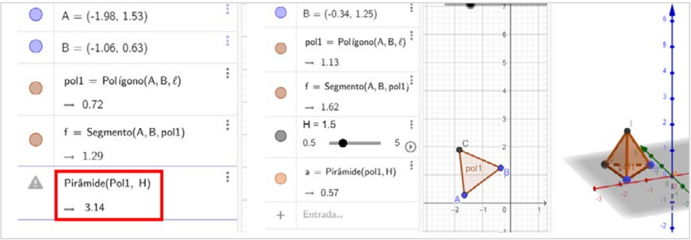
Passo 3. Crie outro controle deslizante H, configurando-o como na **Figura 48**. Com isso, você poderá variar a altura das pirâmides e observar o que acontece.

Figura 48 — Configuração do Controle Deslizante para definir a variação de altura da pirâmide

Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 4. Na Caixa de Entrada, digite o comando "Pirâmide (Pol1, H)" para gerar a pirâmide que tem como base o polígono apresentado na tela e a altura vinculada ao controle deslizante H, como demonstrado na **Figura 49**.

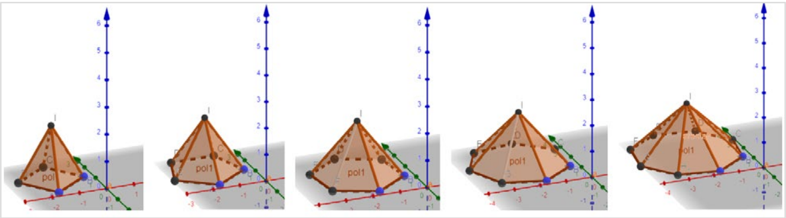
Figura 49 — Construindo a pirâmide com altura vinculada ao Controle Deslizante "H"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Use os controles deslizantes para obter pirâmides como as apresentadas na **Figura 50**. Aproveite para manipular atentamente cada figura, anotando e refletindo sobre suas descobertas, dúvidas e constatações.

Figura 50 — Pirâmides com bases determinadas pelo Controle Deslizante "l"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.4.2 Classificação das pirâmides

Observando as diversas pirâmides geradas com a variação do parâmetro do controle deslizante l, como mostrado na **Figura 50**, você pode perceber que os polígonos da base são o que diferem essas pirâmides. Desse modo, as pirâmides são classificadas, de acordo com o polígono da base, em pirâmide triangular, quadrangular, pentagonal e assim por diante.

Para compreender algumas relações, observe as pirâmides no GeoGebra, copie e preencha a **Tabela 3**.

Tabela 3 — Dados numéricos com base nas observações dos elementos de cada pirâmide

Tipo da Base	Núm. de Faces	Núm. de Vértices	Núm. de Arestas
Triangular			
Quadrangular			
Pentagonal			
Hexagonal			
Heptagonal			
Octogonal			

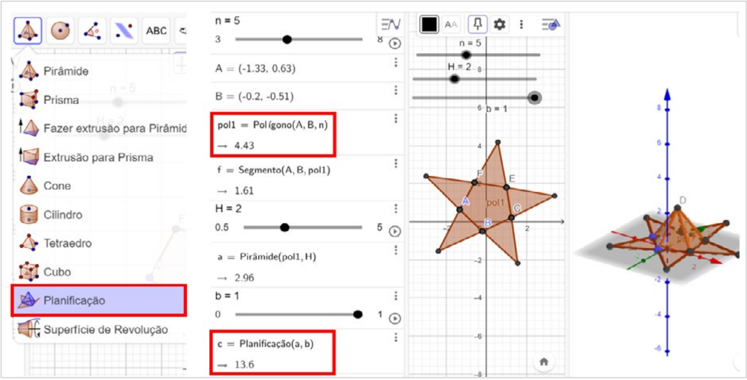
Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, para cada linha da **Tabela 3**, faça a soma das colunas 2 e 3 e compare com a coluna 4, para verificar se a Relação de Euler é válida também para as pirâmides.

3.4.3 Área lateral e área total de uma pirâmide

Considerando a pirâmide já construída no tópico 3.4.1, clique na ferramenta "Planificação" e acione o controle deslizante "b", como demonstrado na **Figura 51**.

Figura 51 — Planificação de uma pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

O processo de planificação gerou o *controle deslizante* b, cujo parâmetro varia de 0 a 1. Isso representa o percentual de abertura da figura. Somente quando b = 1 a figura aparece na Janela de Visualização 2D, pois encontra-se 100% planificada, ou seja, todas as faces estão totalmente apoiadas no plano da base.

O dado numérico que acompanha o elemento "pol1 = Polígono(A,B,n)" representa a área da base e o que acompanha o elemento "c = Planificação(a,b)" representa a área total da pirâmide.

É importante que você faça todos os cálculos. No entanto, é possível determinar a área lateral da pirâmide calculando a diferença entre a área total e a área da base.

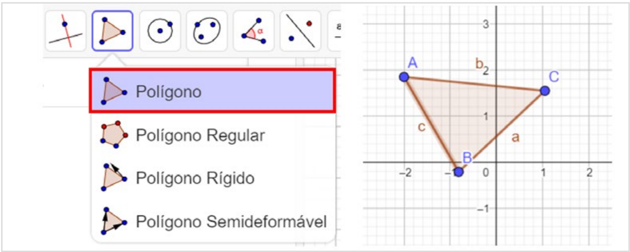
Por exemplo, a pirâmide representada na **Figura 51** tem área da base igual a 4,43 e área total igual a 13,6, portanto sua área lateral é 13,6 – 4,43 = 9,17 unidades quadradas.

3.4.4 Volume da pirâmide

Uma forma interessante e mais fácil de ser deduzida a fórmula do volume da pirâmide é considerar a relação entre o volume da pirâmide e o volume de um prisma de mesma base. Como você já sabe calcular o volume do prisma, fica mais simples compreendê-la. Vamos para o GeoGebra realizar a atividade a seguir?

Passo 1. Na Janela 2D, crie um triângulo clicando na ferramenta "Polígono" e, em seguida, em três pontos distintos A, B e C, fechando a figura no ponto A, como mostra a **Figura 52**.

Figura 52 — Construção de base triangular para prisma e pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra.

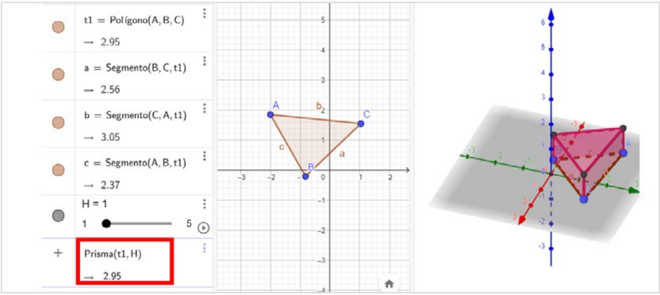
Passo 2. Para variar a altura, crie um controle deslizante, configurando-o como na **Figura 53**.

Figura 53 — Configuração do Controle Deslizante vinculado à altura do prisma e da pirâmide

Fonte: Elaborada pelo autor.

Passo 3. Na caixa de entrada, digite o comando "Prisma (t1,H)" para criar o prisma cuja base é o triângulo t1 e a altura varia conforme o parâmetro H do controle deslizante. Veja a **Figura 54**.

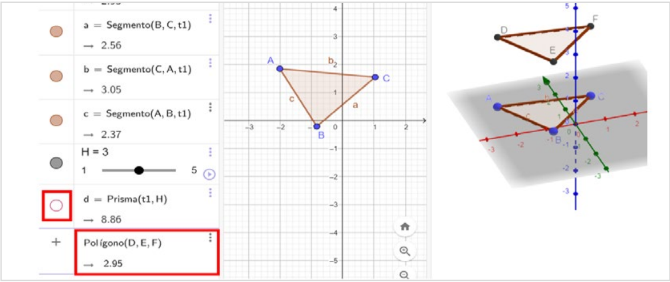
Figura 54 — Construção do prisma de base "t1" e altura vinculada ao Controle Deslizante "H"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 4. Para melhor visualização, vá à Janela de Álgebra e desmarque o elemento "Prisma (t1,H)". Caso outros elementos sejam também desmarcados, marque-os novamente, mantendo desmarcado apenas o elemento Prisma. Na caixa de entrada, digite Polígono (D,E,F), como demonstrado na **Figura 55**.

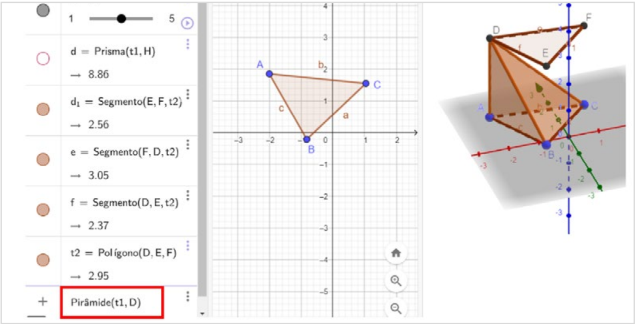
Figura 55 — Omitindo o prisma e evidenciando suas duas bases



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 5. Construa outra pirâmide de base coincidente com a base inferior do prisma e vértice coincidindo com um dos vértices da base superior, digitando, na caixa de entrada, o comando “Pirâmide (t1, D)”, como demonstrado na **Figura 56**.

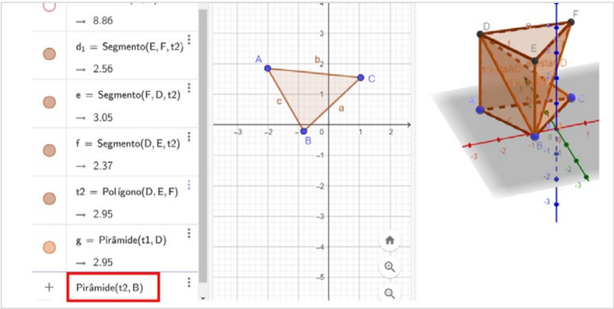
Figura 56 — Construção de pirâmide com a base inferior do prisma e vértice no ponto D



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Passo 6. Crie outra pirâmide, agora com a base coincidente com a base superior do prisma e vértice coincidindo com um dos vértices da base inferior. Para isso, na caixa de entrada, digite o comando “Pirâmide (t2, B)”, como demonstrado na **Figura 57**.

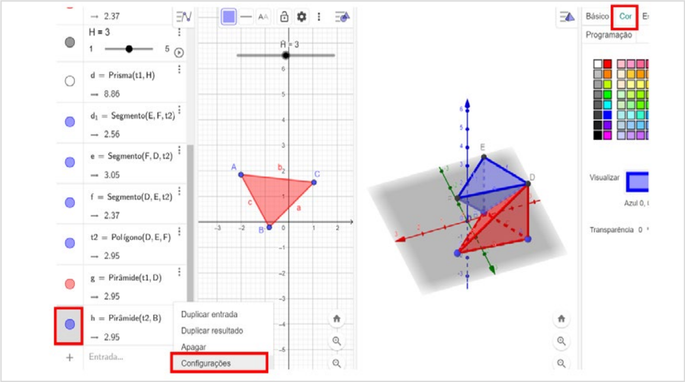
Figura 57 — Criação de pirâmide com a base superior do prisma e vértice no ponto B



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Mova a figura procurando uma posição que permita perceber partes que faltam para preencher um polígono convexo. Em seguida, altere a cor das pirâmides, de preferência com cores bem distintas. Isso pode ser feito selecionando o elemento "Pirâmide" na Janela de Álgebra e clicando nos três pontinhos para acessar "Configurações", depois em "Cor". Isso facilita para você distinguir as duas pirâmides que compõem o poliedro, como evidenciado na **Figura 58**.

