



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**  
**GOIANO-CAMPUS URUTAÍ**  
NÚCLEO DE MATEMÁTICA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA APLICADA  
CURSO DE MATEMÁTICA

**ANA CAROLINA DA SILVA MANOEL**

**UM ESTUDO DO MODELO DO SEMIPLANO DE  
POINCARÉ**

Urutaí  
2023

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA GOIANO-**  
NÚCLEO DE MATEMÁTICA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA APLICADA  
MATEMÁTICA

ANA CAROLINA DA SILVA MANOEL

# **UM ESTUDO DO MODELO DO SEMIPLANO DE POINCARÉ**

Monografia apresentada ao Curso de Matemática do Núcleo de Matemática, Educação e Matemática Aplicada do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano-Campus Urutaí, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador(a):  
Davidson Freitas Nogueira

Urutaí, 2023

Sistema desenvolvido pelo ICMC/USP  
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
**Sistema Integrado de Bibliotecas - Instituto Federal Goiano**

M285e Manoel, Ana Carolina da Silva  
UM ESTUDO DO MODELO DO SEMIPLANO DE POINCARÉ / Ana  
Carolina da Silva Manoel; orientador Davidson  
Freitas Nogueira. -- Urutaí, 2023.  
49 p.

TCC (Graduação em Licenciatura em Matemática) --  
Instituto Federal Goiano, Campus Urutaí, 2023.

1. Geometria Não Euclidiana. 2. Semiplano de  
Poincaré. 3. Triângulos Hiperbólicos. I. Nogueira,  
Davidson Freitas, orient. II. Título.

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR PRODUÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DO IF GOIANO

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano a disponibilizar gratuitamente o documento em formato digital no Repositório Institucional do IF Goiano (RIIF Goiano), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IF Goiano.

### IDENTIFICAÇÃO DA PRODUÇÃO TÉCNICO-CIENTÍFICA

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Tese (doutorado)            | <input type="checkbox"/> Artigo científico              |
| <input type="checkbox"/> Dissertação (mestrado)      | <input type="checkbox"/> Capítulo de livro              |
| <input type="checkbox"/> Monografia (especialização) | <input type="checkbox"/> Livro                          |
| <input checked="" type="checkbox"/> TCC (graduação)  | <input type="checkbox"/> Trabalho apresentado em evento |

Produto técnico e educacional - Tipo:

Nome completo do autor:

Ana Carolina da Silva Manoel

Matrícula:

2018101221230082

Título do trabalho:

UM ESTUDO DO MODELO DO SEMIPLANO DE POINCARÉ

### RESTRICÇÕES DE ACESSO AO DOCUMENTO

Documento confidencial:  Não  Sim, justifique:

Informe a data que poderá ser disponibilizado no RIIF Goiano: 13 /03 /2023

O documento está sujeito a registro de patente?  Sim  Não

O documento pode vir a ser publicado como livro?  Sim  Não

### DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O(a) referido(a) autor(a) declara:

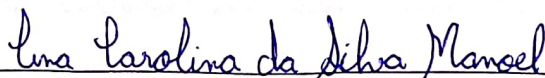
- Que o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- Que obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autoria, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- Que cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano.

Urutaí

Local

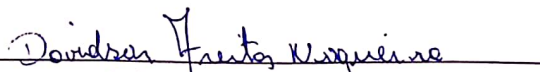
13 /03 /2023

Data



Assinatura do autor e/ou detentor dos direitos autorais

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Ata nº 23/2023 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

### **ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO DE ANA CAROLINA DA SILVA MANOEL**

Aos **dezessete** dias do mês de fevereiro de 2023, às quatorze horas, reuniu-se no prédio da Matemática do Instituto Federal Goiano - Urutaí a banca examinadora composta pelo Professor Dr. Davidson Freitas Nogueira (orientador), pelo Professor Dr. Jucelino Cardoso Marciano dos Santos (membro) e pelo Professor Me. Aderval Alves dos Santos (membro) para avaliar o Trabalho de Curso intitulado "**UM ESTUDO DO MODELO DO SEMIPLANO DE POINCARÉ**" da estudante **Ana Carolina da Silva Manoel**, matrícula 2018101221230082 do Curso de Matemática do IF Goiano - Campus Urutaí. A sessão foi aberta quando o presidente formalmente anunciou examinada e a banca, passando então a palavra para a estudante para a apresentação oral do TC, houve arguição da candidata pelos membros da banca examinadora. Após tal etapa, a banca examinadora decidiu pela APROVAÇÃO da estudante. Ao final da sessão pública de defesa foi lavrada a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Examinadores	Nota
Davidson Freitas Nogueira (orientador)	9.0
Jucelino Cardoso Marciano dos Santos	8.5
Aderval Alves dos Santos	9.5
Média	9.0

*(Assinado Eletronicamente)*

Prof. Dr. Davidson Freitas Nogueira

Orientador

*(Assinado Eletronicamente)*

Prof. Dr. Jucelino Cardoso Marciano dos Santos

Membro

*(Assinado Eletronicamente)*

Prof. Me Aderval Alves dos Santos

Membro

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jucelino Cardoso Marciano dos Santos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 17/02/2023 15:00:20.
- **Aderval Alves dos Santos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 17/02/2023 14:58:55.
- **Ana Carolina da Silva Manoel**, 2018101221230082 - Discente, em 17/02/2023 14:58:11.
- **Davidson Freitas Nogueira**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 17/02/2023 14:56:56.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 17/02/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 468365

Código de Autenticação: 230349c740



INSTITUTO FEDERAL GOIANO

Campus Urutaí

Rodovia Geraldo Silva Nascimento, Km 2,5, Zona Rural, None, None, URUTÁI / GO, CEP 75790-000

(64) 3465-1900



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA GOIANO

Formulário 176/2023 - DE-UR/CMPURT/IFGOIANO

Ana Carolina da Silva Manoel

## UM ESTUDO DO MODELO DO SEMIPLANO DE POINCARÉ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano-Campus Urutaí como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, aprovado em 17 de Fevereiro de 2023, pela Banca Examinadora constituída pelos professores

*(Assinado eletronicamente)*

**Prof. Dr. Davidson Freitas Nogueira**  
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí  
Presidente da Banca (Orientador)

*(Assinado eletronicamente)*

**Prof. Me. Aderval Alves dos Santos**  
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

*(Assinado eletronicamente)*

**Prof. Dr. Jucelino Cardoso Marciano dos Santos**  
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí

Documento assinado eletronicamente por:

- Jucelino Cardoso Marciano dos Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 11/03/2023 17:22:56.
- Aderval Alves dos Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 11/03/2023 16:52:13.
- Davidson Freitas Nogueira, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 11/03/2023 16:38:27.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 11/03/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifgoiano.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 475776  
Código de Autenticação: ff5cb8d35d



Rodovia Geraldo Silva Nascimento, Km 2,5, Zona Rural, None, None, URUTÁI / GO, CEP 75790-000  
(64) 3465-1900



*Dedico este trabalho a minha mãe Mirlene e ao meu pai Wilson.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, por me dar saúde e determinação para não desanimar, me permitindo ultrapassar com fé todos os obstáculos que surgiram ao longo do curso.

Aos meus pais, Mirlene e Wison, por sempre apoiarem minhas escolhas e me incentivarem nos momentos difíceis, pelo amor dado ao longo da vida.

Aos meus irmãos, Paulo e Matheus e à minha cunhada, Anna Gabriela, pessoas importantes para que essa conquista se concretizasse.

Aos meus amados e queridos sobrinhos, Orlando e Heitor, por me darem alegrias e me tirarem sorrisos.

Aos meus colegas e amigos de curso, pelo bom convívio, em que tivemos momentos de aprendizados e companheirismos.

Aos professores, pelos ensinamentos que me transmitiram ao longo dos meus estudos.

Ao professor Davidson, por ser meu orientador, guiando-me neste trabalho e fazendo uma contribuição significativa para o meu aprendizado.

Ao IF Goiano - Campus Urutaí, por ofertar este curso que contribuiu para minha formação acadêmica e profissional.

Este trabalho apresenta um estudo introdutório sobre o modelo do Semiplano de Poincaré, um dos modelos que dão significado a Geometria Hiperbólica. A proposta foi estudar o modelo do Semiplano de Poincaré conhecendo primeiro o contexto histórico do surgimento da Geometria Não Euclidiana, em que diversos matemáticos contribuíram com noções que foram válidas para essa nova Geometria, que surgiram após a dificuldade apresentada em compreender o Quinto Postulado de Euclides. Antes de estudar sobre o modelo escolhido, será explanado o que seria um modelo utilizando para isso a Geometria Analítica. Em seguida, será analisado de fato o modelo do Semiplano de Poincaré, fazendo um estudo sobre pontos e retas, posições relativas entre  $h$ -retas, distância entre pontos e ângulos entre  $h$ -retas. Por fim, apresenta um estudo a respeito dos triângulos hiperbólicos, a partir de teoremas, lema e corolário. O objetivo do trabalho foi atingido a partir de pesquisas bibliográficas.

### **Palavras-chave:**

Geometria Não Euclidiana. Semiplano de Poincaré. Triângulos Hiperbólicos.

## LISTA DE FIGURAS

1.1 Primeiro Postulado de Euclides.	10
1.2 Segundo Postulado de Euclides.	11
1.3 Terceiro Postulado de Euclides.	11
1.4 Quarto Postulado de Euclides.	11
1.5 Quinto Postulado de Euclides.	12
1.6 Postulado das Paralelas.	13
1.7 Semiplanos definidos por conjuntos.	18
1.8 Plano euclidiano do Semiplano de Poincaré.	20
1.9 $h$ -reta de primeiro tipo.	21
1.10 $h$ -reta de segundo tipo.	21
1.11 Posições relativas entre $h$ -retas.	22
1.12 Razão cruzada.	26
1.13 Noção intuitiva de distância hiperbólica.	29
1.14 Ponto C entre AB.	31
1.15 Ângulo formado entre uma $h$ -reta do tipo 1 com uma $h$ -reta do tipo 2.	32
1.16 Ângulo formado entre uma $h$ -reta do tipo 2 com uma $h$ -reta do tipo 2.	33
1.17 Exemplo 1.3.14	34
1.18 Exemplo 3.3.2	35
1.19 Quadrilátero de Lambert.	37
1.20 Teorema 1.4.1	38
1.21 Teorema 1.4.2	39
1.22 Lema 1.4.3	40
1.23 Teorema 1.4.4	41

<b>Lista de Figuras</b>	vi
<b>1 Modelo do Semiplano de Poincaré</b>	<b>8</b>
1.1 Introdução	8
1.2 Modelo cartesiano do plano euclidiano	16
1.3 O Modelo do Semiplano de Poincaré	19
1.3.1 Pontos e retas	20
1.3.2 Posições relativas entre $h$ -retas	22
1.3.3 Distância entre pontos	25
1.3.4 Ângulos entre $h$ -retas	31
1.4 Triângulos Hiperbólicos	36
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>43</b>

# CAPÍTULO 1

## MODELO DO SEMIPLANO DE POINCARÉ

### 1.1 Introdução

Uma das ciências matemáticas mais antiga é a Geometria, cuja palavra vem da junção dos termos gregos *geo* e *métron*, que respectivamente significam terra e medir, ou seja, Geometria é a medição da terra. Historiadores relatam que as origens da Geometria foi consequência da necessidade dos agrimensores gregos, pessoas legalmente habilitadas em medir, dividir e demarcar terras ou propriedades rurais. Além disso, conta-se que outros conhecimentos geométricos já eram dominados em antigas civilizações babilônicas, hindus, chinesas e egípcias (CASTANHEIRA, 2020; BARBOSA, 2002).

Sobre a Geometria na Babilônia, relata-se que nos sítios arqueológicos, localizados na Mesopotâmia, foram encontrados alguns tabletas de argila que eram registrados problemas de Geometria, um exemplo disso é o tablete YBC 7302, que registrou uma circunferência e área do círculo. Para os babilônios, o círculo era uma figura limitada por uma circunferência, mesmo quando conheciam o diâmetro do círculo, eles calculavam sua área usando o comprimento da circunferência. Além disso, utilizavam os cálculos de volumes na agricultura, em construção civil ou militar, também em cálculos dos volumes de muros, muralhas e barragens, além de determinar a quantidade de operários necessários para construí-los (ROQUE; CARVALHO, 2012).

A Geometria no Egito antigo estava voltada para procedimentos de cálculo de áreas e de volumes, um exemplo é o cálculo da área de um retângulo, em que multiplicavam a base pela altura. Em relação à Geometria utilizadas nas construções das pirâmides, foi registrado que os egípcios tinham conhecimentos sobre a inclinação dos lados de uma pirâmide, o volume de um

tronco de pirâmide e o volume de uma pirâmide (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Foi em 300 a.C., usando folhas de papiro, que o matemático grego Euclides de Alexandria publicou uma importante obra literária intitulada *Os Elementos*, sendo uma coletânea com 13 livros, que mais tarde veio a se tornar um único livro (CASTANHEIRA, 2020). Euclides foi o geômetra que reuniu e organizou tudo o que se sabia sobre Matemática naquela época, e assim, ficou conhecido como pai da Geometria por causa deste livro (CASTANHEIRA, 2020; ROQUE; CARVALHO, 2012). O livro *Os Elementos* recebeu a primeira tradução completa em português no ano de 2009 pelo matemático, professor universitário e tradutor Irineu Bicudo, lançado pela Editora Unesp<sup>1</sup>, sendo que a sua tradução foi realizada diretamente do grego com uma linguagem do tempo atual, mas mantendo suas características (IMPRESA, 2009).