Figura 58 — Movendo o poliedro e alterando as cores das pirâmides

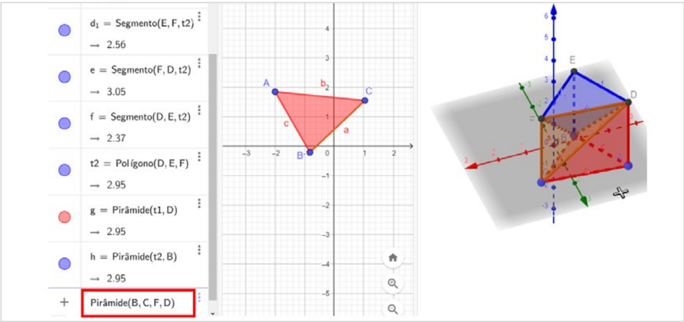


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Percebe que uma pirâmide de base triangular se encaixa perfeitamente no espaço que falta para tornar o poliedro convexo? Os procedimentos para construção dessa pirâmide ocorrem conforme o **Passo 3**.

> **Passo 7.** Na caixa de entrada, digite o comando *Pirâmide* (B,C,F,D) para que seja criada a pirâmide que completa o preenchimento do prisma, como demonstrado na **Figura 59**.

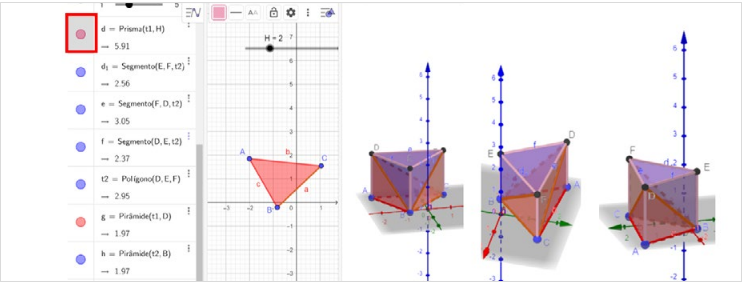
Figura 59 — Construindo a pirâmide que completa o preenchimento do prisma



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Marque novamente o elemento “d = Prisma(t1,H)” e manipule a figura de modo que possa ser observada sob diversos ângulos. Note que a junção das três pirâmides coincide exatamente com o Prisma d, conforme a **Figura 60**.

Figura 60 — Visualização do prisma preenchido pelas três pirâmides de igual volume



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Na **Figura 60**, o volume de cada pirâmide é 1,97 unidades cúbicas e o volume do prisma é 5,91 unidades cúbicas.

Use o controle deslizante para variar a altura e, para cada figura, observe os dados na Janela de Álgebra, faça a soma dos volumes das três pirâmides e compare com o volume do prisma. Vá anotando tudo e depois observe com atenção. Podem ocorrer possíveis divergências nos valores porque o GeoGebra opera com aproximações, mas essas diferenças são mínimas e irrelevantes.

Agora, calcule a razão entre o volume de uma pirâmide e o volume do prisma, como no exemplo a seguir.

$$Exemplo: \quad \frac{Volume\ do\ Prisma\ "d"}{Volume\ da\ Pirâmide\ "g"} = \frac{5{,}91}{1{,}97} = 3$$

Ao realizar os cálculos, é provável que você perceba que, mesmo com as possíveis inexatidões, a razão procurada será sempre igual a 3 ou, em raros casos, muito próximo desse valor.

À vista disso, pela propriedade fundamental das proporções, tem-se que:

$$Volume\ da\ Pirâmide\ g = \frac{1}{3}.Volume\ do\ Prisma\ "d"$$

Pelo Princípio de Cavalieri, é possível mostrar que, dada uma pirâmide qualquer e um prisma de mesma base e altura igual à altura da pirâmide, vale sempre a relação

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}.V_{Prisma}$$

Como o volume do prisma de altura H e área da base dada por é

$$V_{Prisma} = A_{Base}.H$$

deduz-se que o volume da pirâmide de altura H é dado pela relação

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}.A_{Base}.H$$

Para saber mais sobre as pirâmides, assista ao **Vídeo 10**.

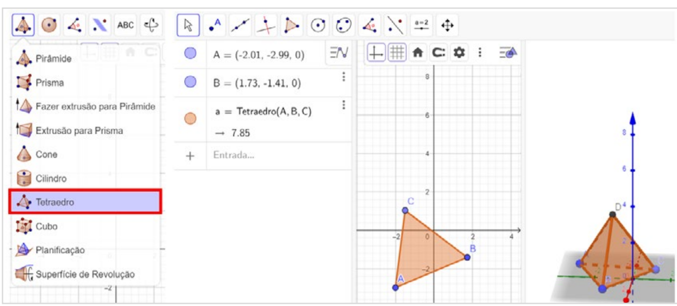
Vídeo 10 — Saiba mais sobre as pirâmides

Fonte: PIRÂMIDES - Elementos e Classificação. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (14 min). Publicado pelo canal Revisando Matemática. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=enHOS-5sAqNw&ab_channel=RevisandoMatematica. Acesso em: 3 ago. 2022.

3.5 Aprendendo sobre os tetraedros (voltar ao sumário)

Para construir um tetraedro no GeoGebra, clique na ferramenta "Tetraedro" e, em seguida, em dois pontos quaisquer sobre o plano da Janela de Visualização 3D. Será gerado o tetraedro de base ABC, como ilustrado na **Figura 61**.

Figura 61 — Tetraedro de base ABC



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Observando a figura, você consegue perceber que um tetraedro é um caso especial de pirâmide? É uma pirâmide triangular, não é?

Manipule a figura e destaque alguma característica especial em relação às faces.

Percebe que todas as faces são triângulos equiláteros? Então, temos um tetraedro regular na figura, um dos cinco sólidos platônicos que serão estudados mais adiante.

Vamos aprender mais sobre os elementos do tetraedro e aprender a calcular a área e o volume desse sólido geométrico?

3.5.1 Elementos, área e volume do tetraedro

Para esse estudo, no GeoGebra, construa um tetraedro regular de aresta medindo “a”, procedendo como nos passos seguintes.

1) Para controlar a medida das arestas, crie um controle deslizante “a” e configure-o como na **Figura 62**.

Figura 62 — Configuração do Controle Deslizante “a”

Fonte: Elaborada pelo autor.

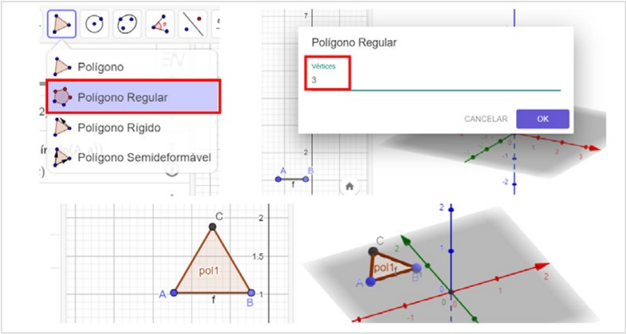
2) Clique na ferramenta “Segmento de Comprimento Fixo” e, em seguida, em uma região qualquer da Janela 2D, preenchendo o campo “Comprimento” com a letra “a”, como demonstrado na **Figura 63**. Assim, você criou uma aresta da base do tetraedro vinculada ao controle deslizante!

Figura 63 — Construção de segmento de comprimento fixo vinculado ao Controle Deslizante “a”

Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Para construir o triângulo equilátero que servirá de base para o tetraedro, clique na ferramenta “Polígono Regular” e nos extremos A e B do segmento de comprimento fixo do passo anterior. Desse modo, será criado o triângulo ABC de lado medindo “a”, como demonstrado na **Figura 64**.

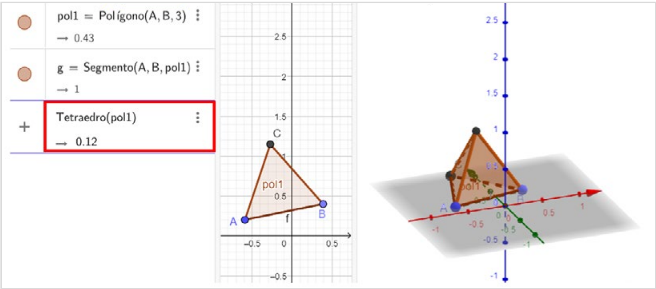
Figura 64 — Construção de triângulo equilátero ABC, base do tetraedro de aresta “a”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

4) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando “Tetraedro (pol1)”. O sólido será gerado como na **Figura 65**.

Figura 65 — Construção do tetraedro de base "pol1" e aresta "a"

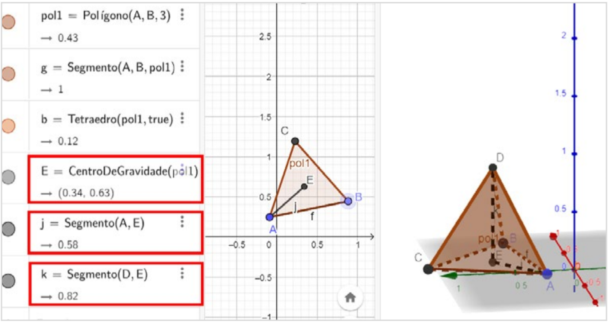


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Embora o GeoGebra já apresente o volume do tetraedro, é importante que você visualize os segmentos necessários para o cálculo algébrico. Para isso, proceda como o indicado:

5) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando "CentroDeGravidade (pol1)", depois *Segmento*(A,E) e, finalmente, *Segmento*(D,E), gerando os catetos do triângulo retângulo AED, como demonstrado na **Figura 66**.

Figura 66 — Construção do tetraedro de base "pol1" e aresta "a"

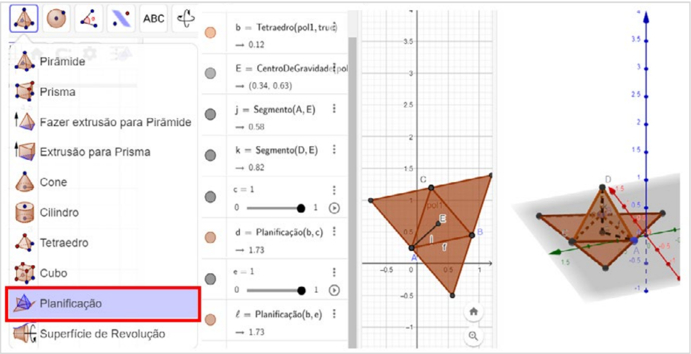


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Lembre-se que a medida do segmento equivale a dois terços da altura do triângulo equilátero ABC – e essa altura você já aprendeu como calcular. O segmento é a altura do tetraedro, que pode ser calculada utilizando-se o teorema de Pitágoras.

Clique na ferramenta *Planificação* e depois selecione o tetraedro, como demonstrado na **Figura 67**.