Euclides, nos livros I e II, dedicou-se a estudar os primeiros conceitos, noções comuns, postulados e os primeiros resultados de geometria plana, sendo que no livro II ainda estava incluso a álgebra geométrica. Já no livro III os conhecimentos trazidos em seu contexto estavam voltados para o conteúdo de círculo, no livro IV abordavam-se as construções de alguns polígonos regulares, no V trazia as teorias das proporções de Eudoxo e no livro VI apresentava as semelhanças de figuras. Além disso, os livros VII, VIII e IX apresentava a teoria dos números e, por fim, nos livros X, XI, XII e XIII destinou a incomensurabilidade, geometria espacial e a poliedros regulares (BICUDO, 2009).

Voltando ao livro I, este possuía 23 definições, nove noções comuns e cinco postulados. As noções comuns também são conhecidas por axiomas e enunciadas da seguinte forma (BICUDO, 2009):

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

---

<sup>1</sup>Para saber mais a respeito da publicação do livro *Os Elementos* em português acesse o site: <https://www2.unesp.br/sharer.php?noticia=4428>.

8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Para Euclides, os axiomas seriam verdades aceitas em qualquer das ciências, ou seja, eram afirmações aceitas sem discussão. Assim, um conjunto de axiomas, conhecido também por sistema axiomático, existirá quando for consistente, independente e completo. A consistência do sistema axiomático significa que a teoria baseada neste não terá resultados contraditórios, enquanto a independência significa que cada um dos axiomas que o constitui não pode ser derivado dos demais, ou seja, nenhum axioma pode ser demonstrado com base em outros e, por fim, a completude significa que para toda afirmação, ou seja, proposição, a sua afirmação ou negação se segue do sistema (COUTINHO, 2018).

Já os postulados, Euclides afirmava serem verdades evidentes sobre um determinado assunto, que no caso se trata da Geometria, e que, também, não necessitava de demonstração. Como ficaram conhecidos, os cinco Postulados de Euclides para a geometria foram enunciados da seguinte forma (CASTANHEIRA, 2020; BICUDO, 2009):

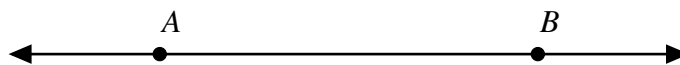
1. *Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.* Isso significa, como mostra a figura 1.1, que dados dois pontos distintos quaisquer  $A$  e  $B$  existirá uma reta que os contém.



**Figura 1.1:** Primeiro Postulado de Euclides.

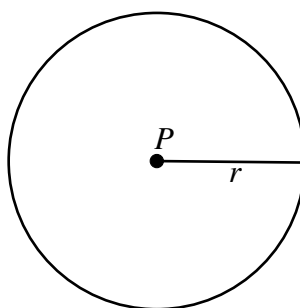
2. *Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta,* ou seja, dado um segmento de reta é possível prolongá-lo infinitamente sobre uma reta.





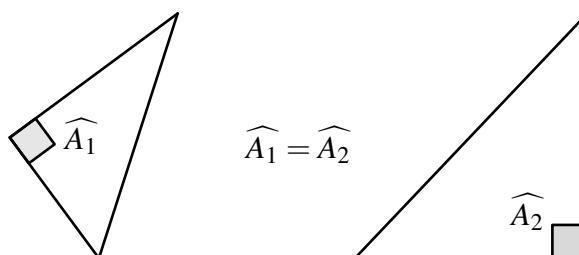
**Figura 1.2:** Segundo Postulado de Euclides.

3. *E, com todo centro e distância, descrever um círculo, ou seja, fixo um ponto  $P$  no plano e uma quantidade positiva  $r$ , existe um círculo de centro no ponto  $P$  e raio igual ao segmento de reta de medida  $r$ .*



**Figura 1.3:** Terceiro Postulado de Euclides.

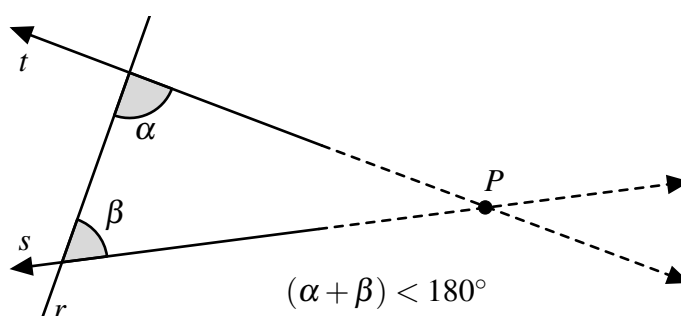
4. *E serem iguais entre si todos os ângulos retos.* Aqui, Euclides, não faz menção a uma unidade de medida para ângulos específicos e sim diz que todos os ângulos retos possuem a mesma medida.



**Figura 1.4:** Quarto Postulado de Euclides.

5. *E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.* Como representado na figura [1.5](#), o quinto postulado diz que se temos uma reta  $r$  transversal a duas outras retas  $s$  e  $t$  e caso a

soma dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  seja menor que dois ângulos retos, que em termos atuais é igual a  $180^\circ$ , então as retas  $s$  e  $t$ , ao serem prolongadas, se interceptarão em algum ponto  $P$ .



**Figura 1.5:** Quinto Postulado de Euclides.

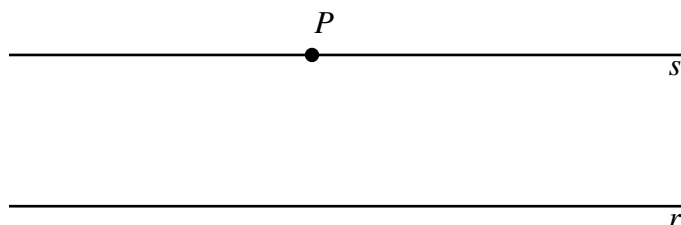
Durante muito tempo a Geometria Euclidiana era a única estudada e não consideravam outras possibilidades de geometrias. Por ser uma Geometria com axiomas compreensíveis e de fácil entendimento, o livro *Os Elementos*, não era questionado, resultando em fama e em diversas edições comercializadas. Após incentivos de alguns filósofos, os matemáticos começaram a justificar que se era possível ter apenas uma Geometria, os axiomas e os postulados de Euclides seriam teoremas, ou seja, uma consequência dos anteriores (COUTINHO, 2018).

Nesse sentido, grandes nomes da matemática dedicaram-se a tentar provar o Quinto Postulado utilizando-se os demais, ou seja, lançaram a estudar a independência do sistema dos 5 postulados. Este postulado, por sua formulação mais complicada que as outras, parecia mais um teorema do que um axioma, os matemáticos acreditavam que o Quinto Postulado fosse uma consequência dos outros postulados devido à dificuldade de entendimento do seu enunciado (COUTINHO, 2018).

Proclus Lício (410-485), um filósofo grego, escreveu tentativas para dedução do Quinto Postulado a partir dos outros postulados. Observando que o matemático e astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (100-170) havia produzido uma falsa “prova” apropriou-se desta e a passou a dar como de sua autoria, mas depois conseguiu chegar a um postulado que seria equivalente ao Quinto Postulado de Euclides (O’CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

A formulação do Quinto Postulado que conhecemos hoje, equivalente ao Quinto Postulado original, é devido ao matemático escocês John Playfair (1748-1819). Este é conhecido, também, por Postulado das Paralelas, sendo enunciado como: *Dada uma linha e um ponto fora da linha, é possível desenhar exatamente uma linha através do ponto dado paralela à linha.* Ou pode ser enunciado da seguinte maneira: *Dada uma reta e um ponto fora desta, é possível desenhar uma única reta que contém o ponto dado e é paralela à reta dada* (CASTANHEIRA,

2020; O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996). Na figura 1.6 temos uma representação para tal afirmação.



**Figura 1.6:** Postulado das Paralelas.

Mesmo que essa forma de enunciar o Quinto Postulado já fosse conhecida desde a época de Proclus, ela ficou conhecida por este nome após John Playfair fazer um comentário sobre Euclides em 1795, propondo a substituição do Quinto Postulado pelo seu (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

No decorrer do tempo várias tentativas surgiram para provar o Quinto Postulado a partir dos outros, embora muitas fossem aceitas como provas, logo em seguida descobriam algum erro. Foi em 1663, que o matemático britânico John Wallis (1616-1703) imaginou que tivesse deduzido o Quinto Postulado, mas só mostrou sua equivalência ao dizer: para cada triângulo, existe um triângulo semelhante de magnitude arbitrária (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Uma tentativa muito importante foi do matemático italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) que, no ano de 1697, assumiu o Quinto Postulado sendo falso e tentou mostrar uma contradição. Assim, Saccheri estudou as hipóteses dos ângulos obtuso, agudo e reto. No caso, o Quinto Postulado de Euclides seria a hipótese do ângulo reto. Então, Saccheri tentou provar que o Quinto Postulado seria a hipótese do ângulo obtuso, porém obteve uma contradição, mas quando tentou a hipótese do ângulo agudo conseguiu derivar muitos teoremas para a, hoje conhecida, Geometria Não-Euclidiana, contudo não percebeu estar fazendo isso. Uma dessas provas, levou a uma contradição ao assumir a existência de um “ponto no infinito” no plano (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Foi em 1766, que o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) estudou uma linha semelhante à Saccheri, todavia conseguiu estudar a hipótese do ângulo agudo sem ter uma contradição. Lambert percebeu que, nessa nova Geometria, a soma dos ângulos de um triângulo aumentava à medida que a área do triângulo diminuía (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON,

EF, 1996).

O matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) estudou 40 anos o Postulado das Paralelas, seu trabalho está no seu livro de Geometria intitulado de *Eléments de Géométrie*. Legendre provou a equivalência do Quinto Postulado a: *A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos*. Legendre também mostrou que a soma dos ângulos de um triângulo não pode ser maior que dois ângulos retos, tomando como base o fato de as linhas retas serem infinitas. Ele não percebeu, mas encontrou outra forma equivalente ao Quinto Postulado Euclides, ao tentar mostrar que a soma dos ângulos não pode ser inferior a  $180^\circ$ , assumiu que por qualquer ponto no interior de um ângulo é sempre possível traçar uma linha que encontre os dois lados do ângulo (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Em 1767, o matemático francês Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) deu o nome de escândalo da Geometria elementar o envolvimento dessa Geometria nos problemas do Postulado das Paralelas (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

O alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi o primeiro matemático a perceber o problema das paralelas, quando em 1792 iniciou seu trabalho sobre o Quinto Postulado, tentando prová-lo a partir dos outros quatro. Observando ter pouco progresso, escreve em 1813 que “*Na teoria dos paralelos, ainda não estamos além de Euclides. Essa é uma parte vergonhosa da matemática...*”. Em 1817, Gauss estava convicto que o Quinto Postulado não dependia dos outros e estudou quando mais de uma reta podia ser traçada por um ponto sendo paralela a uma reta dada, mas manteve em segredo seu trabalho (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Gauss discutiu sobre a teoria das paralelas com Farkas Bolyai (1775-1856), um matemático húngaro que fez diversas provas falsas sobre o Postulado das Paralelas. O filho de Farkas Bolyai, o húngaro János Bolyai (1802-1860), também foi um matemático que fez estudos sobre as paralelas, mesmo o pai dizendo ser perda de tempo. János Bolyai escreve ao pai em 1823 dizendo “*descobri coisas tão maravilhosas que fiquei espantado... do nada criei um mundo novo e estranho*”, após dois anos, publicou um apêndice de 24 páginas no livro de seu pai, apenas para confundir gerações futuras, visto que o apêndice foi publicado antes do próprio livro. Após a publicação do apêndice, Gauss descreve János Bolyai como um gênio. O avanço de Bolyai estava em assumir a existência de uma nova Geometria, mesmo que Gauss tenha ficado impressionado, ele dizia que já havia descoberto isso, mas não havia publicado (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Nikolai Lobachevsky (1792-1856) foi um matemático russo que também publicou, em

1829, um trabalho sobre a Geometria Não-Euclidiana. Gauss e Bolyai desconheciam os estudos de Lobachevsky, pois foi publicado em russo no Kazan Messenger, mas fracassou ao tentar atingir um público mais amplo, pois seu artigo foi rejeitado por pelo Físico e Matemático russo Mikhail Ostrogradski (1801-1861). Em 1837, publicou em francês seu trabalho sobre a Geometria Não-Euclidiana no Diário de *Crelle* para um grande público, contudo a comunidade matemática não estava preparada para aceitar estudos revolucionários. No ano de 1840, Lobachevsky publicou, em 61 páginas, uma forma mais fácil de entender suas investigações geométricas sobre a teoria das paralelas e abordou como funcionava sua Geometria Não-Euclidiana. Lobachevsky substituiu o Quinto Postulado de Euclides por Postulado das Paralelas de Lobachevsky, enunciado da seguinte forma: *existem duas retas paralelas a uma dada reta passando por um dado ponto que não está na reta*. Os trabalhos de Lobachevsky estenderam-se aos estudos das identidades trigonométricas dos triângulos para esta Geometria, mostrou ainda que à medida que o triângulo se tornava pequeno, as identidades tendiam para as identidades trigonométricas usuais (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Sendo supervisionado por Gauss, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) escreveu sua tese de doutorado e em 10 de junho de 1854 fez uma aula inaugural reformulando todo o conceito de Geometria que ele via como um espaço com estrutura extra suficiente para poder medir coisas como comprimento. Esta palestra de Riemann não havia sido publicada até 1868, mas trouxe bastante desenvolvimento para às novas Geometrias (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Em relação às novas Geometrias de Bolyai e Lobachevsky, elas ainda não eram consistentes, foi o matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) que colocou a Geometria Não-Euclidiana de Bolyai-Lobachevsky no mesmo patamar da Geometria Euclidiana. Beltrami escreveu, em 1868, um artigo abordando um modelo para Geometria Não-Euclidiana bidimensional na Geometria Euclidiana tridimensional, o modelo foi obtido a partir da revolução de uma tratriz em torno de sua assíntota, também chamada de pseudoesfera. Mesmo não completo, o modelo de Beltrami foi decisivo no que diz respeito ao Quinto Postulado, no qual o modelo mostrou que os quatro primeiros postulados se sustentavam, mas o quinto não (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Em 1871, o matemático alemão Felix Christian Klein (1849 -1925) completou a Geometria Não-Euclidiana de Lobachevsky e contribuiu com outros modelos, como, por exemplo, a Geometria Esférica de Riemann. Klein trabalhou uma noção de distância baseada na definição

do britânico Arthur Cayley (1821-1895), quando em 1859, o matemático Cayley propôs uma definição generalizada para distância. Klein mostrou que existem resumidamente três tipos de Geometria, a Geometria de Bolyai-Lobachevsky, no qual as linhas retas têm dois pontos infinitamente distantes, a Geometria Esférica de Riemann, onde as linhas não têm (ou mais precisamente dois imaginários) pontos infinitamente distantes e a Geometria Euclidiana, sendo um caso limite entre os dois, onde para cada linha existem dois pontos coincidentes infinitamente distantes (O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF, 1996).

Hoje, na Geometria Não-Euclidiana desenvolvida nos últimos séculos, principalmente nos dois últimos, encontramos a Geometria Hiperbólica, proposta alguns modelos, tais como, o modelo do Semiplano Superior (CASTRO, 2017), o modelo do Semiplano de Poincaré (CARDOSO, 2013), o modelo do Disco de Poincaré (ALBON, 2021; SOUZA, 2015), o modelo do Disco de Beltrami-Klein (ADAMES; SCHENA, 2021), o modelo da Pseudoesfera (AGUSTINI, 2022) e o modelo de Minkowski (ALVES, 2020). Neste trabalho, exploraremos o modelo do Semiplano de Poincaré.

## 1.2 Modelo cartesiano do plano euclidiano

Antes de estudar de fato o modelo do Semiplano de Poincaré, explanemos o que seria um modelo. Para isso, utilizaremos, como exemplo, o modelo mais conhecido para Geometria atualmente, a saber, a Geometria Analítica, que nada mais é do que um modelo para estudar a Geometria Plana Euclidiana. Um modelo é nada mais do que dar sentido em um ambiente às noções comuns da Geometria. Na Geometria Analítica, o **plano euclidiano** é interpretado como sendo  $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , que nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados  $(x, y)$  com coordenadas reais. Mais ainda, tais pares são os **pontos** nesse modelo. Daqui em diante denotaremos  $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ .

Para falarmos de uma **reta** em  $\mathbb{E}$  é necessário termos três informações  $a, b, c \in \mathbb{R}$  com  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Assim, uma reta será todos os pontos que satisfazem a equação  $ax + by + c = 0$ , ou seja, uma reta é um conjunto do tipo  $r = \{(x, y) \in \mathbb{E} : ax + by + c = 0\}$ . As retas  $x = 0$  e  $y = 0$ , onde consideramos, respectivamente,  $(a, b, c) = (1, 0, 0)$  e  $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ , chamados de eixos coordenados, mais especificamente, o eixo das ordenadas, denotado por  $Y$ , e o eixo das abscissas, denotado por  $X$ . Escrevemos  $r : ax + by + c = 0$  no lugar de  $r = \{(x, y) \in \mathbb{E} : ax + by + c = 0\}$ .

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $r : ax + by + c = 0$  e  $s : dx + ey + f = 0$  duas retas em  $\mathbb{E}$ . Se estas não*

tiverem pontos em comum, ou seja,

$$\{(x, y) \in \mathbb{E} : ax + by + c = 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{E} : dx + ey + f = 0\} = \emptyset.$$

dizemos que  $r$  e  $s$  são **paralelas**.

Note que se temos uma reta  $r : ax + c = 0$ , com  $c \neq 0$ , não teremos solução comum as equações de  $r$  e de  $Y$ , ou seja,

$$\{(x, y) \in \mathbb{E} : ax + c = 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{E} : x = 0\} = \emptyset.$$

Portanto, todas as retas da forma  $r : ax + c = 0$ , com  $c \neq 0$ , são paralelas ao eixo  $Y$ . Analogamente, as retas da forma  $r : by + c = 0$ , com  $c \neq 0$ , são paralelas ao eixo  $X$ . De forma mais geral, temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.2.2.** *Sejam  $r : ax + by + c = 0$  e  $s : dx + ey + f = 0$  duas retas distintas em  $\mathbb{E}$ . Temos que  $r$  e  $s$  são paralelas se, e somente se,  $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ .*

*Demonstração.* Por um lado, se  $r$  e  $s$  são paralelas, então

$$\{(x, y) \in \mathbb{E} : ax + by + c = 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{E} : dx + ey + f = 0\} = \emptyset.$$

Isso equivale ao sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = -c \\ dx + ey = -f, \end{cases}$$

não ter solução, que equivale ao determinante

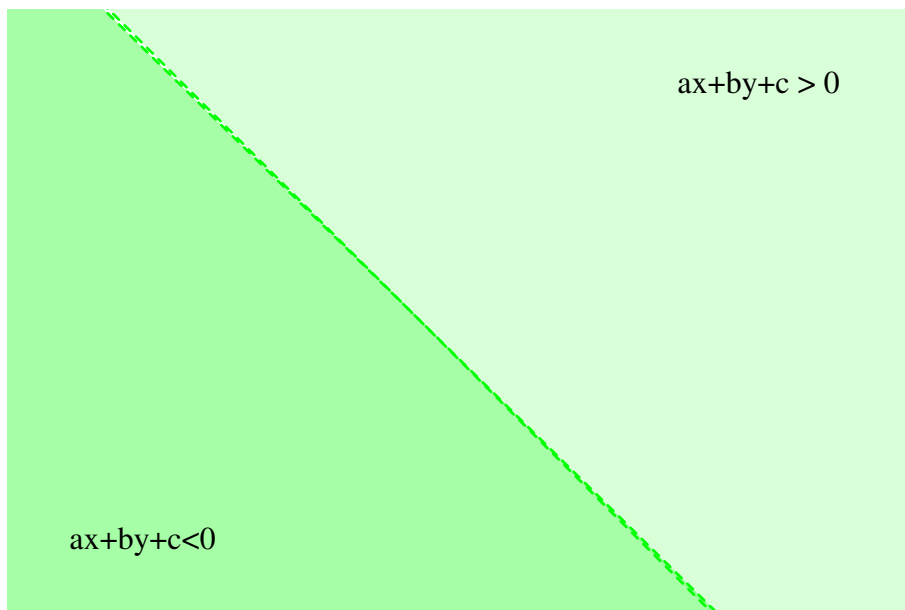
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = ae - bd.$$

ser nulo. Portanto,  $r$  e  $s$  são paralelas se, e somente se,  $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ . □

**Definição 1.2.3.** *Dada uma reta  $r : ax + by + c = 0$  em  $\mathbb{E}$ , os semiplanos determinados por  $r$  são definidos como sendo os conjuntos*

$$H_r^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c > 0\} \quad e \quad H_r^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c < 0\}.$$

Podemos escrever também que  $H_r^+ : ax + by + c > 0$  e  $H_r^- : ax + by + c < 0$ . Na figura [1.7](#) fornecemos uma representação geométrica de tais conjuntos:



**Figura 1.7:** Semiplanos definidos por conjuntos.

A próxima proposição evidência a validade do primeiro axioma de Euclides para no Modelo Cartesiano.

**Proposição 1.2.4.** *Dados dois pontos distintos quaisquer  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  em  $\mathbb{E}$  existe uma única reta em  $\mathbb{E}$  que os contém.*

**Definição 1.2.5.** *Dados dois pontos quaisquer  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  em  $\mathbb{E}$  definimos a distância euclidiana entre  $A$  e  $B$  como sendo*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Temos assim definido uma função  $d: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , conhecida na literatura como **distância euclidiana**. Essa função satisfaz as quatro propriedades seguintes para quaisquer  $A, B, C \in \mathbb{E}$ :

1.  $d(A, B) \geq 0$ ;
2.  $d(A, B) = 0$  se, e somente se,  $A = B$ ;
3.  $d(A, B) = d(B, A)$ ;
4.  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ .

Atualmente, tais propriedades são conhecidas como axiomas de distância. São dessas propriedades que uma função geral definida em um conjunto precisa gozar para ser considerada uma distância.



**Definição 1.2.6.** Três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano euclidiano são ditos colineares se existe uma reta  $r : ax + by + c = 0$  que os contém.

**Definição 1.2.7.** Sejam  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  pontos em  $\mathbb{E}$  colineares e considere  $r : ax + by + c = 0$  a reta que os contém. Dizemos que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ :

1. se  $b \neq 0 \Leftrightarrow x_A < x_B < x_C$  ou  $x_A > x_B > x_C$ ,
2. se  $b = 0 \Leftrightarrow y_A < y_B < y_C$  ou  $y_A > y_B > y_C$ .

Na Geometria Analítica a definição de ângulo formado entre duas retas  $r : ax + by + c = 0$  e  $r' : a'x + b'y + c' = 0$  é definido por:

1. se  $b$  e  $b'$  sejam ambos nulos, então defini-se  $m(\angle rr') = 0$ .
2. se  $b \neq 0$  e  $b' = 0$ , escreva  $m = -\frac{a}{b}$  e defina  $m(\angle rr') = 90^\circ - |\arctg(m)|$ .
3. se  $b \neq 0$  e  $b' \neq 0$ , considere  $m = -\frac{a}{b}$  e  $m' = -\frac{a'}{b'}$  e defina

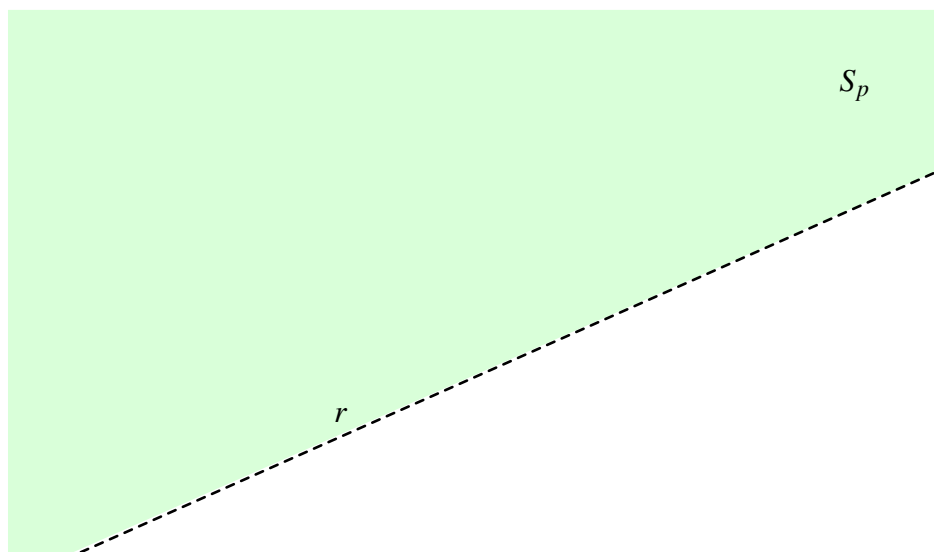
$$m(\angle rr') = \begin{cases} 90^\circ, & \text{se } mm' = 1, \\ \left| \arctg \left( \frac{m-m'}{1+mm'} \right) \right|, & \text{se } mm' \neq 1. \end{cases}$$

No próximo capítulo exploraremos tais aspectos da Geometria Analítica em outros ambientes. Modificaremos as definições de plano, reta, distância e ângulo e conseqüentemente estudaremos essas modificações.