Figura 67 — Planificação do tetraedro



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Faça os cálculos para verificar que a área da superfície do tetraedro regular, em função da medida "a" da aresta, é dada pela expressão

$$A = a^2\sqrt{3}$$

e o volume por

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Para saber mais sobre os tetraedros, assista ao **Vídeo 11**.

Vídeo 11 — Saiba mais sobre os tetraedros

Fonte[3]: #APRENDER Geometria Espacial - Estudo do TETRAEDRO REGULAR Parte 02. [*S. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal APRENDER & EVOLUIR: Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=uioTwag2nYs&ab_channel=APRENDER%26EVOLUIR. Acesso em: 3 ago. 2021.

3.6 Aprendendo sobre poliedros regulares (voltar ao sumário)

Vamos estudar sobre alguns poliedros convexos especiais. Dentre todos os poliedros convexos, existem apenas cinco poliedros regulares, também chamados de poliedros de Platão ou poliedros platônicos. Esses serão os sólidos geométricos abordados neste tópico.

Para saber mais sobre poliedros regulares, assista ao **Vídeo 12**.

Vídeo 12 — Poliedros regulares

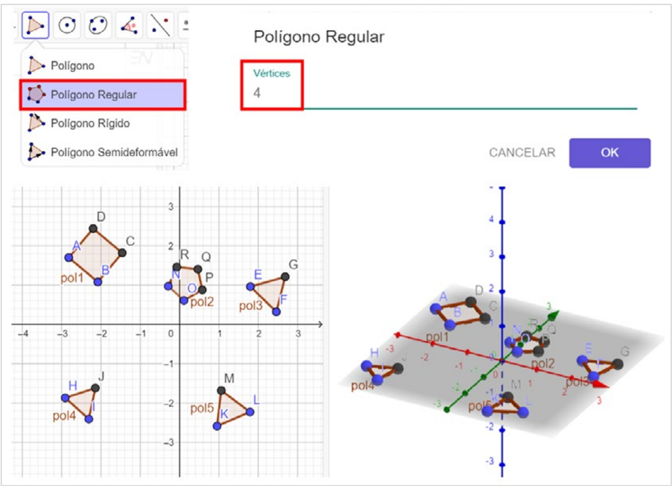
Fonte: POLIEDROS REGULARES | POLIEDROS DE PLATÃO | GEOMETRIA ESPACIAL | \Prof. Gis/. [*S. l.*: *s. n.*], 2021. 1 vídeo (9 min). Publicado pelo canal Gis com Giz Matemática. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=DbzVhSYPxQc&t=7s. Acesso em: 3 ago. 2022.

Agora que você já sabe quais são os poliedros regulares, vamos construí-los no GeoGebra, conforme os passos a seguir.

3 Lembrete: Todos os vídeos e as imagens contidas neles são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

Passo 1. Na Janela de Visualização 2D, construa um quadrado, um pentágono regular e três triângulos regulares distintos. Mantenha um bom distanciamento entre as figuras para melhor visualização durante as atividades posteriores. Todos esses polígonos podem ser construídos clicando na ferramenta "Polígono Regular" e em dois pontos distintos da janela de visualização. Na caixa de diálogo que se abre, preencha o campo "Vértices" com o número 3, depois o 4 e, em seguida, o 5. Feito isso, serão apresentadas na tela representações como as da **Figura 68**.

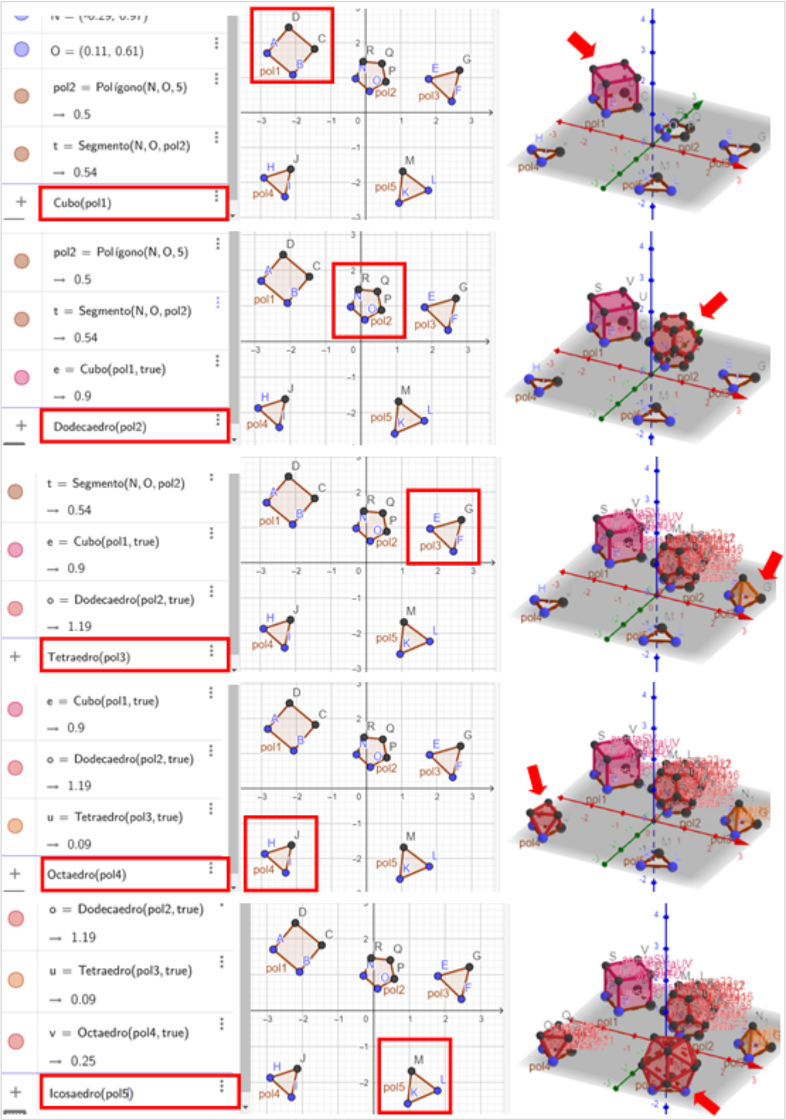
Figura 68 — Construção dos polígonos base para os poliedros regulares (ou poliedros de Platão)



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Na Caixa de Entrada, digite os comandos "Cubo (pol1)"; depois o "Dodecaedro (pol2)"; em seguida, o "Tetraedro(pol3); depois o "Octaedro(pol4) e, finalmente, o "Icosaedro(pol5)" para gerar os poliedros regulares, como demonstrado na **Figura 69**.

Figura 69 — Construção dos poliedros regulares (ou poliedros de Platão)

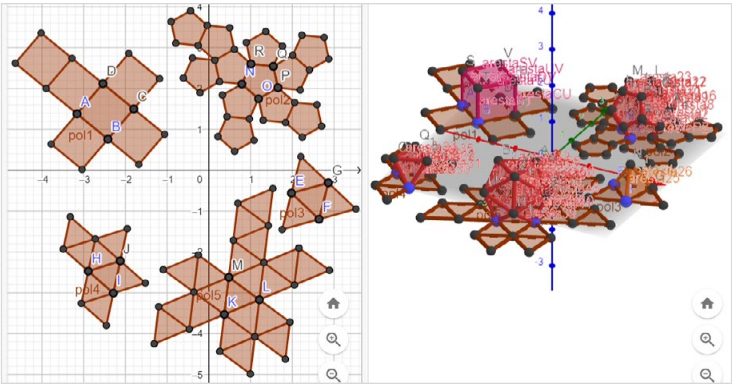


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.6.1 *Forma planificada dos poliedros regulares*

Manipule atentamente as figuras e anote suas observações. Após isso, clique na ferramenta "Planificação" e em cada um dos poliedros, obtendo o resultado como na **Figura 70**. Procure identificar cada poliedro pela sua forma planificada e a quantidade de faces de cada um.

Figura 70 — Forma planificada dos poliedros regulares (ou poliedros de Platão)



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.6.2 *Poliedros de Platão e a Relação de Euler*

Observando os poliedros regulares no GeoGebra, copie e preencha a **Tabela 4**.

Tabela 4 — Registro sobre os elementos observados nos poliedros de Platão

Poliedro	Polígono da face (nomenclatura)	Número de faces (F)	Número de vértices (V)	Número de arestas (A)
Hexaedro (Cubo)	*Quadrado*			
Dodecaedro	*Pentágono regular*			
Tetraedro	*Triângulo equilátero*			
Octaedro				
Icosaedro				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, para cada linha da **Tabela 4**, faça a soma da terceira com a quarta coluna e compare o resultado com a quinta colona. Veja se o **Teorema 6.1** está de acordo com o que você constatou. Essa é a famosa Relação de Euler.

Teorema 6.1 (Relação de Euler)
Em todo poliedro convexo é válida a relação:
ou, de modo equivalente, ,
em que V, A e F representam, respectivamente, a quantidade de vértices, arestas e faces.

Definição 6.1 (Poliedros platônicos)
Diz-se que um poliedro será platônico se, e só se, for convexo, assim, em todo o vértice concorre o mesmo número de arestas, toda face tem o mesmo número de arestas e é válida a Relação de Euler.

Verifique se essas informações são válidas para as figuras geradas no GeoGebra.

Para compreender melhor a Relação de Euler, assista ao **Vídeo 13**.

Vídeo 13 — Relação de Euler

Fonte: POLIEDROS - RELAÇÃO DE EULER \Prof. Gis/. [*S. l.: s. n.*], 2021. 1 vídeo (23 min). Publicado pelo canal Gis com Giz Matemática. Disponívem em: www.youtube.com/watch?v=5P_Gx4PP2hw&ab_channel=GiscomGizMatem%C3%A1tica. Acesso em: 3 ago. 2022.

3.7 Aprendendo sobre os cilindros (voltar ao sumário)

Considerando-se dois planos distintos e paralelos e, assim como mencionado no estudo dos prismas, tomemos sobre esses planos duas regiões circulares (círculos) e, de raios congruentes e centros e. Traçando-se o segmento de reta, o conjunto desse segmento e todos os segmentos de reta paralelos a ele, cujas extremidades pertencem aos círculos e, é denominado cilindro de bases e.

Para construir um cilindro reto no GeoGebra 3D, de modo que sua altura e o raio da base possam ser facilmente manipulados, proceda como nos passos a seguir.

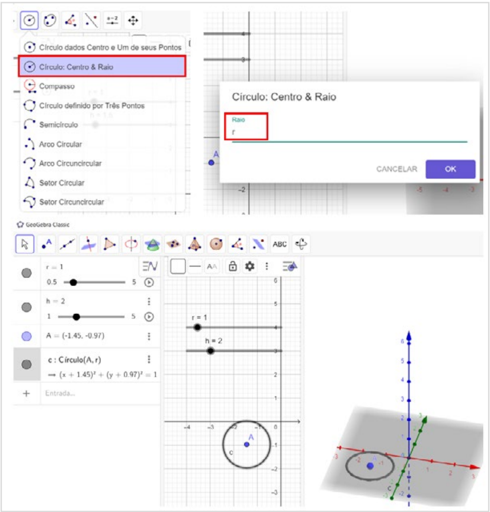
1) Inicialmente, crie dois controles deslizantes e configure-os como na **Figura 71**.