### 1.3 O Modelo do Semiplano de Poincaré

Nesta seção, estudaremos alguns aspectos do modelo do Semiplano de Poincaré. A principal referência utilizada foi o capítulo 5 da dissertação de mestrado (MAGALHÃES, 2015). Além disso, utilizaremos como referências suportes os textos (DOLCE; POMPEL, 1997), (CASTANHEIRA, 2020), (PEREZ, 2015) e (COSTA, 2016).

Nesse estudo, consideramos o plano euclidiano  $\mathbb{E}$  e fixaremos uma reta  $r$  neste plano. Assim, o plano euclidiano ficará dividido em duas partes, como indica a figura 1.8, sendo que consideraremos a parte superior, a denotaremos por  $S_p$  e esta será denominada Semiplano de Poincaré.



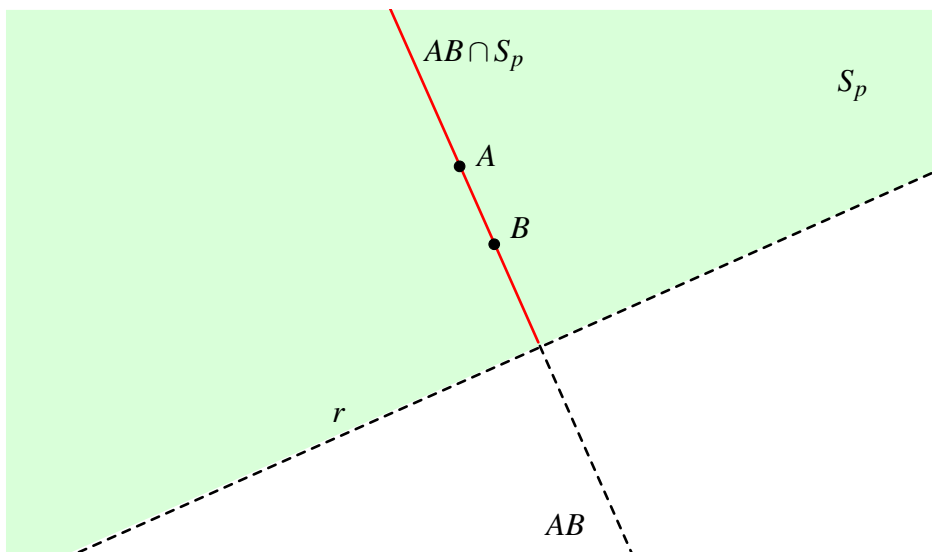
**Figura 1.8:** Plano euclidiano do Semiplano de Poincaré.

### 1.3.1 Pontos e retas

Os pontos no semiplano de Poincaré serão pontos no sentido euclidiano como definido anteriormente, ou seja, serão pares ordenados. Já o sentido de reta será modificado, por esse motivo se faz necessário distinguir as retas interpretadas no sentido euclidiano com as que serão aqui apresentadas. No decorrer do texto, utilizaremos o termo *h*-reta quando estivermos nos referimos às retas no Semiplano de Poincaré. O termo “reta” será utilizado para o sentido euclidiano, assim como “semirreta”, “circunferência”, “semicircunferência”, “distância”, etc.

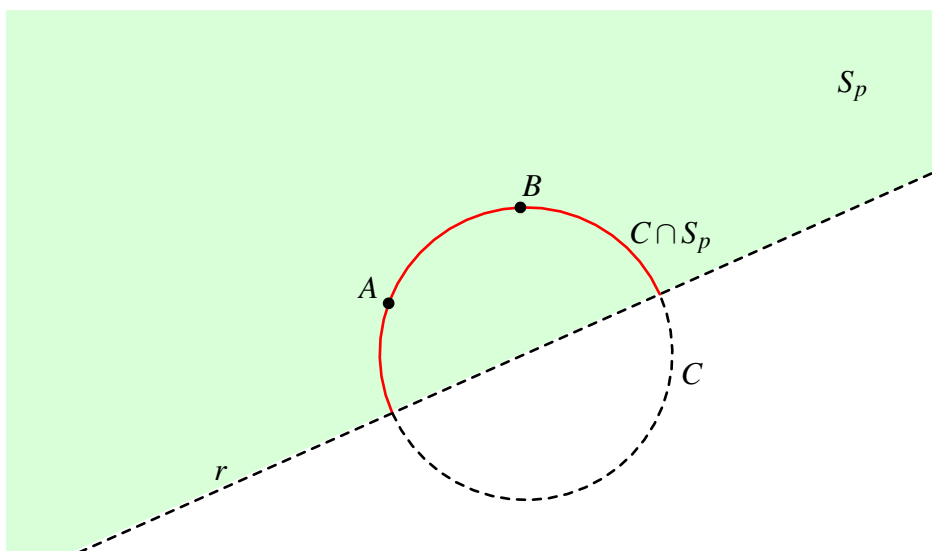
**Definição 1.3.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos em  $S_p$ . Se a reta  $AB$  for perpendicular a  $r$ , definimos a  $h$ -reta que contém os pontos  $A$  e  $B$  como sendo a semirreta contida em  $S_p$  que contém  $A$  e  $B$ , com origem na reta  $r$ . No caso contrário, definimos a  $h$ -reta que contém os pontos  $A$  e  $B$  como sendo a semicircunferência contida em  $S_p$  e cujo centro está em  $r$ .*

Caso uma *h*-reta seja uma semirreta dizemos que esta é de **primeiro tipo** (ou **tipo 1**) e caso seja uma semicircunferência dizemos que esta é de **segundo tipo** (ou **tipo 2**). Nas figuras [1.9](#) e [1.10](#) exemplificamos geometricamente os dois tipos de *h*-retas introduzidos na definição [1.3.1](#) sendo que na primeira temos uma *h*-reta do tipo 1 enquanto na segunda temos uma *h*-reta do tipo 2.



**Figura 1.9:** *h*-reta de primeiro tipo.

No caso da *h*-reta do tipo 1 é bastante simples sua construção, considera-se a reta que passa por *A* e *B* e se esta for perpendicular a *r*, então é apenas considerar a sua interseção com  $S_p$ . Já no caso de *h*-retas do tipo 2, para se construir geometricamente precisamos conhecer o centro da circunferência que passa por *A* e *B* e pertence à reta *r*. Para isso, se *O* denotar esse centro, observamos que as distâncias de *A* até *O* e de *B* até *O* são iguais ao raio da circunferência. Formamos assim um triângulo isósceles *ABO* de base *AB* e, sendo assim, o vértice *O* pertence à mediatriz do segmento *AB*. Portanto, esse centro está bem definido e se trata da interseção de tal mediatriz com *r*. Por fim, determinado o centro, construímos a circunferência de centro *O* contendo *A* e *B* e consideramos a sua interseção com  $S_p$ .



**Figura 1.10:** *h*-reta de segundo tipo.

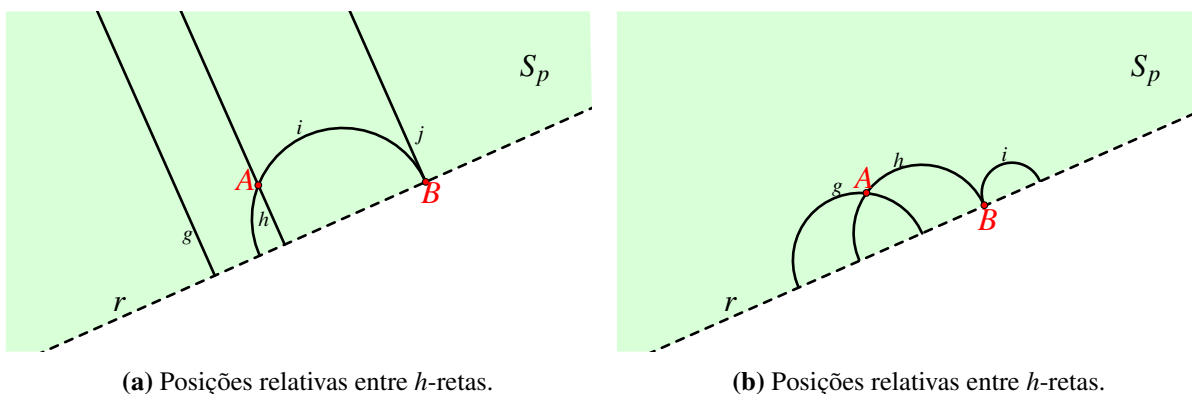
Os pontos de interseção da reta ou circunferência que definem as  $h$ -retas com a reta  $r$ , sendo a fronteira do Semiplano de Poincaré, são chamados de pontos ideais da respectiva  $h$ -reta. Esses pontos, por pertencer a  $r$ , não pertencem ao semiplano.

### 1.3.2 Posições relativas entre $h$ -retas

Na Geometria Euclidiana, denominamos retas paralelas aquelas que não possuem ponto em comum e concorrentes aquelas que possuem um único ponto em comum. Já na Geometria Hiperbólica, temos mais uma situação a ser entendida.

**Definição 1.3.2.** Considere  $m$  e  $n$  duas  $h$ -retas em  $S_p$ . Dizemos que  $m$  e  $n$  são:

1. **paralelas:** quando a interseção é vazia, ou seja, não possuem ponto em comum e existe um ponto ideal em comum;
2. **ultraparalelas:** quando a interseção é vazia e não possuem pontos ideais em comum;
3. **concorrentes:** quando a interseção de  $m$  e  $n$  é não vazia.



**Figura 1.11:** Posições relativas entre  $h$ -retas.

Na figura [1.11a](#) temos que as  $h$ -retas  $g$ ,  $h$  e  $j$  são do tipo 1 e a  $h$ -reta  $i$  é do tipo 2. As posições relativas entre estas  $h$ -retas são classificadas como:

- as  $g$  e  $h$  são ultraparalelas;
- as  $h$  e  $i$  são concorrentes, com o ponto  $A$  em comum, ou seja, a interseção  $h \cap i = A$ ;
- as  $i$  e  $j$  são paralelas, pois possuem o ponto ideal  $B$  em comum e a interseção  $i \cap j$  é vazia;
- as  $g$  e  $i$  são ultraparalelas, pois não se interceptam e não possuem nenhum ponto ideal em comum.

Já na figura [1.11b](#), temos as  $h$ -retas  $g$ ,  $h$  e  $i$  que são todas do tipo 2 e suas posições relativas são classificadas como:

- as  $g$  e  $h$  são concorrentes, tendo o ponto  $A$  em comum, isto é, a interseção  $g \cap h = A$ ;
- as  $h$  e  $i$  são paralelas, pois o ponto  $B$  é um ponto ideal em comum e a interseção  $h \cap i$  é vazia;
- por fim, as  $g$  e  $i$  são ultraparalelas, uma vez que não possuem nenhum ponto ideal em comum e a interseção  $g \cap i$  é vazia.

Agora, abordaremos o Modelo do Semiplano de Poincaré conforme as noções da Geometria Analítica. Para simplificar esse estudo consideramos o caso particular onde  $r : y = 0$ . Para se chegar nas expressões do caso geral é suficiente aplicar uma rotação nos resultados do caso particular. Neste modelo, também conhecido como modelo do Semiplano Superior, o conjunto de pontos da forma  $P = (x, y)$  do plano euclidiano pode ser descrito da forma:

$$S_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

Como foi definido, as  $h$ -retas possuem dois tipos, 1 e 2. Nesse sentido, teremos duas expressões analíticas para  $h$ -retas em  $S_p$ .

**Definição 1.3.3.** *Dados  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B) \in S_p$ , define-se que:*

1. Se  $x_A = x_B$ , então  $AB = \{(x, y) \in S_p \mid x = x_A\}$ .
2. Se  $x_A \neq x_B$ , então  $AB = \{(x, y) \in S_p \mid (x - a)^2 + y^2 = r^2\}$  para alguma  $a \in \mathbb{R}$  e algum  $r \in \mathbb{R}^+$ .

**Exemplo 1.3.4.** *Considerando os pontos no semiplano superior  $A = (3, 1)$  e  $B = (3, 4)$ , conforme a definição, a  $h$ -reta que contém tais pontos é o conjunto  $AB = \{(x, y) \in S_p \mid x = 3\}$  e nesse caso temos uma  $h$ -reta de primeiro tipo.*

A situação, como já descrito anteriormente, fica um pouco mais elaborada quando estamos trabalhando com  $h$ -reta do segundo tipo.