Figura 71 — Configuração dos controles deslizantes vinculados ao raio e à altura do cilindro

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Como base para o cilindro, construa um círculo com raio vinculado ao controle deslizante r. Para isso, clique na ferramenta "Círculo: Centro & Raio" e em um ponto qualquer da Janela 2D. Preencha o campo "Raio" com o parâmetro r e clique em OK para que seja gerada uma imagem como na **Figura 72**.

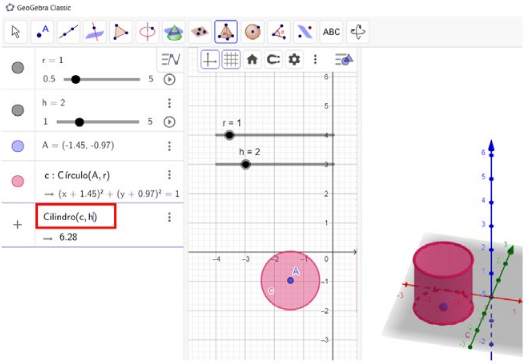
Figura 72 — Construção do círculo de raio vinculado ao Controle Deslizante "r"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando "Cilindro (c, h)", como ilustrado na **Figura 73**.

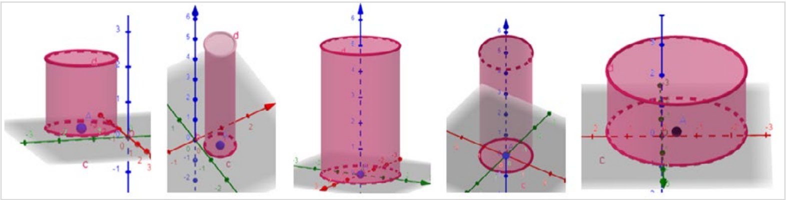
Figura 73 — Construção do cilindro de base "c", com altura vinculada ao Controle Deslizante "h"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Manipule os controles deslizantes e também de movimentos na tela, de modo a observar diferentes sólidos sob diversos ângulos, como ilustrado na **Figura 74**.

Figura 74 — Diferentes vistas do cilindro reto, possibilitadas pelas manipulações



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.7.1 Elementos e classificação dos cilindros

Você já deve ter percebido que, semelhantemente aos prismas, os cilindros têm duas bases paralelas e uma superfície lateral. A principal diferença é que as bases são circulares e não poligonais, ao passo que a superfície lateral não é composta de polígonos, mas de uma superfície curva.

As bases são duas regiões circulares de mesmo raio, situadas em planos distintos e paralelos. Assim como nos prismas, a altura do cilindro corresponde à distância entre os planos que contêm suas bases. Sendo C_1 e C_2 os centros dos círculos das bases, a reta C_1C_2 chamada "eixo" do cilindro.

Os segmentos paralelos à reta C_1C_2, os quais estão situados na superfície do cilindro, são chamados "geratrizes".

Semelhante aos prismas, os cilindros são classificados em retos e oblíquos. Um cilindro será reto quando seu eixo for perpendicular aos planos de suas bases. Caso contrário, o cilindro é dito oblíquo.

Para saber mais, assista ao **Vídeo 14**.

Vídeo 14 — Elementos e classificação dos cilindros

PARA SABER

Clique no centro da tela da imagem

Se não abrir o vídeo, clique em "Assistir no YouTube"

Fonte[4]: CILINDRO (AULA 11/16). [*S. l.*: *s. n.*], 2016. 1 vídeo (8 min). Publicado pelo canal Equaciona Com Paulo Pereira: Disponível em: www.youtube.com/watch?v=rpbFsCa7D4E&ab_channel=EquacionaComPauloPereira. Acesso em: 4 ago. 2022.

3.7.2 Área da superfície lateral e área total do cilindro

A versão do GeoGebra utilizada neste trabalho não dispõe da ferramenta para planificação de corpos redondos, por isso não é possível obter as áreas do cilindro utilizando-se desse recurso, como foi sugerido no estudo dos prismas e pirâmides. No entanto, é fácil perceber que a superfície do cilindro, embora seja curva, pode ser representada na forma de uma figura plana retangular, cuja medida da base equivale ao perímetro do círculo da base e a altura é a mesma do cilindro.

Como já mostrado no **Vídeo 8**, a área lateral de um cilindro de raio r e altura h pode ser calculada por meio da relação

$$A_l = 2\pi r.h$$

Como a base é um círculo, você deve lembrar-se que a área da base é dada por

$$A_b = \pi r^2$$

e, então, a área total da superfície do cilindro pode ser obtida pela relação

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r.h$$

Para melhorar essa fórmula, você pode evidenciar o fator comum e obter a relação equivalente

$$A = 2\pi r(r + h),$$

que é, esteticamente, mais elegante que a outra.

4 Lembrete: Todos os vídeos e as imagens contidas neles são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

3.7.3 Volume do cilindro

Você deve imaginar que, por terem algumas propriedades em comum, o cálculo do volume do cilindro segue a mesma lógica utilizada para calcular o volume de um prisma, certo? A diferença está apenas na forma de se calcular as áreas das bases.

Para verificar se isso é verdade, vamos utilizar o Princípio de Cavalieri. Para isso, proceda como nos passos que se seguem.

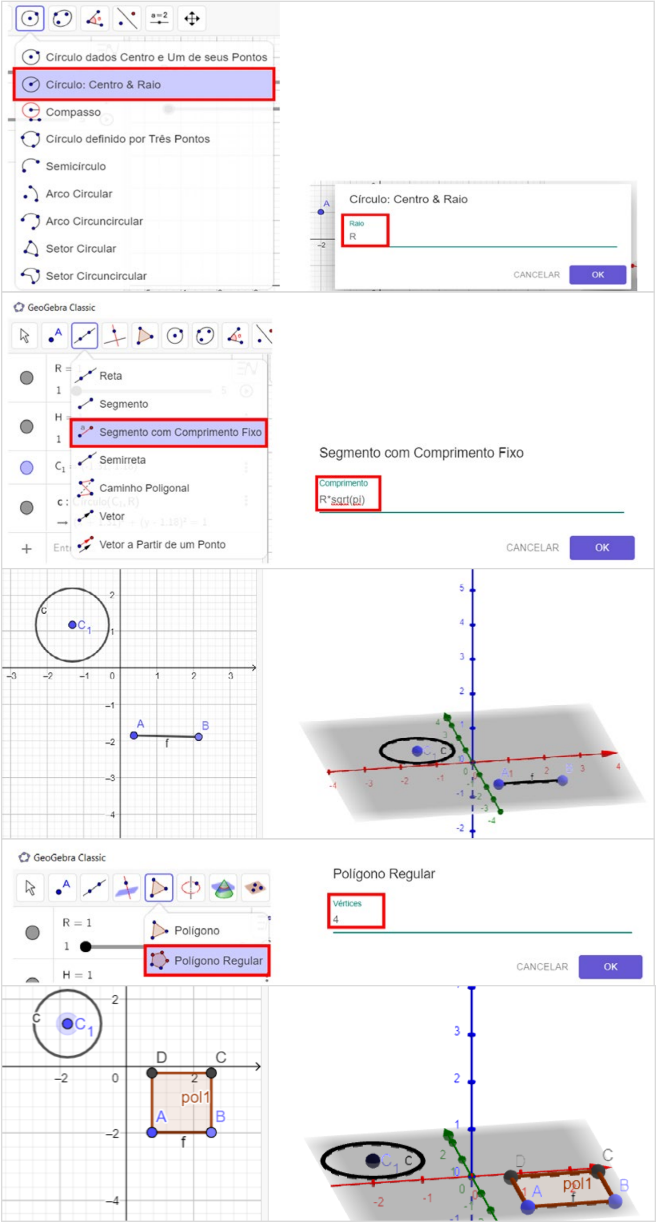
1) Crie dois controles deslizantes, "R" e "H", e configure-os como na **Figura 75**.

Figura 75 — Configuração dos controles deslizantes "R" e "H"

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Clique na ferramenta "Círculo: Centro & Raio" e em uma região qualquer da Janela 2D, preencha o campo Raio da caixa de diálogo com o parâmetro "R" e clique em OK. Em seguida, clique na ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo" e em outra região da Janela 2D, preenchendo o campo "Comprimento" da caixa de diálogo com o comando "R*sqrt(pi), clicando novamente em OK. Finalmente, selecione a ferramenta "Polígono Regular" e, nos pontos A e B extremos do segmento construído, preencha o campo "Vértices" da caixa de diálogo com o numeral 4. Desse modo, serão geradas a base circular de um cilindro e a base quadrada de um prisma, ambas de mesma área, como ilustrado na **Figura 76**.

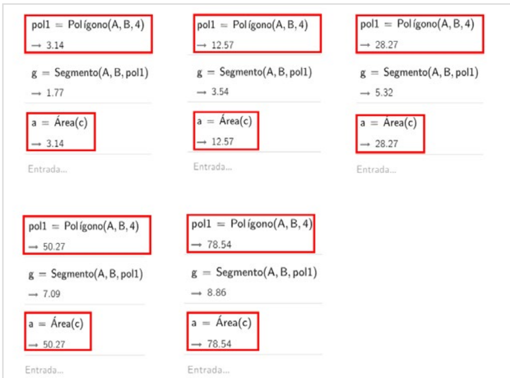
Figura 76 — Construção de círculo e polígono de mesma área vinculados ao Controle Deslizante “R”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3) Para ter a certeza de que a igualdade das áreas do cilindro e do polígono da **Figura 76** será preservada durante as manipulações, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando Área(c) e manipule o controle deslizante comparando valores dos campos referentes às áreas das duas figuras. O elemento "pol1" representa o polígono com sua área e o elemento "a" representa a área do círculo c, como demonstrado na **Figura 77**.

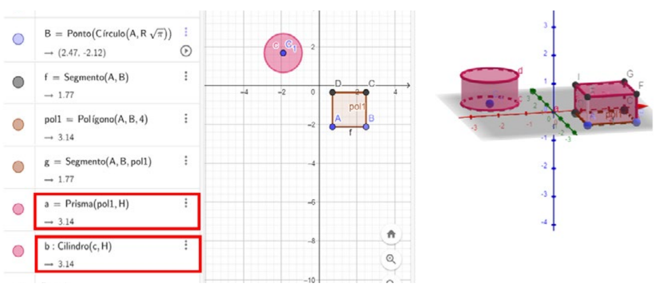
Figura 77 — Áreas das bases para R = 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente



Fonte: Elaborada pelo autor. Dados gerados no GeoGebra.

4) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, aparecerão os comandos *Prisma* (pol1,H) e *Cilindro* (c,H). Interessante destacar que os volumes dos dois sólidos são iguais, como demonstrado na **Figura 78**.

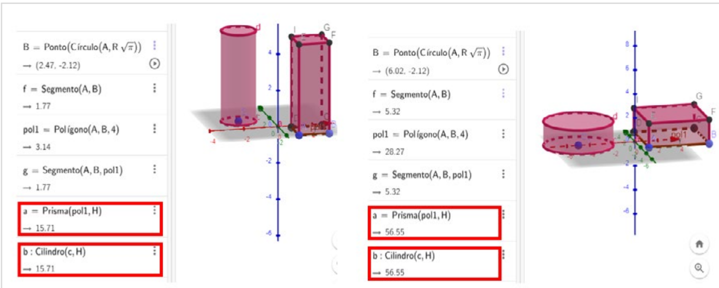
Figura 78 — Sólidos auxiliares para dedução do volume do cilindro pelo Princípio de Cavalieri



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Manipule os controles deslizantes, a exemplo do ilustrado na **Figura 79**.