**Exemplo 1.3.5.** *Considere os pontos do semiplano superior  $A = (4, 3)$  e  $B = (11, 4)$ . Como  $x_A \neq x_B$ , pela definição, devemos determinar o centro da circunferência que define da  $h$ -reta  $(a, 0)$  e o seu raio. Ao substituir  $A = (4, 3)$  em equação  $(x - a)^2 + y^2 = r^2$  teremos que  $(4 - a)^2 + 3^2 = r^2$ .*

Analogicamente, substituindo  $B = (11, 4)$ , temos que  $(11 - a)^2 + 4^2 = r^2$ . Logo, temos duas equações com duas incógnitas

$$\begin{cases} (4 - a)^2 + 3^2 = r^2 \\ (11 - a)^2 + 4^2 = r^2 \end{cases}$$

Já que tanto  $(4 - a)^2 + 3^2$  quanto  $(11 - a)^2 + 4^2$  valem  $r^2$ , assim igualando as equações, temos

$$\begin{aligned} (4 - a)^2 + 3^2 &= (11 - a)^2 + 4^2 \Leftrightarrow 16 - 8a + a^2 + 9 = 121 - 22a + a^2 + 16 \\ &\Leftrightarrow 25 - 8a = 137 - 22a \\ &\Leftrightarrow -8a + 22a = 137 - 25 \\ &\Leftrightarrow 14a = 112 \\ &\Leftrightarrow a = 8 \end{aligned}$$

Sendo  $a = 8$ , segue que

$$\begin{aligned} (4 - a)^2 + 3^2 = r^2 &\Leftrightarrow (4 - 8)^2 + 3^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (-4)^2 + 9 = r^2 \\ &\Leftrightarrow 25 = r^2 \end{aligned}$$

donde,  $r = 5$ . Agora, basta substituir os valores de  $a$  e  $r$  na equação geral que determina da  $h$ -reta que contém  $A$  e  $B$  que teremos

$$AB = \{(x, y) \in S_p \mid (x - 8)^2 + y^2 = 25\}.$$

Podemos escrever uma forma genérica para a equação de uma  $h$ -reta do segundo tipo, para isso seguiremos as contas realizadas no caso particular do exemplo [1.3.5](#). Então, sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pontos do semiplano superior  $S_p$ . Tendo  $x_A \neq x_B$  para termos uma  $h$ -reta do segundo tipo e considerando a equação da circunferência  $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ , podemos substituir as coordenadas do ponto  $A$  em tal equação. Assim

$$(x_A - a)^2 + y_A^2 = r^2. \quad (1.1)$$

De mesmo modo, substituindo os valores das coordenadas do ponto  $B$  na equação da  $h$ -reta, encontramos

$$(x_B - a)^2 + y_B^2 = r^2. \quad (1.2)$$

Igualando as equações (1.1) e (1.2), temos que:

$$\begin{aligned}(x_A - a)^2 + y_A^2 &= (x_B - a)^2 + y_B^2 \\ (x_A - a)^2 + y_A^2 - (x_B - a)^2 - y_B^2 &= 0 \\ x_A^2 - 2x_A a + a^2 + y_A^2 - x_B^2 + 2x_B a - a^2 - y_B^2 &= 0 \\ a(2x_B - 2x_A) &= x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2 \\ a &= \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{2(x_B - x_A)}\end{aligned}$$

Agora, retornando a equação (1.1) e substituindo a expressão do valor  $a$  teremos

$$r^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2.$$

Voltando a equação geral da circunferência de centro  $(a, 0)$  e raio  $r$  dado acima, teremos que

$$(x - a)^2 + y^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2.$$

**Exemplo 1.3.6.** Para utilizar a forma geral da equação da  $h$ -reta do segundo tipo, vamos determinar analiticamente a equação da  $h$ -reta que passa pelos pontos  $A = (2, 1)$  e  $B = (6, 3)$ . Note que  $x_A \neq x_B$ , assim  $AB = \{(x, y) \in S_p \mid (x - a)^2 + y^2 = r^2\}$  para algum  $a$  real e algum real positivo  $r$ . Para o valor de  $a$  temos

$$a = \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{2(x_B - x_A)} = \frac{6^2 - 2^2 + 3^2 - 1^2}{2(6 - 2)} = \frac{36 - 4 + 9 - 1}{2 \cdot 4} = \frac{40}{8} = 5$$

Assim, para  $r^2$  temos

$$r^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2 = (2 - 5)^2 + 1^2 = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

Portanto, a equação da  $h$ -reta procurada é  $AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 5)^2 + y^2 = 10, y > 0\}$ .

### 1.3.3 Distância entre pontos

Voltando agora para o Semiplano de Poincaré, assim como no plano euclidiano, nesse modelo definiremos uma função  $d: S_p \times S_p \rightarrow [0, +\infty)$  que satisfaz as condições de distância. Para isso, utilizaremos a noção de razão cruzada de um conjunto de quatro pontos do plano  $\mathbb{R}^2$ . O comprimento, euclidiano, do segmento de extremidades  $A, B \in \mathbb{R}^2$  será denotado por  $(AB)$ .

**Definição 1.3.7** (Razão cruzada). Sejam  $A, B, M$  e  $N$  pontos em  $\mathbb{R}^2$  satisfazendo  $A \neq M$  e  $B \neq N$ . A **razão cruzada**  $[A, B, M, N]$  é definida por

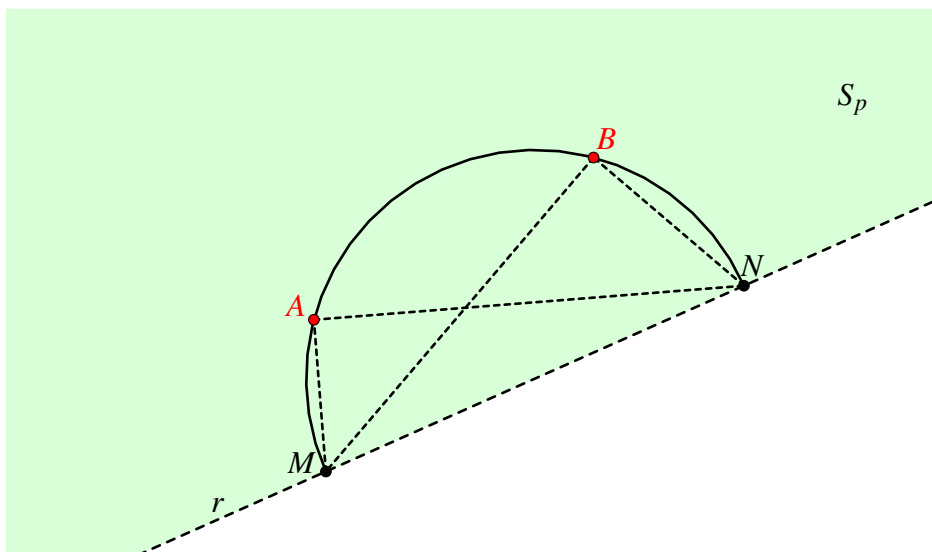
$$[A, B, M, N] = \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)}.$$

Note que na definição [1.3.7](#) se  $A = B$ , então teremos

$$[A, B, M, N] = \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} = \frac{(AM)(AN)}{(AN)(AM)} = 1, \tag{1.3}$$

quaisquer que sejam  $M, N \neq A$ .

No caso do Semiplano de Poincaré os pontos  $M$  e  $N$  serão pontos ideais de alguma  $h$ -reta. Nesse sentido, quando dois pontos  $A$  e  $B$  definirem uma  $h$ -reta de primeiro tipo teremos que, simbolicamente,  $N = \infty$ . Nesse caso, teremos  $[A, B, M, \infty]$ , por definição, será dada por  $\frac{(AM)}{(BM)}$ . Na figura [1.12](#),  $M$  e  $N$  são pontos ideais da  $h$ -reta  $AB$ , sendo esta reta hiperbólica do segundo tipo.



**Figura 1.12:** Razão cruzada.

**Definição 1.3.8.** Dados dois pontos  $A, B \in S_p$  definimos a função  $d_{S_p}: S_p \times S_p \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$d_{S_p}(A, B) = |\ln[A, B, M, N]|,$$

onde  $M$  e  $N$  são os pontos ideais da  $h$ -reta definida pelos pontos  $A$  e  $B$ .

Para diferenciar a distância euclidiana da função definida acima iremos nos referir a essa última como  $h$ -distância.

Na próxima proposição veremos que a função  $d_{S_p}$  goza de algumas das propriedades de distância. Não encontramos na literatura uma referência que fizesse essa argumentação para o caso específico que estamos aqui. Como a propriedade da desigualdade triangular é a mais complexa entre todas, não conseguimos efetuar sua argumentação.

**Proposição 1.3.9.** A função  $d_{S_p}: S_p \times S_p \rightarrow [0, +\infty)$  definida acima é uma distância em  $S_p$ .

*Demonstração.* Para ver que  $d_{S_p}$  é uma distância em  $S_p$  verificaremos três condições:



1.  $d_{S_p}(A, B) \geq 0$ : segue do fato de que  $d_{S_p}$  é definida como módulo de um número real, logo é sempre maior ou igual a zero.
2.  $d_{S_p}(A, B) = 0$  se, e somente se,  $A = B$ : por um lado, se  $A = B$  temos

$$d_{S_p}(A, B) = |\ln[A, B, M, N]| \stackrel{(1.3)}{=} |\ln 1| = 0.$$

Por outro lado, suponha que  $A \neq B$ . Então temos duas possibilidades: (i)  $A$  e  $B$  determinam uma  $h$ -reta do tipo 1 ou (ii)  $A$  e  $B$  determinam uma  $h$ -reta do tipo 2. No primeiro caso, seja  $M$  o ponto ideal de tal  $h$ -reta e teremos que  $(AM) < (BM)$  ou  $(BM) < (AM)$ . Sem perda de generalidade, digamos que  $(AM) < (BM)$ , ou seja,  $\frac{(AM)}{(BM)} < 1$ . Assim,

$$d_{S_p}(A, B) = |\ln[A, B, M, \infty]| = \left| \ln \frac{(AM)}{(BM)} \right| < |\ln 1| = 0.$$

No segundo caso, considere  $M$  e  $N$  os pontos ideais da  $h$ -reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$ , como na figura 1.12. Observe que, da Geometria Plana, os ângulos  $\widehat{MAN} = \widehat{MBN} = 90^\circ$ , donde, denotando por  $C$  a interseção entre os segmentos de retas  $AN$  e  $BM$ ,  $(CM) > (AM)$  e  $(CN) > (BN)$ . Logo,  $(BM) > (CM) > (AM)$  e  $(AN) > (CN) > (BN)$ . Segue daí que  $\frac{(AM)}{(BM)} < 1$  e que  $\frac{(BN)}{(AN)} < 1$ , portanto,

$$d_{S_p}(A, B) = |\ln[A, B, M, N]| = \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right| = \left| \ln \frac{(AM)}{(BM)} \cdot \frac{(BN)}{(AN)} \right| < |\ln 1| = 0.$$

Outra possibilidade é considerar que  $B$  está à esquerda de  $A$  na  $h$ -reta no seguinte sentido,  $B$  está localizado entre  $M$  e  $A$ . Esse caso levaria ao fato de  $\frac{(AM)}{(BM)} > 1$  e que  $\frac{(BN)}{(AN)} > 1$  e, conseqüentemente,  $d_{S_p}(A, B) \neq 0$ . Portanto, pela contra positiva, se  $d_{S_p}(A, B) = 0$ , então  $A = B$ .

3.  $d_{S_p}(A, B) = d_{S_p}(B, A)$ : Se  $A$  e  $B$  coincidem, o resultado é trivial. Caso  $A$  e  $B$  determinam uma  $h$ -reta do tipo 1, então considere  $M$  o ponto ideal de tal  $h$ -reta. Sendo assim,

$$\begin{aligned} d_{S_p}(A, B) &= |\ln[A, B, M, \infty]| = \left| \ln \frac{(AM)}{(BM)} \right| = \left| \ln \left( \frac{(BM)}{(AM)} \right)^{-1} \right| \\ &= \left| (-1) \ln \frac{(BM)}{(AM)} \right| = \left| \ln \frac{(BM)}{(AM)} \right| = d_{S_p}(B, A). \end{aligned}$$

Caso  $A$  e  $B$  determinam uma  $h$ -reta do tipo 2, então considere  $M$  e  $N$  os pontos ideais de

tal  $h$ -reta. Então,

$$\begin{aligned} d_{S_p}(A, B) &= |\ln[A, B, M, N]| = \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right| = \left| \ln \left( \frac{(AN)(BM)}{(AM)(BN)} \right)^{-1} \right| \\ &= \left| (-1) \ln \frac{(AN)(BM)}{(AM)(BN)} \right| = \left| \ln \frac{(AN)(BM)}{(AM)(BN)} \right| = \\ &= |\ln[B, A, M, N]| = d_{S_p}(B, A). \end{aligned}$$

□

Para calcular, analiticamente, a distância hiperbólica entre dois pontos, basta fazer do mesmo modo apresentado na definição [1.3.8](#). A seguir, exemplificamos a forma de calcular a distância para o caso de  $h$ -reta do primeiro tipo.

**Exemplo 1.3.10.** Considerado os pontos  $A = (0, 3)$  e  $B = (0, 7)$  de  $S_p$  temos que estes determinam uma  $h$ -reta do primeiro tipo e, sendo assim,

$$d_{S_p}(A, B) = \left| \ln \frac{AM}{BM} \right| = \left| \ln \frac{3}{7} \right| = |\ln 0,42857| \approx 0,85.$$

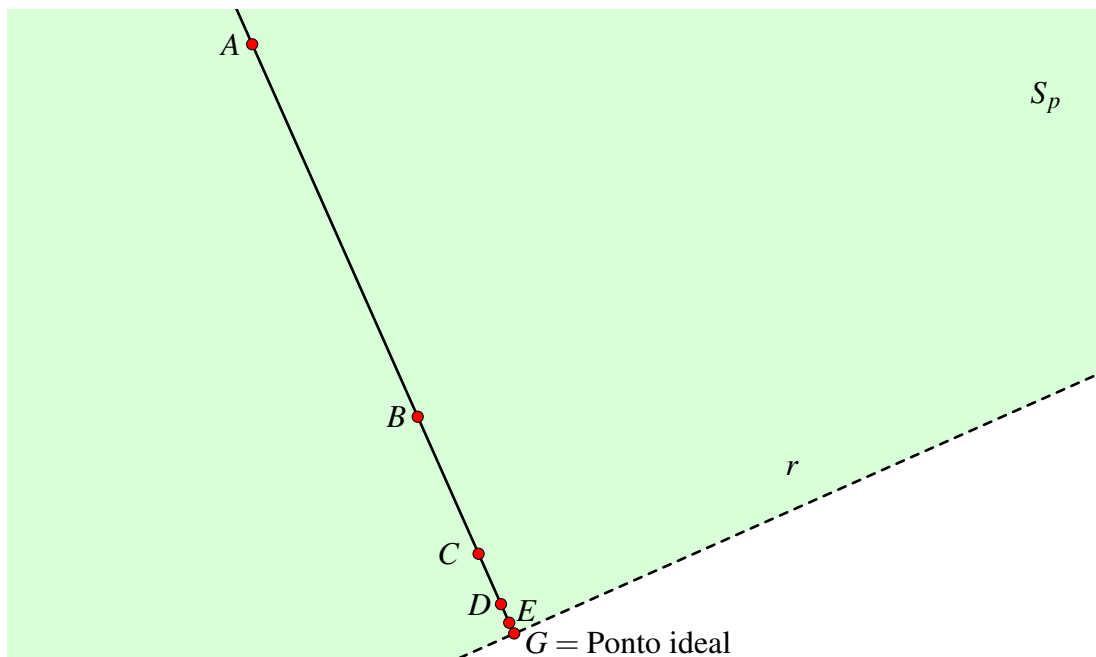
**Exemplo 1.3.11.** Agora considerando os pontos em  $S_p$   $A = (2, 1)$  e  $B = (2, 5)$  vemos que estes determinam uma  $h$ -reta do primeiro tipo e, por esse motivo,

$$d_{S_p}(A, B) = \left| \ln \frac{AM}{BM} \right| = \left| \ln \frac{1}{5} \right| = |\ln 0,2| \approx 1,61.$$

Observando os exemplos [1.3.10](#) e [1.3.11](#), percebemos que estes possuem a mesma distância euclidiana, porém as respectivas  $h$ -distâncias são distintas. Entenderemos intuitivamente como seria a noção de distância no Semiplano, para isso usaremos a noção apresentada em [\(RIBEIRO, 2013\)](#).

O Semiplano é um espaço infinito, no seguinte sentido: *uma criatura que vive neste mundo bidimensional pode andar com passos iguais em direção a reta que define o Semiplano, mas sem nunca chegar ao fim de sua caminhada. Um observador, que vê de fora, nota que os passos da criatura tornam-se cada vez menores. Entretanto, a distância está distorcida, pois o observador está analisando o caminho hiperbólico com base nos conhecimentos euclidianos.*

A figura [1.13](#) retrata os passos dessa criatura. Após ampliar a imagem, percebe-se que outros tantos passos iguais podem ser dados. Veja que, podemos aumentar a imagem infinitamente e mesmo assim a criatura poderia dar muitos outros passos iguais, sem nunca chegar na reta que define o Semiplano.



**Figura 1.13:** Noção intuitiva de distância hiperbólica.

Além disso, todos os  $h$ -segmentos da figura 1.13 possuem o mesmo comprimento hiperbólico, ainda que no olhar euclidiano um  $h$ -segmento pareça maior que o outro. A explicação deve-se ao fato de que na perspectiva euclidiana acontece uma distorção da distância no Modelo do Semiplano de Poincaré. A tabela a seguir traz as coordenadas de cada um dos pontos contidos na figura 1.13 onde a reta que determina  $S_p$  considerada é  $r : -4x + 9y - 40 = 0$ .

Ponto	Coordenadas	distância
G	(0.95,4.87)	-
A	(-4,16)	-
B	(-0.87276, 8.96371)	(AB) = 1.0000000
C	(0.27768, 6.37520)	(BC) = 1,0000004
D	(0.70091, 5.42294)	(CD) = 1,0000007
E	(0.85661, 5.07261)	(DE) = 1,0000008

No próximo exemplo, iremos abordar o cálculo da  $h$ -distância entre dois pontos que determinam uma  $h$ -reta do segundo tipo.

**Exemplo 1.3.12.** Considere os pontos  $A = (4, 3)$  e  $B = (11, 4)$  em  $S_p$  determinado pela reta  $r : y = 0$ . A  $h$ -reta que contém os pontos  $A$  e  $B$  é do segundo tipo dado que  $x_A \neq x_B$ . Como no exemplo 1.3.5 temos que  $AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 8)^2 + y^2 = 25, y > 0\}$ . Assim, para calculamos a  $h$ -distância entre  $A$  e  $B$  precisamos determinar os pontos ideais de  $AB$ , os quais são claramente  $M = (3, 0)$  e  $N = (13, 0)$  fazendo  $y = 0$  em  $(x - 8)^2 + y^2 = 25$ . Logo, podemos calcular os

comprimentos euclidianas dos segmentos  $AM$ ,  $BN$ ,  $AN$  e  $BM$ .

$$\begin{aligned}(AM) &= \sqrt{(4-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10} \\(BN) &= \sqrt{(11-13)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} \\(AN) &= \sqrt{(4-13)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{90} \\(BM) &= \sqrt{(11-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{80}\end{aligned}$$

Portanto, a  $h$ -distância procurada entre os pontos  $A$  e  $B$  é:

$$\begin{aligned}d_{S_p}(A, B) &= \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right| = \left| \ln \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{20}}{\sqrt{90} \times \sqrt{80}} \right| = \left| \ln \frac{3,16227766 \times 4,472135955}{9,48683298 \times 8,94427191} \right| \\&= \left| \ln \frac{14,1421356229793}{84,852813737876} \right| = |\ln 0,1667| \approx 1,7918\end{aligned}$$

Para finalizar essa seção sobre  $h$ -distância, a próxima proposição dará uma resposta parcial para a desigualdade triangular, o caso quando ocorre igualdade. Diremos que  $C$  está entre  $A$  e  $B$  quando  $C$  pertence a mesma  $h$ -reta que contém os pontos  $A$  e  $B$  e está entre esses dois pontos na  $h$ -reta.

**Proposição 1.3.13.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos no plano hiperbólico. Se  $C$  é um ponto entre  $A$  e  $B$ , então  $d_{S_p}(A, C) + d_{S_p}(C, B) = d_{S_p}(A, B)$ .*

*Demonstração.* Podemos ter duas situações. A primeira é  $A$  e  $B$  determinarem uma  $h$ -reta do primeiro tipo. Seja  $M$  o ponto ideal de tal  $h$ -reta. Temos que ou  $A$  está entre  $B$  e  $M$  ou  $B$  está entre  $A$  e  $M$ . Se  $A$  está entre  $B$  e  $M$ , então  $(AM) < (CM) < (BM)$ , donde,  $\frac{(AM)}{(CM)} < 1$ ,  $\frac{(CM)}{(BM)} < 1$  e  $\frac{(AM)}{(BM)} < 1$ . Logo,  $\ln \frac{AM}{CM} < 0$  e  $\ln \frac{CM}{BM} < 0$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned}d_{S_p}(A, C) + d_{S_p}(C, B) &= \left| \ln \frac{AM}{CM} \right| + \left| \ln \frac{CM}{BM} \right| = -\ln \frac{AM}{CM} - \ln \frac{CM}{BM} = -\left( \ln \frac{AM}{CM} + \ln \frac{CM}{BM} \right) \\&= -\left( \ln \frac{AM}{CM} \cdot \frac{CM}{BM} \right) = -\left( \ln \frac{AM}{BM} \right) = \left| \ln \frac{AM}{BM} \right| = d_{S_p}(A, B).\end{aligned}$$

No caso em que  $B$  está entre  $A$  e  $M$  teremos:

$$\frac{AM}{CM} > 1, \frac{CM}{BM} > 1 \text{ e } \frac{AM}{BM} > 1.$$

Logo,

$$d_{S_p}(A, C) + d_{S_p}(C, B) = \ln \frac{AM}{CM} + \ln \frac{CM}{BM} = \ln \frac{AM}{BM} = d_{S_p}(A, B).$$

Para o caso dos pontos  $A$  e  $B$  determinarem uma  $h$ -reta do segundo tipo, sejam  $M$  e  $N$  os seus pontos ideais, como mostra a figura 1.14, podemos supor, sem perda de generalidade,  $B * C * A$ , ou seja, o ponto  $C$  está entre  $B$  e  $A$ .

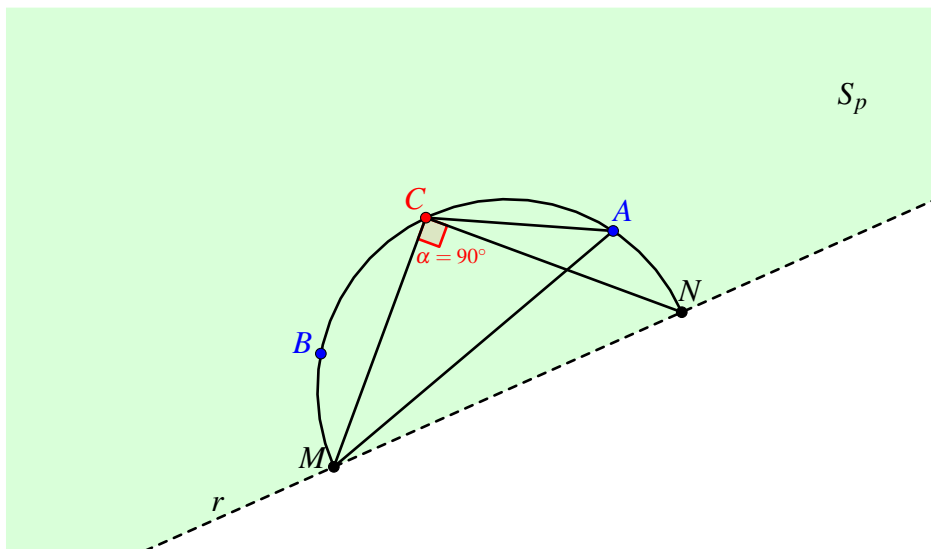


Figura 1.14: Ponto C entre AB.

Observe que  $(AM) > (CM)$ , pois pela geometria plana, temos que  $\widehat{MCN} = 90^\circ$  e veja que  $\triangle MCA$  é obtusângulo. Sabemos que, em um triângulo, o maior lado se opõe ao maior ângulo. Como  $\widehat{MCA}$  é o maior ângulo e seu lado oposto é  $(AM)$ , logo concluímos que  $(AM) > (CM)$ .

De forma análoga, temos a validade das outras desigualdades  $(CN) > (AN)$ ,  $(BN) > (CN)$  e  $(CM) > (BM)$ . Logo

$$\frac{(AM)}{(CM)} > 1, \frac{(CN)}{(AN)} > 1, \frac{(BN)}{(CN)} > 1 \text{ e } \frac{(CM)}{(BM)} > 1.$$

Como resultado,  $\ln \frac{(AM)(CN)}{(AN)(CM)} > 0$  e  $\ln \frac{(CM)(BN)}{(CN)(BM)} > 0$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} d_{S_p}(A,C) + d_{S_p}(C,B) &= \left| \ln \frac{(AM)(CN)}{(AN)(CM)} \right| + \left| \ln \frac{(CM)(BN)}{(CN)(BM)} \right| = \ln \frac{(AM)(CN)}{(AN)(CM)} + \ln \frac{(CM)(BN)}{(CN)(BM)} \\ &= \ln \frac{(AM)(CN)}{(AN)(CM)} \cdot \frac{(CM)(BN)}{(CN)(BM)} = \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \\ &= \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right| = d_{S_p}(A,B). \end{aligned}$$

□

### 1.3.4 Ângulos entre $h$ -retas

Agora abordaremos brevemente o conceito de ângulo no Semiplano de Poincaré. O ângulo hiperbólico (ou  $h$ -ângulo) entre duas  $h$ -retas será, por definição, a medida do menor

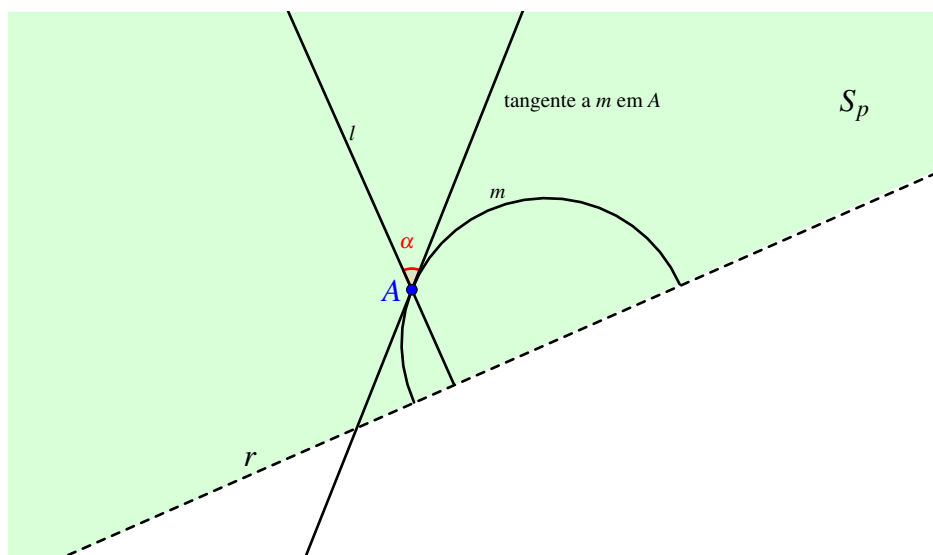
ângulo formado pelas retas tangentes as  $h$ -retas dadas no seu ponto de interseção, denominado vértice do ângulo.