Figura 79 — Volumes dos sólidos para R = 1 e H = 5 e para R = 3 e H = 2, respectivamente



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Manipulando os sólidos e utilizando os valores para calcular, verifique que, para o cálculo do volume do cilindro de raio r, vale a relação

Para saber mais sobre os cilindros, assista ao **Vídeo 15**.

Vídeo 15 — Saiba mais sobre os cilindros

Fonte: INTRODUÇÃO à Cilindros. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal 100 Problema - Prof. Gabriel Santana. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0I-mo2KUxIi8&ab_channel=100Problema. Acesso em: 4 ago. 2022.

3.8 Aprendendo sobre os cones (voltar ao sumário)

Pelas suas experiências práticas, é provável que você saiba o que é um cone e consiga identificá-lo entre outros sólidos geométricos. Que imagem vem a sua mente ao ouvir o nome "cone"? Pode ser que você pense em um cone de sinalização de trânsito, em um funil, em uma casquinha de sorvete, em um chapeuzinho de aniversário ou em outros objetos com forma geométrica parecida. Você reconhece as formas geométricas da **Figura 80** como cones?

Figura 80 — Objetos que lembram um cone

Fonte: Passei Direto. Disponível em: https://www.passeidireto.com/pergunta/65721231/ 4-objetos-que-lembram-o-cone. Acesso em: 3 jul. 2022.

Como já estudou sobre outros sólidos geométricos, é possível que você consiga perceber algumas semelhanças do cone com o cilindro, pelo formato da base e também em comparação à pirâmide, por ter apenas um vértice fora da base.

Para compreender melhor esse sólido geométrico tão presente em nosso cotidiano, vamos estudá-lo com o auxílio do GeoGebra 3D, certo? À vista disso, prossiga como nos passos a seguir.

1) Para construir um cone de altura h e base circular de raio r, de modo que essas medidas possam ser facilmente manipuladas, você deve iniciar pela criação de dois controles deslizantes, configurando-os como destacado na **Figura 81**.

Figura 81 — Configuração dos Controles Deslizantes "r" e "h" para raio e altura do cone

Fonte: Elaborada pelo autor.

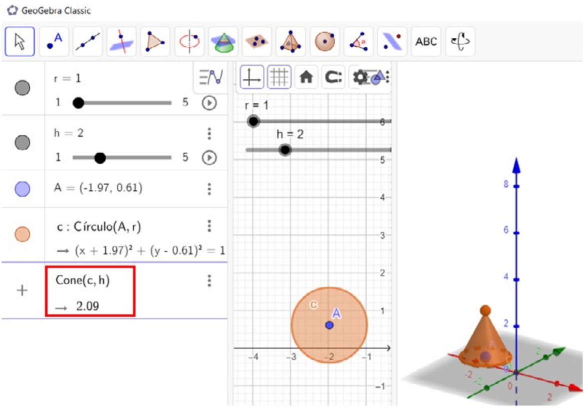
2) Para a base do cone, deve-se criar um círculo com centro móvel e raio vinculado ao controle deslizante "r", procedendo como na **Figura 82**.

Figura 82 — Construção de círculo de raio vinculado ao Controle Deslizante "r"

Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando *Cone*(c,h) como na **Figura 83**.

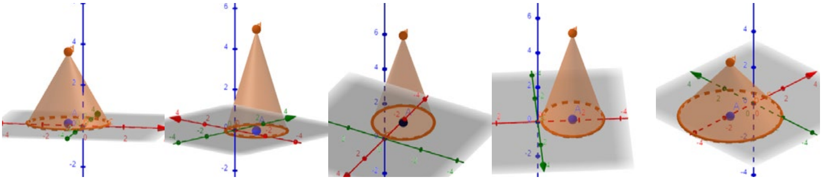
Figura 83 — Construção do cone de base "c" e altura "h"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Manipule os controles deslizantes e mova o sólido na Janela de Visualização 3D observando-o atentamente sob diferentes ângulos, a exemplo da **Figura 84**, tentando compreender sua estrutura, identificar seus elementos e perceber propriedades e relações.

Figura 84 — Alguns resultados da manipulação do cone no GeoGebra 3D

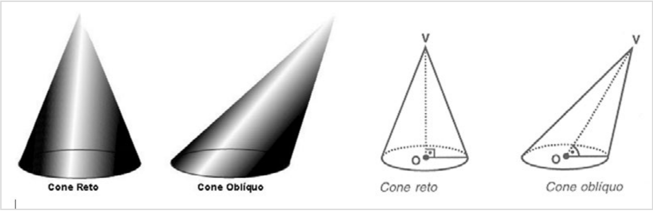


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.8.1 Elementos e classificação dos cones

A exemplo dos prismas e cilindros, os cones também classificam-se em reto e oblíquo. Observando a **Figura 85**, note que um cone é reto quando seu eixo é perpendicular ao plano da base e oblíquo quando não o é. Infelizmente o GeoGebra não fornece, em suas ferramentas básicas, meios para a construção de cones oblíquos.

Figura 85 — Diferenciação entre cone reto e cone oblíquo

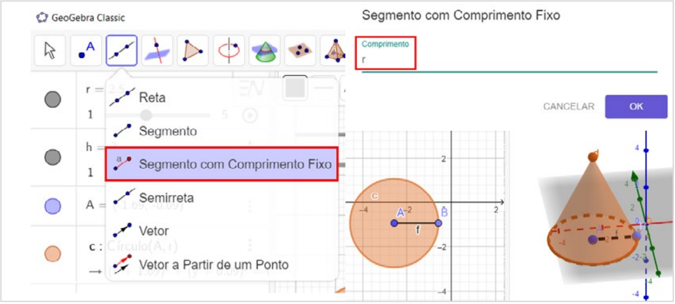


Fonte: Cursinho Popular Paulo Freire. Disponível em: https://cursinhopopularpaulofreire.wordpress.com/. Acesso em: 3 jul. 2022.

Para explorar esses sólidos geométricos no GeoGebra, proceda como se segue.

4) Clique na ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo" da Janela 2D, depois no centro do círculo (ponto A) e, após isso, na caixa de diálogo que é aberta, preencha o campo com o parâmetro "r", como ilustrado na **Figura 86**.

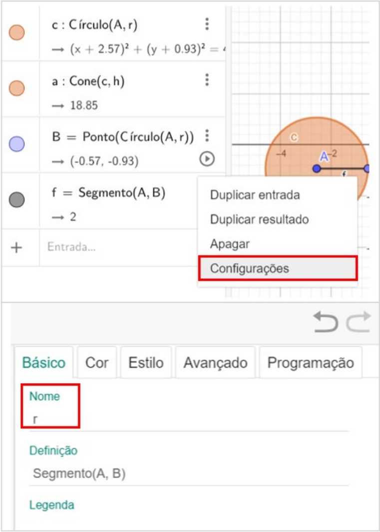
Figura 86 — Traçado do raio da base do cone vinculado ao Controle Deslizante "r"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

5) Para facilitar sua compreensão, clique nos dados referentes ao segmento "f" na Janela de Álgebra, acesse as "Configurações" e altere o nome "f" para "r", como demonstrado na **Figura 87**.

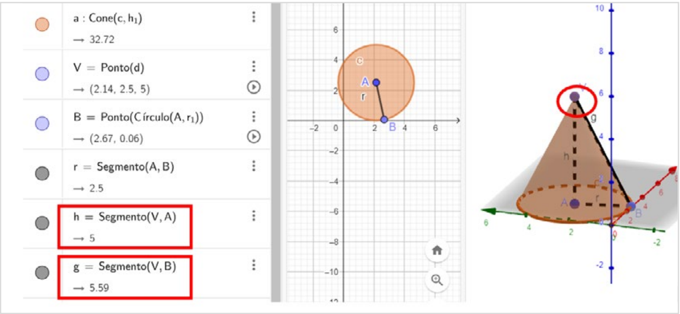
Figura 87 — Alterando o nome do segmento f para r, representando o raio



Fonte: Elaborada pelo autor.

6) Clique na ferramenta "Ponto" e, após isso, no vértice do cone. Para facilitar a associação desse ponto ao elemento vértice, vá em configurações e renomeie esse ponto como "V". Feito isso, clique na ferramenta "segmento" e, em seguida, nos pontos "V" e "A", renomeando esse segmento como "h". Repita o procedimento, só que, dessa vez, clicando nos pontos "V" e "B". Lembre-se que "V" é o vértice, "A" é o centro da base e "B" é uma extremidade do raio r. Desse modo, o segmento VA representa a altura do cone e deve ser renomeado como "h" e o segmento VB representa a geratriz do cone e deve ser renomeado como "g". Os elementos devem ser apresentados como na **Figura 88**.

Figura 88 — Traçado dos elementos eixo e geratriz do cone



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Tendo ciência de que a figura explorada trata-se de um cone reto, você deve perceber que o triângulo ABV é retângulo, pois o eixo VA é perpendicular ao plano da base, no qual está contido o raio AB. Desse modo, conhecidas as medidas da altura h e do raio r, ambos catetos do triângulo retângulo ABV, de hipotenusa g, você pode calcular a medida da geratriz g aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABV. Note que r e h são determinados pelos parâmetros dos controles deslizantes e, portanto, só resta a você calcular o valor de g e comparar com a medida da geratriz g dada pela Janela de Álgebra do GeoGebra.

Por exemplo, pela **Figura 87** tem-se que

$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$g^2 = 2{,}5^2 + 5^2$$

$$g = \sqrt{31{,}25}$$

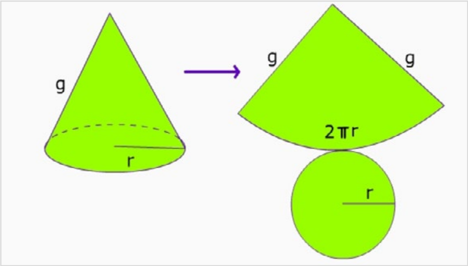
$$g = 5{,}59$$

É importante que você efetue esses cálculos e compare com os dados da Janela de Álgebra para perceber a importante integração entre Geometria e Álgebra.

3.8.2 Área da superfície do cone

A exemplo do que pode ser feito no caso de prismas e pirâmides, uma forma lógica para se calcular a área da superfície de um cone seria partindo da planificação desse sólido. No entanto, por ter uma superfície lateral curva, o cone, assim como o cilindro e a esfera, enquadra-se na classe dos sólidos redondos, para os quais o GeoGebra não disponibiliza a ferramenta "Planificação". Contudo, você pode encontrar em alguns livros didáticos – ou mesmo consultando na internet – a planificação de um cone, como a apresentada na **Figura 89**.

Figura 89 — Forma planificada do cone



Fonte: Matemática.pt. Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/area-superficie-cone.php. Acesso em: 3 jul. 2022.

Note que a área lateral do cone corresponde à área de um setor circular e que, para calcular a área total, deve-se adicionar a essa área lateral a área do círculo de raio r, base do cone. Mas aqui faltam elementos para esse cálculo. Por isso, vamos apenas esclarecer que a área lateral do prisma de raio r e geratriz g é dada pela expressão

$$A_l = \pi . r . g$$

Com essa informação e já sabendo calcular a área da superfície circular, você pode deduzir que a área total da superfície do cone é

$$A = \pi r^2 + \pi . r . g$$

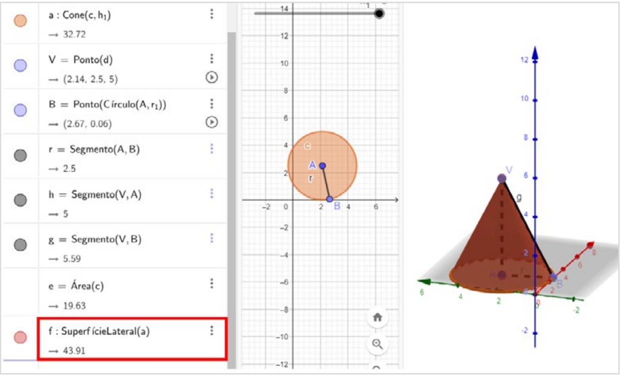
que, após alguns cálculos, resume-se a

$$A = \pi r(r + g)$$

Faça os cálculos utilizando a relação acima e depois recorra à Janela de Álgebra para verificar se os resultados obtidos nos cálculos estão corretos. Para tal, proceda como se segue.

7) Para obter a área total da superfície do cone “a”, na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando “SuperfícieLateral(a)”, como demonstrado na **Figura 90**.

Figura 90 — Apresentação da área da superfície do cone “a”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

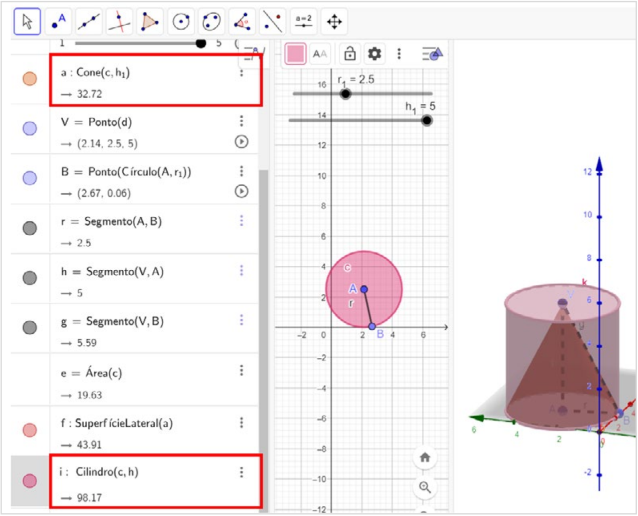
3.8.3 Volume do cone

Para dedução do volume do cone, uma alternativa interessante é construir, no GeoGebra 3D, um cilindro circunscrito ao cone, isto é, usar a mesma base do cone para esse cilindro e definir sua altura semelhante à do cone.

Como o cone construído para esse estudo tem como base o círculo “c” e altura vinculada ao Controle Deslizante “h”, deve-se construir o cilindro como se segue.

8) Na Caixa de Entrada da Janela de Álgebra, digite o comando “Cilindro(c,h)”. Desse modo, será gerado um cilindro, como ilustrado na **Figura 91**.

Figura 91 — Volume do cone e do cilindro de mesmo raio e alturas iguais



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Agora, manipule as figuras e observe atentamente o que ocorre. Copie a **Tabela 5** e registre nela os valores apresentados nos campos referentes aos volumes dos dois sólidos, como destacado na **Figura 91**.

Tabela 5 — Comparação dos volumes do cone e do cilindro

	Anotação 1	Anotação 2	Anotação 3	Anotação 4	Anotação 5	Anotação 6
$V_{Cilindro}$						
V_{Cone}						
$\frac{V_{Cilindro}}{V_{Cone}}$						

Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível que ocorram pequenas divergências nos cálculos, mas, caso isso aconteça, essa diferença é desprezível e, por isso, o valor pode sempre ser arredondado para 3. Tal divergência decorre das operações com o número irracional π (pi).

Com isso, você pode deduzir que

$$\frac{V_{Cilindro}}{V_{Cone}} = 3$$

E, então, pela Propriedade Fundamental das Proporções,

$$V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3}$$

portanto

$$V_{cone} = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$$

Percebe que a forma de calcular o volume do cone é muito parecido com a forma de calcular o volume da pirâmide? De fato, ambos os cálculos obedecem à mesma lógica, ou seja, representam a terça parte do produto entre a área da base e a altura do sólido geométrico.

Para saber mais sobre os cilindros, assista ao **Vídeo 16**.

Vídeo 16 — Saiba mais sobre os cones

Fonte: CONES. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (15 min). Publicado pelo canal COLÉGIO NOVAESCOLA: Disponível em: www.youtube.com/watch?v=7czepJadjGw&ab_channel=COL%C3%89GIONOVAESCOLA. Acesso em: 4 ago. 2022.

3.9 Aprendendo sobre esferas (voltar ao sumário)

Ao ouvir falar de esfera, é muito provável que venha a sua mente a imagem de uma bola e de outros objetos com a mesma forma geométrica. Isso é muito bom, haja vista que você já possui uma boa noção sobre essa forma geométrica.

Além de objetos esféricos, você deve estar familiarizado com objetos cuja forma geométrica aproxima-se a de uma semiesfera, isto é, metade de uma esfera, não é? Sabia que é possível construir uma esfera a partir da união de duas semiesferas de mesmo raio?

Objetos como os apresentados na **Figura 92** podem ajudá-lo a reconhecer outros objetos com formas semelhantes.

Figura 92 — Objetos que lembram uma esfera ou uma semiesfera

Fonte: Acervo pessoal do autor.

O que se segue é uma sugestão de atividade para você realizar no GeoGebra 3D, e aprender muitas coisas novas sobre esse importante sólido geométrico. Antes disso, imagine dois pontos O e P no espaço. Tome O como centro e a distância OP = R como o raio da esfera. A esfera é a união de todos os pontos do espaço que distam, no máximo, R do centro O.

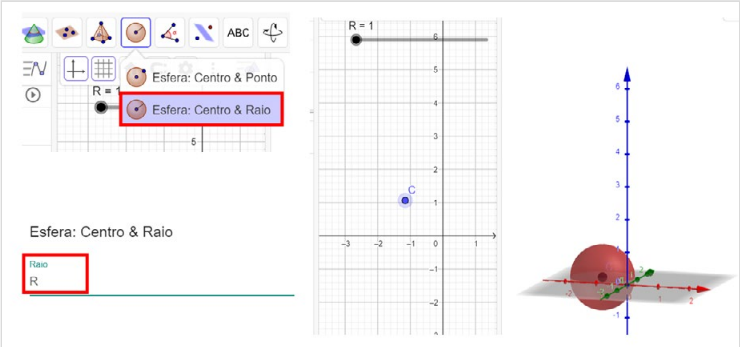
1) Na Janela 2D, crie de um controle deslizante R, configurando-o como na **Figura 93**.

Figura 93 — Configuração do Controle Deslizante “R”

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Para construir a esfera com raio vinculado ao controle deslizante, clique na ferramenta “Esfera: Centro & Raio” e em algum ponto sobre o plano da Janela 3D. Na caixa de diálogo que é aberta, preencha o campo “raio” com o parâmetro “r”. Para facilitar a compreensão, renomeie o cento da esfera (ponto A) como “C”, como ilustrado na **Figura 94**.

Figura 94 — Construção da esfera de raio vinculado ao Controle Deslizante “R”



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.9.1 *Volume da esfera*

Para compreender a expressão matemática que exprime o volume de uma esfera em função da medida de seu raio, vá para o GeoGebra e proceda como nos passos a seguir.

1) Na Janela de Visualização 2D, crie um controle deslizante, configurando-o como indicado na **Figura 95**.

Figura 95 — Criação e configuração do Controle Deslizante "R"

Fonte: Elaborada pelo autor.

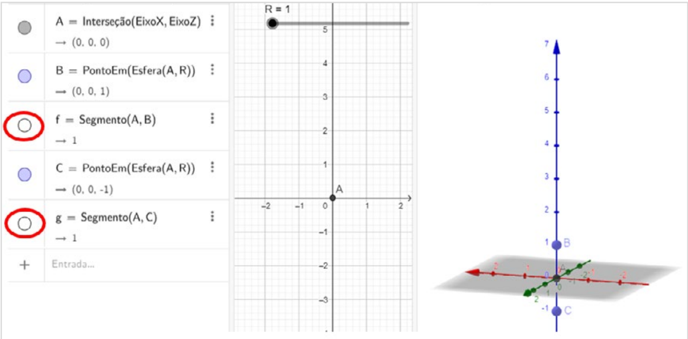
2) Algumas figuras dessa atividade dependem de dois pontos sobre o eixo Oz, simétricos e a uma distância variável R da origem. Para criar esses dois pontos, clique na Janela 3D, depois, na ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo" e, em seguida, na origem (0, 0, 0) do sistema cartesiano. Na caixa de diálogo que é aberta, preencha o campo "Comprimento" com o parâmetro "R". Será criado um segmento AB como na **Figura 96**, mas o que interessa, de fato, é o ponto B de sua extremidade fora da origem. Para criar o outro ponto, clique na origem novamente e preencha o campo "Comprimento" com o mesmo parâmetro "R". Desse modo, será criado um segmento AC de comprimento R, assim como AB.

Figura 96 — Criação de dois pontos B e C vinculados ao Controle Deslizante “R”

Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Criados os dois segmentos, clique na extremidade fora da origem de cada um deles e arraste esse ponto, colocando-o sobre o eixo Oz, um de cada lado da origem. Para isso, movimente a figura até colocá-la numa posição que facilite a fixação desses pontos em uma posição na qual apareça, na Janela de Álgebra, na forma (0, 0, 1) e (0, 0, -1), com o controle deslizante em . Feito isso, omita os segmentos, deixando visíveis apenas os pontos, como demonstrado na **Figura 97**.

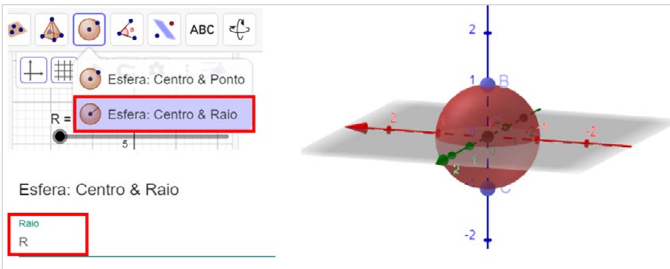
Figura 97 — Ajuste dos pontos B e C e omissão dos segmentos AB e AC



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

4) Clique na ferramenta "Esfera: Centro & Raio" e, em seguida, na origem (ponto A). Abrirá uma caixa de diálogo, na qual o campo "Raio" deve ser preenchido com o parâmetro "R". Desse modo, a esfera será apresentada como na **Figura 98**.