Como abordado, as posições relativas entre  $h$ -retas são classificadas como paralelas, ultraparalelas e concorrentes.

Quando as  $h$ -retas são paralelas ou ultraparalelas, a medida de ângulo formado pelas semirretas é, por definição, zero. Como estamos tratando da Geometria Hiperbólica no semiplano e as  $h$ -retas do tipo 1 são semirretas perpendiculares simultaneamente a uma mesma reta, temos um ângulo com medida igual a zero.

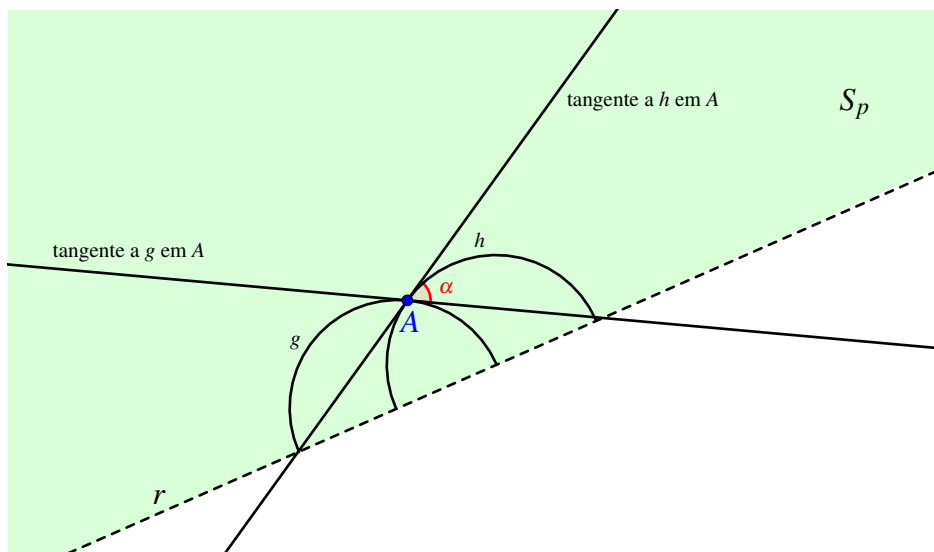
Agora, quando as  $h$ -retas são concorrentes, teremos dois possíveis casos, a saber, a interseção de  $h$ -retas de primeiro tipo com segundo tipo ou a interseção de  $h$ -retas ambas de segundo tipo. Para cada caso, apresentamos uma explicação de como medir o ângulo entre as  $h$ -retas e imagens para ilustrar geometricamente cada uma das formas de concorrência.

Na figura [1.15](#) consideramos duas  $h$ -retas, uma denominada  $l$  de primeiro tipo e a outra  $m$  de segundo tipo, cuja interseção é o ponto  $A$ . Esse ponto será o vértice do ângulo formado pelas duas  $h$ -retas. Para determiná-lo, consideramos a reta tangente a semicircunferência  $m$  no ponto  $A$  e calculamos o ângulo formando por essa reta tangente e a semirreta  $l$ .



**Figura 1.15:** Ângulo formado entre uma  $h$ -reta do tipo 1 com uma  $h$ -reta do tipo 2.

Agora, na figura [1.16](#), consideramos duas  $h$ -retas, ambas de segundo tipo, denominadas de  $g$  e  $h$  com interseção no ponto  $A$ , que será o vértice do ângulo formado pelas  $h$ -retas. Nas duas semicircunferências consideramos as respectivas retas tangentes no ponto  $A$  e determinamos o ângulo formado por tais retas tangentes.



**Figura 1.16:** Ângulo formado entre uma  $h$ -reta do tipo 2 com uma  $h$ -reta do tipo 2.

Agora, podemos determinar a medida de ângulo, a partir das noções da Geometria Analítica. Quando temos um ângulo formado por duas retas hiperbólicas do tipo 1, o valor é zero.

Para determinar, analiticamente, o ângulo formado por uma  $h$ -reta  $l$  do primeiro tipo e outra  $h$ -reta  $m$  do segundo tipo, consideraremos o semiplano superior,  $A = (x_A, y_A)$  o ponto de interseção entre as duas  $h$ -retas, sendo o vértice do ângulo, e teremos que  $l : x = x_A$  e existe um número real  $a$  tal que  $m : (x - a)^2 + y^2 = (x_A - a)^2 + (y_A)^2, y > 0$ . Para determinar a inclinação da reta tangente a  $m$  utilizaremos o conceito de derivada. Derivando implicitamente a equação  $(x - a)^2 + y^2 = (x_A - a)^2 + (y_A)^2$  teremos que

$$\begin{aligned} 2(x - a) + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \Leftrightarrow 2y \frac{dy}{dx} = -2(x - a) \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2(x - a)}{2y} \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(x - a)}{y} \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{y}. \end{aligned}$$

Assim, a inclinação da reta tangente à semicircunferência no vértice  $A$  será dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a - x_A}{y_A}.$$

Donde, a medida do ângulo euclidiano  $\theta$  entre a semirreta  $l$  e a reta tangente a semicircunferência  $m$  no ponto  $A$  será dada por

$$\theta = \left| 90^\circ - \operatorname{arctg} \left( \frac{a - x_A}{y_A} \right) \right|. \tag{1.4}$$

No próximo exemplo faremos o processo descrito acima em um caso particular.

**Exemplo 1.3.14.** Considere  $k$  a semirreta dada pela equação  $l : x = 0$ , a qual é uma  $h$ -reta de primeiro tipo, e  $m$  a  $h$ -reta do segundo tipo dada por  $m : (x - 3)^2 + y^2 = 12, y > 0$ , ambas representadas na figura 1.17 no semiplano superior. A interseção  $A$  entre tais  $h$ -retas terá como coordenada  $y_A$  uma das soluções da equação

$$(0 - 3)^2 + y^2 = 12$$

que tem raízes sendo  $y = \pm\sqrt{3}$ . Como estamos trabalhando no semiplano superior devemos ter  $y > 0$ . Logo,  $A = (0, \sqrt{3})$ . Pela relação 1.4 temos que a medida do ângulo formado entre as  $h$ -retas  $l$  e  $m$  é:

$$\theta = \left| 90^\circ - \arctg \left( \frac{3-0}{\sqrt{3}} \right) \right| = 90^\circ - \arctg(\sqrt{3}) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

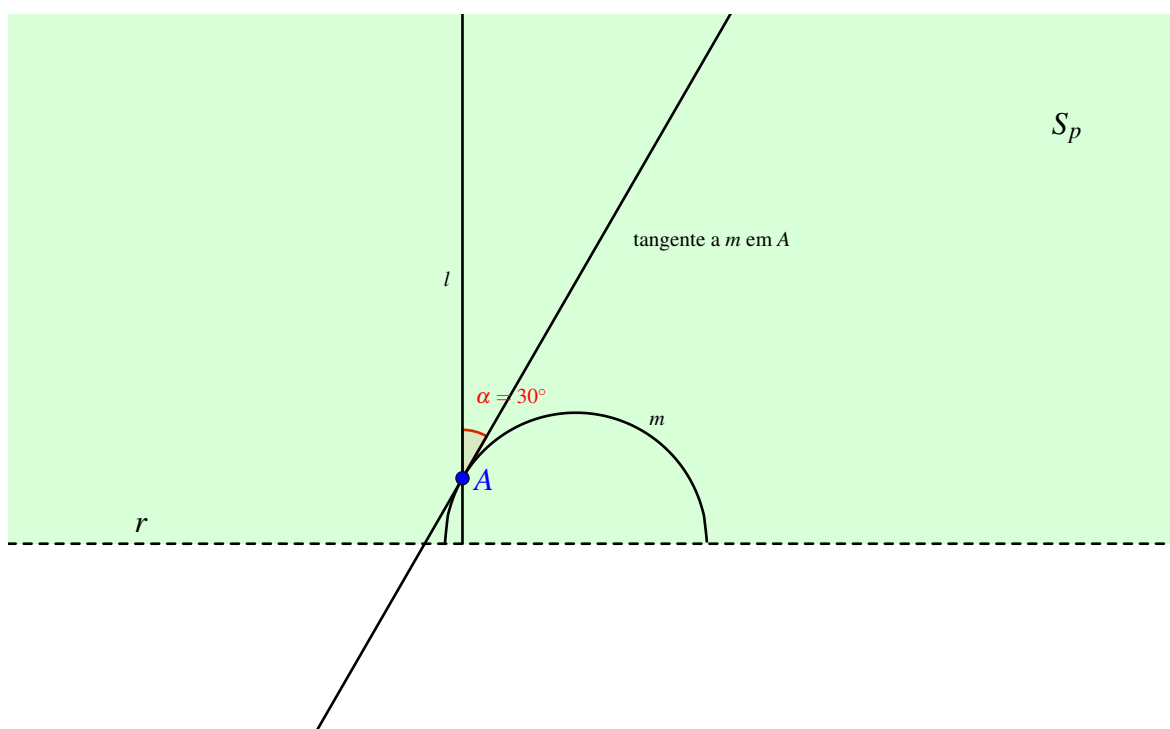


Figura 1.17: Exemplo 1.3.14

Considere agora duas  $h$ -retas, ambas de segundo tipo, no semiplano superior dadas pelas equações  $l : (x - a)^2 + y^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2, y > 0$  e  $m : (x - b)^2 + y^2 = (x_A - b)^2 + y_A^2, y > 0$ , com interseção num ponto  $A = (x_A, y_A)$ , que será o vértice do  $h$ -ângulo entre  $l$  e  $m$ . De forma análoga ao feito anteriormente, a inclinação das retas tangentes a  $l$  e  $m$  no ponto  $A$ , respectivamente,



serão dadas por  $\theta_a$  e  $\theta_b$  que satisfazem

$$\operatorname{tg}\theta_a = \frac{a-x_A}{y_A} \text{ e } \operatorname{tg}\theta_b = \frac{b-x_A}{y_A}.$$

Da Geometria Analítica temos dois casos. O primeiro caso é se tivermos  $\operatorname{tg}\theta_a \cdot \operatorname{tg}\theta_b = -1$ , o que implicará que as semirretas são perpendiculares entre si, então o ângulo entre as retas tangentes e, conseqüentemente, entre as  $h$ -retas será de  $90^\circ$ . Já o segundo caso,  $\operatorname{tg}\theta_a \cdot \operatorname{tg}\theta_b \neq -1$ , temos que o ângulo formado entre as duas retas tangentes e, conseqüentemente, as  $h$ -retas será dado pelo módulo da diferença entre os ângulos  $\theta_a$  e  $\theta_b$ . Como

$$\operatorname{tg}(\theta_a - \theta_b) = \frac{\operatorname{tg}\theta_a - \operatorname{tg}\theta_b}{1 + \operatorname{tg}\theta_a \cdot \operatorname{tg}\theta_b}$$

colocando,  $\theta := |\theta_a - \theta_b|$  teremos que

$$\begin{aligned} \theta &= \left| \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg}\theta_a - \operatorname{tg}\theta_b}{1 + \operatorname{tg}\theta_a \cdot \operatorname{tg}\theta_b} \right) \right| = \left| \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{a-x_A}{y_A} - \frac{b-x_A}{y_A}}{1 + \frac{a-x_A}{y_A} \cdot \frac{b-x_A}{y_A}} \right) \right| \\ &= \left| \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{a-x_A-b+x_A}{y_A}}{1 + \frac{(a-x_A)(b-x_A)}{y_A^2}} \right) \right| = \left| \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{a-b}{y_A}}{\frac{y_A^2 + (a-x_A)(b-x_A)}{y_A^2}} \right) \right| \\ &= \left| \operatorname{arctg} \left( \frac{a-b}{y_A} \cdot \frac{y_A^2}{y_A^2 + (a-x_A)(b-x_A)} \right) \right| = \left| \operatorname{arctg} \left( \frac{(a-b) \cdot y_A}{y_A^2 + (a-x_A)(b-x_A)} \right) \right| \\ &= \left| \operatorname{arctg} \left( \frac{a-b}{y_A + \frac{(a-x_A)(b-x_A)}{y_A}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo numérico.