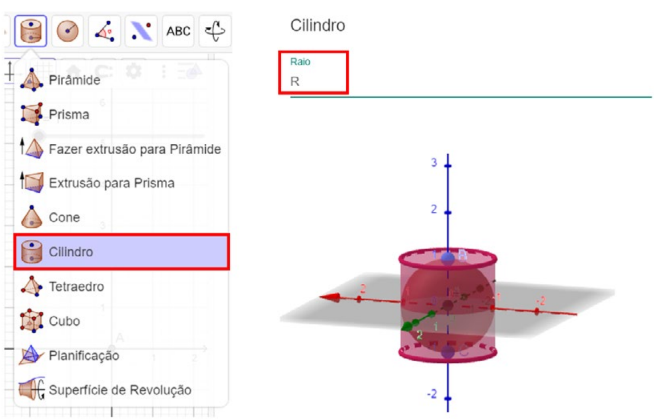
Figura 98 — Construção da esfera de raio vinculado ao Controle Deslizante "R"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

5) Clique agora na ferramenta "Cilindro" e depois sobre os pontos B e C. Na caixa de diálogo que é aberta, preencha o campo "Raio" com o parâmetro "R", gerando o cilindro circunscrito à esfera, como demonstrado na **Figura 99**.

Figura 99 — Construção do cilindro circunscrito à esfera



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

A partir dessa construção, já é possível comparar o volume da esfera com o volume do cilindro, bastando, para isso, manipular o controle deslizante. Anote os volumes dos dois sólidos e calcule a razão entre esses dois volumes para cada raio R. Em seguida, tente descobrir a fração que gera esse decimal.

Se sentir dificuldades em encontrar essa fração, assista ao **Vídeo 17**.

Vídeo 17 — Fração geratriz de uma dízima

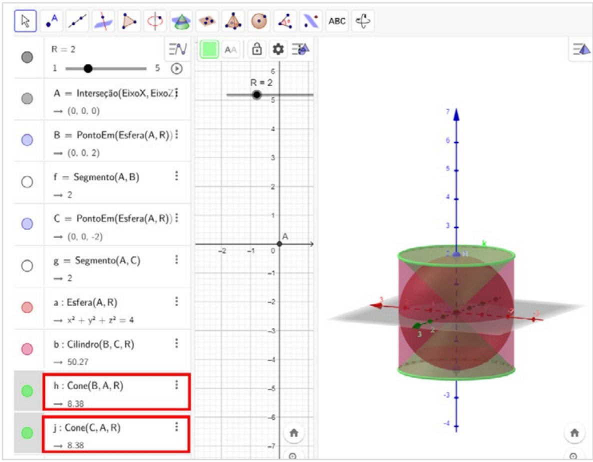
Fonte[5]: DÍZIMAS periódicas → Macete para encontrar a Fração Geratriz ☺. [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (4 min). Publicado pelo canal Ferretto Matemática. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Q65uuYakV3k&ab_channel=FerrettoMatemática. Acesso em: 4 ago. 2022.

Outra forma interessante de construir a expressão para o cálculo do volume de uma esfera é utilizando uma figura auxiliar, conhecida na geometria como clepsidra, que se trata de dois cones de mesma altura e bases congruentes e paralelas unidos pelos vértices. Para esse estudo, a clepsidra deve estar inscrita no cilindro e, para tanto, deve-se complementar a construção anterior como no passo seguinte.

6) Na caixa de diálogo da Janela de Álgebra, digite o comando "Cone (B,A,R)". Repita o procedimento digitando "Cone (C,A,R)". Esses parâmetros representam, respectivamente, o centro da base, o vértice e o raio dos cones. Será, assim, gerada a clepsidra inscrita no cilindro e vinculada ao controle deslizante "R". Para melhor visualização, mude a cor dos cones. A representação deve ficar como ilustrado na **Figura 100**.

5 Lembrete: Todos os vídeos e as imagens contidas neles são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

Figura 100 — Esfera e clepsidra inscritas no cilindro "b"



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Para que o volume da esfera seja exibido na Janela de Álgebra, na Caixa de Entrada, digite o comando "Volume(a)". Depois, manipule o controle deslizante e observe a variação dos volumes dos sólidos indicada na **Figura 101**. Nesse caso, o elemento "m" representa o volume da esfera "a". A região que fica dentro do cilindro, porém fora da clepsidra, é chamada "anticlepsidra", e seu volume corresponde à diferença entre o volume do cilindro e os volumes dos dois cones.

Figura 101 — Volumes dos sólidos para R = 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente

a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 1$	a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 4$	a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 9$	a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 16$	a : Esfera(A, R) → $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
b : Cilindro(B, C, R) → 6.28	b : Cilindro(B, C, R) → 50.27	b : Cilindro(B, C, R) → 169.65	b : Cilindro(B, C, R) → 402.12	b : Cilindro(B, C, R) → 785.4
h : Cone(B, A, R) → 1.05	h : Cone(B, A, R) → 8.38	h : Cone(B, A, R) → 28.27	h : Cone(B, A, R) → 67.02	h : Cone(B, A, R) → 130.9
j : Cone(C, A, R) → 1.05	j : Cone(C, A, R) → 8.38	j : Cone(C, A, R) → 28.27	j : Cone(C, A, R) → 67.02	j : Cone(C, A, R) → 130.9
m = Volume(a) → 4.19	m = Volume(a) → 33.51	m = Volume(a) → 113.1	m = Volume(a) → 268.08	m = Volume(a) → 523.6
Entrada...	Entrada...	Entrada...	Entrada...	Entrada...

Fonte: Elaborada pelo autor. Dados gerados pelo GeoGebra 3D.

Agora, copie e preencha a **Tabela 6**.

Tabela 6 — Volumes do cilindro e do cone e relação entre eles

Raio	$V_{Cilindro}$	V_{Cone}	V_{Esfera}	$V_{Cilindro} - 2.V_{Cone}$
1				
2				
3				
4				
5				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Preenchida a **Tabela 6**, após isso analise seus dados. Perceba que o volume da esfera de raio R pode ser calculado pela relação

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2\,.\,V_{cone},$$

em que todos os três sólidos têm raio R, cada um dos dois cones tem altura igual ao raio R e o cilindro tem altura igual ao diâmetro da esfera, ou seja, H = 2R.

Você já sabe as fórmulas para se calcular os volumes do cilindro e do cone, certo?

Então, substitua os termos e pelas suas respectivas fórmulas, já deduzidas em tópicos anteriores.

Desse modo, você deve chegar à relação:

$$V_{esfera} = \pi R^2.\,2R - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 R.$$

Agora, desenvolva os cálculos até chegar à expressão:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Na prática, a primeira expressão, aquela na qual o volume da esfera é dado em função dos volumes do cilindro e dos cones, já resolve nossos problemas do dia a dia. Porém, a continuidade dos cálculos facilita a compreensão dos conteúdos na forma como geralmente são expostos nos materiais didáticos utilizados nas escolas.

Vamos finalizar este tópico deduzindo com maior rigor matemático a fórmula do volume da esfera, com auxílio de figuras ilustrativas construídas no GeoGebra 3D.

Para que você compreenda a ideia, encontre sentido na fórmula e tenha certeza de que ela é realmente válida, faremos uma demonstração algébrica muito interessante, para a qual utilizaremos o Princípio de Cavalieri.

Antes de iniciar, vamos relembrar que a área de um círculo de raio r e o volume de um cilindro e de um cone, ambos de raio r e altura H, são dadas, nessa ordem, pelas expressões:

$$A_{círculo} = \pi r^2;$$

$$V_{cilindro} = \pi r^2 . H;$$

e

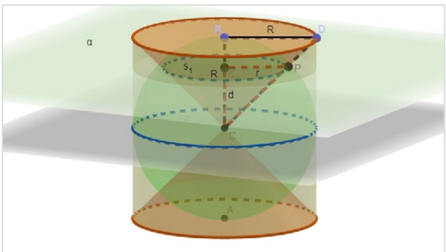
$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 . H.$$

Essas informações são importantes para a resolução do problema em questão, que se trata de calcular o volume de uma esfera de raio R.

Inclusive, você saber que a interseção dessa esfera com um plano, que a corta a uma distância d do seu centro, é uma superfície circular de raio r, com 0 < r < R, chamada seção transversal da esfera.

A **Figura 102** dá uma ideia do que seria uma seção transversal.

Figura 102 —Seção transversal determinada por um plano α sobre a clepsidra de raio R, a uma distância d do centro da esfera inscrita no cilindro de raio R

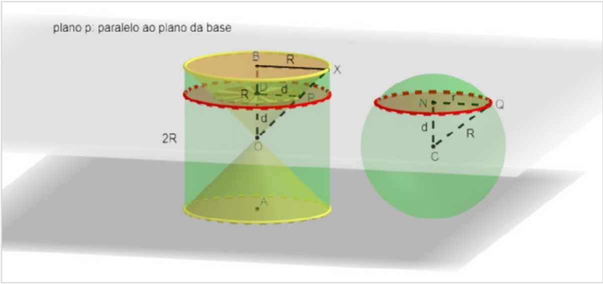


Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

3.9.2 Compreendendo melhor o volume da esfera

Lembra que a região interna ao cilindro e externa à clepsidra é chamada anticlepsidra? Pois bem, a seção transversal gerada pela interseção do plano com a anticlepsidra é uma coroa circular de centro D, limitada exteriormente por um círculo de raio R e inferiormente por outro círculo de raio d, como ilustrado na **Figura 103**. Essa é a mesma situação mostrada na **Figura 102**, porém separamos a esfera para você visualizar melhor e compreender a ideia.

Figura 103 — Seções transversais determinadas pelo plano p sobre a anticlepsidra e a esfera



Fonte: Elaborada pelo autor. Figura gerada no GeoGebra 3D.

Imagine que a anticlepsidra de raio R e altura 2R e a esfera de raio R, representadas na **Figura 102**, estão dispostas, lado a lado, sobre uma mesa (plano da base inferior), e que um plano p, paralelo aos planos das bases da anticlepsidra, corta esses dois sólidos, gerando as sessões transversais destacadas em vermelho como na **Figura 103**.

Perceba que, na clepsidra, os triângulos OBX e ODP são retângulos e têm um ângulo agudo em comum, pois BOX = DOP. Logo, pelo caso AA, esses triângulos são semelhantes (pesquise sobre semelhança de triângulos). Note, ainda, que o triângulo OBX é isósceles, isto é, tem dois lados com medidas iguais, e seus catetos medem R. Segue da semelhança de triângulos que o triângulo ODP também é isósceles e, portanto, o cateto DP tem medida d.

A seção transversal determinada pelo plano p sobre a anticlepsidra é uma coroa circular de área dada, dedutivamente, pela relação

$$A_1 = \pi R^2 - \pi d^2.$$

Evidenciando π,

$$A_1 = \pi(R^2 - d^2).$$

Na esfera, o triângulo CNQ também é retângulo e, portanto, vale o teorema de Pitágoras, em relação ao qual

$$R^2 = r^2 + d^2$$

e, portanto,

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

A sessão transversal determinada pelo plano p sobre a esfera é um círculo de raio r, cuja área é

$$A_2 = \pi r^2.$$

Como $r^2 = R^2 - d^2$, temos que a área dessa sessão é dada por

$$A_2 = \pi(R^2 - d^2).$$

Então, $A_1 = A_2$, ou seja, a área das duas sessões transversais, em função da distância d que separa o plano p do centro da esfera, será sempre igual para todo p pertencente ao intervalo fechado [0, R].

Em outras palavras, todo corte determinado pelo plano p sobre os dois sólidos a uma distância $d \leq R$ do centro da esfera determina uma seção transversal na anticlepsidra com área exatamente igual à área da seção transversal determinada pelo mesmo plano na esfera.

Sendo assim, tem-se, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume da esfera é igual ao volume da anticlepsidra de mesmo raio R e altura 2R igual ao diâmetro da esfera.

Como já foi visto que o volume de um cone é igual à terça parte do volume do cilindro de mesma base e alturas iguais, não é difícil deduzir que o volume da anticlepsidra consiste na diferença entre o volume do cilindro de raio R e altura 2R e o volume de dois cilindros de base e altura R, e, como esse é também o volume da esfera, chegamos à relação

$$V = \pi R^2 . 2R - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 R,$$

a partir da qual, desenvolvendo os cálculos, conclui-se (e faz sentido afirmar) que o volume da esfera de raio R é dado pela expressão:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Agora, essa expressão faz todo sentido, não é? Tais deduções enriquecem nossos conhecimentos e tornam a Geometria ainda mais bela!

3.9.3 Área da superfície esférica

Conhecendo a expressão que permite calcular o volume da esfera de raio R, pode-se utilizar essa expressão para deduzir a fórmula da área da superfície esférica. Embora não seja tão fácil compreendê-la, essa demonstração será aqui apresentada a título de conhecimento. Com efeito, essa compreensão dá sentido à fórmula, sendo possível que, com calma e muita atenção, você possa acompanhá-la.

Para tal, vamos tomar duas esferas concêntricas, uma de raio R e outra um pouco maior, e determinar o volume da superfície situada entre essas duas esferas, ou seja, a diferença D entre os volumes das duas esferas. Duas esferas são "concêntricas", tendo o mesmo centro.

Sendo "d" a distância entre as duas superfícies esféricas, tem-se que:

$$D = \frac{4}{3}\pi(R + d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \frac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2 d + 3Rd^2 + d^3) - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \frac{4}{3}\pi R^3 + 4\pi R^2 d + 4\pi R d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = 4\pi R^2 d + 4\pi R d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3.$$

Pelo Princípio de Cavalieri, o volume D da casca esférica corresponde ao volume de um prisma de base poligonal e altura “d”. Desse modo, a área da base desse prisma é o quociente

$$A = \frac{D}{d}$$

Assim, a área da casca esférica de espessura “d” corresponde à área da base do prisma, dada por

$$A = 4\pi R^2 + 4\pi Rd + \frac{4}{3}\pi d^2.$$

Como o que se deseja encontrar é a área da superfície esférica, não é difícil deduzir que a distância entre as duas esferas deve ser nula, ou seja, sua casca deve ter espessura desprezível.

Portanto, pondo $d = 0$, obtém-se:

$$A = 4\pi R^2$$

expressão essa que representa a área da superfície de uma esfera de raio R.

Para saber mais sobre a esfera e outros sólidos geométricos, assista aos vídeos 18, 19, 20 e 21.

Vídeo 18 — Saiba mais sobre a esfera

Fonte: DEMONSTRAÇÃO do Volume da Esfera com o Geogebra. [*S. l.*: *s. n.*], 2021. 1 vídeo (13 min). Publicado pelo canal Prof Tawan Jaime: Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Upy0txpXP9k&ab_channel=ProfTawanJaime. Acesso em: 4 ago. 2022.

Vídeo 19 — Dedução do volume da esfera

Fonte: DEDUÇÃO DO VOLUME DE UMA ESFERA. [*S. l.: s. n.*], 2017. 1 vídeo (14 min). Publicado pelo canal Professor Octavio. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=V3pM2AD-Z-sY&ab_channel=ProfessorOctavio. Acesso em: 4 ago. 2021.

Vídeo 20 — Revendo os volumes do prisma

Fonte: YouTube: TELECURSO – Ensino Médio – Matemática – Aula 64. [*S. l.: s. n.*], 2015. 1 vídeo (13 min). Publicado pelo canal Telecurso. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=PslXeimqIHk&t=19s . Acesso em 04/08/2021.

Vídeo 21 — Revendo sobre as pirâmides

Fonte[6]: TELECURSO – Ensino Médio – Matemática – Aula 65. [*S. l.: s. n.*], 2015. 1 vídeo (12 min). Publicado pelo canal Telecurso. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=UkD-jBHXd7Sw. Acesso em: 4 ago. 2021.

6 Lembrete: Todos os vídeos e as imagens contidas neles são de livre acesso e estão disponíveis no YouTube.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos objetivos que se espera ter alcançado com essa obra diz respeito à ampliação da produção crítica de materiais direcionados à EJA. Esta obra tem suas peculiaridades, que a diferenciam de tudo o que se costuma ler, especialmente pela riqueza de detalhes, simplicidade do vocabulário e preocupação com a forma como o leitor receberá as informações e interagirá com a obra. A possibilidade de inserir vídeos on-line no corpo do texto como complemento ao texto é o grande diferencial desta obra e muito motiva o autor a considerar as chances de desenvolver trabalhos futuros em formato similar.

Além disso, uma das principais contribuições do árduo trabalho de elaboração foi motivar uma reflexão sobre o ensino de Geometria na EJA, principalmente diante da escassez de materiais específicos e da ausência de políticas públicas de valorização e fomento a essa importante modalidade de ensino da Educação Básica.

Embora haja outras preocupações além das investigações sobre os benefícios e desafios do uso de ambientes de geometria dinâmica no estudo da geometria escolar, as atividades aqui propostas explicitam e enfatizam os aspectos pedagógicos do GeoGebra, principalmente pela facilidade de construção e manipulação de objetos virtuais de maneira muito próxima ao que é feito com objetos manipuláveis do mundo real, fator motivador para a apreensão de conceitos, definições, propriedades e relações.

Diante do exposto, nota-se o quanto o uso adequado de recursos tecnológicos pode contribuir para a compreensão do mundo real, a partir das diversas possibilidades de visualização de objetos e das relações algébricas apresentadas simultaneamente às representações geométricas na tela do computador.

Por conhecer um pouco das peculiaridades da EJA, o autor espera que esta proposta auxilie muitos alunos no estudo de geometria e que seja bem aceita pela maioria, com resultados positivos para a educação brasileira de modo geral e, sobretudo, para a EJA. É claro que muito ainda há que se estudar sobre o assunto e esta pesquisa vem impulsionar outros estudos, podendo tornar-se referência para a produção de novos materiais.

Ex-aluno da EJA e atual professor da Educação Básica com experiência em EJA, o autor desenvolveu a percepção das dificuldades enfrentadas por professores na busca de materiais didáticos adequados, bem como dos alunos em assimilar os conteúdos de geometria da forma como, tradicionalmente, são ensinados na escola. Ciente dessa realidade e concluindo esta obra, percebe-se a importância e necessidade de que mais trabalhos como este sejam produzidos e disponibilizados, sem custo para o usuário, como material de apoio para alunos de todos os níveis e modalidades de ensino.

Espera-se, com as atividades aqui propostas, contribuir, de alguma forma, para o ensino de Geometria Espacial, não só para alunos da EJA, mas também para outros que, porventura, vierem a interessar-se pelo assunto.

Pensando sempre no aluno, a elaboração desta obra consistiu, basicamente, na adaptação de parte do conteúdo de um trabalho científico de mesma autoria deste, para uma linguagem direcionada a esse aluno de forma interativa.

Apesar das contribuições dos softwares educativos, o desenvolvimento das atividades aqui propostas explicita algumas limitações do GeoGebra, revelando que as ferramentas disponíveis no software nem sempre são suficientes para explorar os conteúdos geométricos na sua totalidade. Para maiores constatações, ressalta-se a importância do desenvolvimento de pesquisas futuras, baseadas, se possível, em atividades presenciais que proporcionem ao aluno da EJA o contato com esses recursos; na expectativa de que seja possível observar, na prática, o quanto essa metodologia pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Finalmente, destaca-se que a elaboração deste material proporcionou ao autor preciosos momentos de reflexão crítica, reforçando a certeza de que o ensino de geometria na EJA e na Educação Básica em geral ainda necessita de muitas e urgentes mudanças, e que cabe a cada pessoa que almeja uma educação de qualidade dar a sua contribuição. Nesse sentido, o intuito foi produzir algo que venha auxiliar muitos alunos na compreensão dos conteúdos geométricos e percepção do mundo, partindo de um bom planejamento e do desenvolvimento consciente de atividades que visam à construção de um conhecimento geométrico de fato significativo para o estudante.

O real desejo e a esperança do autor é que esta e outras obras similares sejam bem aceitas como materiais complementares em apoio às atividades propostas pelos professores em sala de aula, de modo a tornar o ensino de

Geometria Espacial mais leve, atrativo e significativo para alunos da EJA e, por que não ousar dizer, para alunos de todas as modalidades de ensino.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO FILHO, M. F. de. **Geometria euclidiana espacial**. 3. ed. Fortaleza: EdUECE, 2015.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996. São Paulo: Saraiva, 1996.

CORRÊA, J. N. P. **O Ensino de Poliedros por Atividade**. 347f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática — Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

CUBO de Rubik. **WIKIPÉDIA**, Flórida, 2020. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Cubo_de_Rubik&oldid=60036917. Acesso em: 15 jun. 2022.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. Livro 2. 1. ed. 3. impressão. São Paulo: Ática, 2001.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MENDONÇA, C. Pirâmides do Egito. **Educa+Brasil**, [*s. l.*], 2019. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/artes/piramides-do-egito. Acesso em: 15 jun. 2021.

O QUE é o GeoGebra? **GeoGebra**, [*s. l.*], [2022?]. Disponível em: https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT. Acesso em: 8 maio 2021.

SANTOS, F. B. dos. A história das Pirâmides no Egito Antigo. **Brasil Escola**, [*s. l.*], 2021. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiag/a-historia-das-piramides-no-egito-antigo. Acesso em: 15 jun. 2021.

SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S. GEOMETRIA ESPACIAL COM O SOFTWARE GEOGEBRA: uma proposta de atividades investigativas para o ensino de pirâmides. **Boletim do Museu Integrado de Roraima**, Roraima, v. 13, n. 1, p. 123-145. (Semanal). Disponível em: file:///C:/Users/Cliente/Downloads/cborges,+artigo04_MC.pdf. Acesso em: 8 jun. 2021.

SOBRE OS AUTORES

Eber Oliveira Silva

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Especialista em Educação de Jovens e Adultos pelo Centro Universitário Barão de Mauá (Ribeirão Preto/SP). Professor de Matemática do Ensino Básico Técnico Tecnológico (EBTT) da Rede Federal de Ensino. Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) desenvolvido no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG).

Currículo Lattes do autor (Clique no link para mais informações)

Elizabeth Cristina de Faria

Professora da área da Educação Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Educação Básica (CEPAE/UFG) e do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) – IME/UFG. Especialista em Etnomatemática e Modelagem Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC Campinas/SP). Mestre em Educação Brasileira pela Faculdade de Educação da Universidade Federal de Goiás (FE/UFG). Doutora em Educação Matemática (PUC/SP).

Currículo Lattes da autora (Clique no link para mais informações)