**Exemplo 1.3.15.** Considere as  $h$ -retas no semiplano superior dadas pelas equações  $l : (x-2)^2 + y^2 = 2$  e  $m : (x-3)^2 + y^2 = 1$  e  $y > 0$ , como mostra a figura [1.18](#)

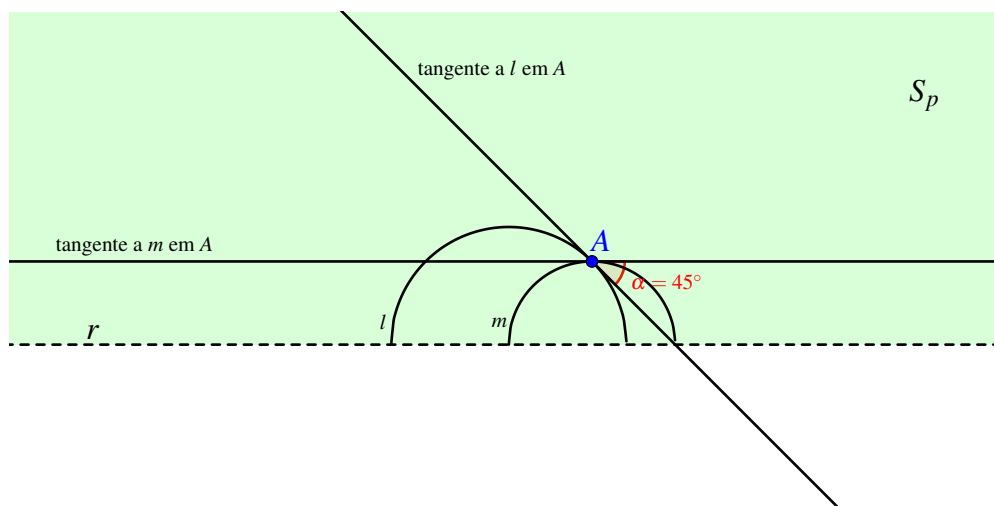


Figura 1.18: Exemplo 3.3.2

Para determinar a interseção entre essas duas  $h$ -retas devemos determinar a solução do sistema não linear

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 2 \\ (x-3)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Fazendo a primeira equação menos a segunda temos que

$$\begin{aligned} (x-2)^2 - (x-3)^2 = 1 &\Leftrightarrow [(x-2) - (x-3)] \cdot [(x-2) + (x-3)] = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x - 5 = 1 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Agora, substituindo  $x = 3$  na primeira equação inicial, teremos

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + y^2 = 2 &\Rightarrow (3-2)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 1^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 1 + y^2 = 2 \\ &\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1. \end{aligned}$$

Como devemos ter  $y > 0$  concluímos que  $y = 1$ . Portanto, o ponto de interseção entre as duas  $h$ -retas será  $A = (3, 1)$ . Se denotarmos por  $\theta_l$  e  $\theta_m$  os coeficientes das retas tangentes a  $l$  e  $m$  no ponto  $A$ , respectivamente, pelo exposto acima teremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta_l &= \frac{a - x_A}{y_A} = \frac{2 - 3}{1} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \operatorname{tg}\theta_m &= \frac{b - x_A}{y_A} = \frac{3 - 3}{1} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Logo, temos que  $\operatorname{tg}\theta_l \cdot \operatorname{tg}\theta_m \neq -1$ . Portanto, o ângulo formado pelas  $h$ -retas  $l$  e  $m$  será

$$\theta = \left| \operatorname{arctg} \left( \frac{2-3}{1 + \frac{(2-3)(3-3)}{1}} \right) \right| = |\operatorname{arctg}(-1)| = |-45^\circ| = 45^\circ.$$

## 1.4 Triângulos Hiperbólicos

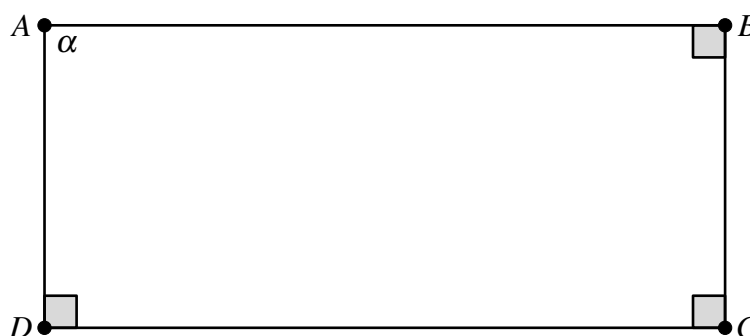
Para finalizar esse breve trabalho, entenderemos um pouco sobre triângulos na Geometria Hiperbólica, sendo que os conceitos e resultados aqui expostos valem não somente para o modelo do Semiplano de Poincaré, mas sim para quaisquer modelos da Geometria Hiperbólica.

Voltando um pouco na história, Lambert realizou tentativas para deduzir o Quinto Postulado de Euclides usando argumentação indireta. Em seu trabalho intitulado por *Theorie der Parallellinien*, escrito no ano de 1766 e publicado após sua morte, Lambert apresenta a teoria das paralelas. Ele considerou um quadrilátero contendo três ângulos retos na tentativa de provar que o quarto ângulo seria reto, o que seria equivalente ao Quinto Postulado. Em relação a esse

quarto ângulo, Lambert considerou três possibilidades, a primeira de ser reto era o ângulo de interesse, a segunda hipótese era o ângulo ser obtuso gerava um absurdo ao assumir que a reta é ilimitada. A terceira hipótese, do ângulo ser agudo, não gerava nenhuma contradição, o que levou a Lambert concluir que essa terceira hipótese era também uma possibilidade distinta ao ângulo ser reto e levava a uma geometria diferente daquela que hoje é chamada de Geometria Euclidiana (BARBOSA, 2002).

Assim, definimos como Quadrilátero de Lambert qualquer quadrilátero  $ABCD$  que possua três ângulos retos, ou seja, de  $90^\circ$  e o quarto ângulo agudo.

Para as argumentações que faremos a seguir partiremos do pressuposto que quadriláteros de Lambert existem. Já pelo exposto até aqui, se o quarto ângulo do quadrilátero ser reto equivale ao quinto postulado, além deste não poder ser obtuso, indica que a existência desse quadrilátero está ligado a não validade do Quinto Postulado.



**Figura 1.19:** Quadrilátero de Lambert.

Nos próximos resultados ficará implícito que a existência do quadrilátero de Lambert em uma geometria implica que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é um número menor que  $180^\circ$ . Começemos olhando para triângulos retângulos e logo depois levar tal resultado para qualquer triângulo.

**Teorema 1.4.1.** *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor que  $180^\circ$ .*

*Demonstração.* Para melhor entender os passos dessa demonstração usaremos a figura 1.20. Seja  $ABC$  um triângulo retângulo e  $D$  o ponto médio da hipotenusa  $AC$ . Seja  $ED$  um segmento perpendicular a  $BC$  passando por  $D$ . Constrói-se  $AF$ , tal que,  $\widehat{CAF} \equiv \widehat{ACB}$  e  $EC \equiv AF$ . Veja que,  $AD \equiv DC$ ,  $\widehat{CAF} \equiv \widehat{ACB}$  e  $EC \equiv AF$ . Assim, temos que  $\triangle AFD$  e  $\triangle CED$  são congruentes

pelo caso de congruência de triângulos  $LAL$ . Logo,  $\widehat{CED} \equiv \widehat{AFD}$ ,  $ED \equiv DF$  e  $\widehat{EDC} \equiv \widehat{FDA}$ . O resultado disso é que os pontos  $F$ ,  $D$  e  $E$  estão alinhados e, além disso, o ângulo em  $F$  é reto. Portanto,  $ABEF$  é um Quadrilátero de Lambert com o ângulo agudo em  $A$ , isto é,  $m(\widehat{CAF}) + m(\widehat{BAC}) < 90^\circ$ . Como  $\widehat{CAF}$  é congruente ao ângulo interno  $\widehat{ACB}$  do triângulo retângulo, segue que

$$m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CAF}) + m(\widehat{BAC}) + 90^\circ < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

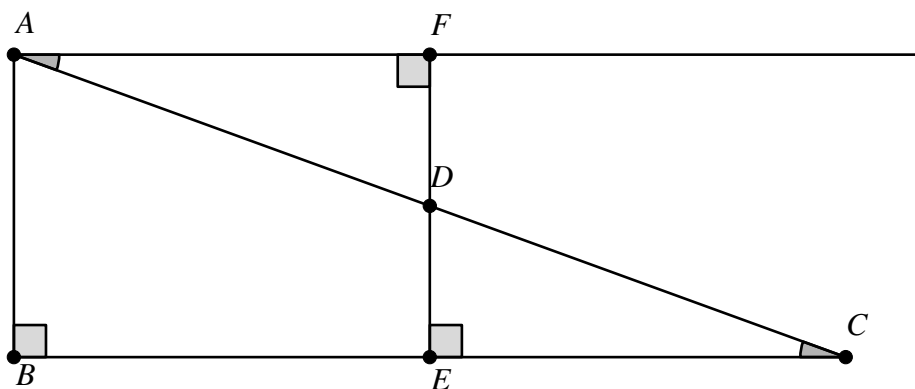


Figura 1.20: Teorema 1.4.1

□

**Teorema 1.4.2.** *A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor que  $180^\circ$ .*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo não retângulo como mostra a figura 1.21. Traçamos o segmento  $AD$  perpendicular a  $BC$ . A partir dessa construção, temos dois triângulos retângulos em  $D$ , sendo  $\triangle ADC$  e  $\triangle ADB$ . Como  $\triangle ADC$  e  $\triangle ADB$  são retângulos, pelo teorema 1.4.1, sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo é menor que  $180^\circ$ . Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} 360^\circ &> [m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{BAD})] + [m(\widehat{CDA}) + m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{DAC})] \\ &= m(\widehat{DBA}) + 90^\circ + 90^\circ + m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{BAC}) \\ &= 180^\circ + m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{BAC}), \end{aligned}$$

donde  $m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{BAC}) < 180^\circ$ .

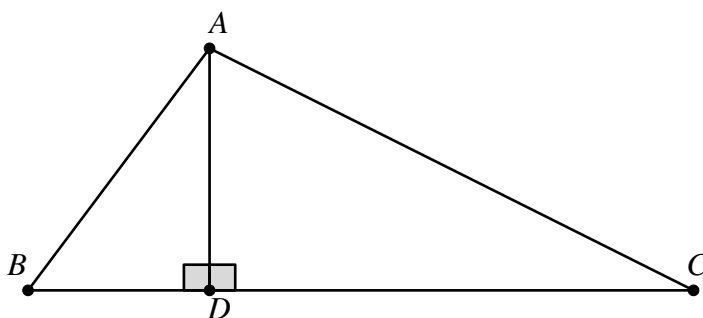


Figura 1.21: Teorema 1.4.2

□

Uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo seja menor que dois ângulos retos, é natural de esperar que em um quadrilátero convexo qualquer a soma dos seus ângulos internos não chegue a quatro ângulos retos.

**Lema 1.4.3.** *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo qualquer é menor que  $360^\circ$ .*

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo como mostra a figura 1.22. Trace o segmento  $AC$ . Observe que, a partir dessa construção, temos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ACD$ . Pelo teorema 1.4.2, sabemos que a soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos é menor que  $180^\circ$ . Assim, concluímos que:

$$[m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{CDA}) + m(\widehat{DAC})] + [m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{CAB})] < 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

Mas,

$$m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCD}).$$

Portanto,

$$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{CDA}) < 360^\circ.$$

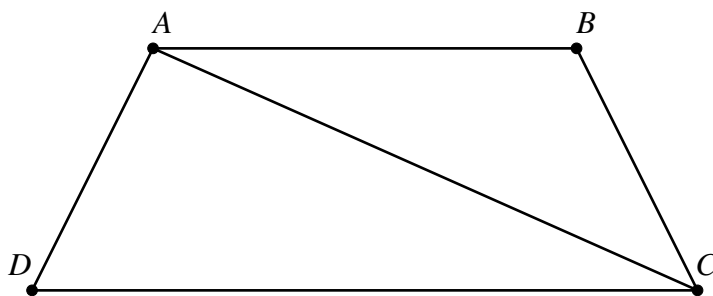


Figura 1.22: Lema 1.4.3

□

Lembrando que na Geometria Euclidiana, para que dois triângulos sejam congruentes é necessário, por definição, que os respectivos ângulos e os respectivos lados sejam congruentes, ou seja, são seis condições. Isso leva ao estudo de condições menos restritivas para se obter triângulos congruentes. São os casos de congruências.

Quando pedimos apenas que os ângulos, na Geometria Euclidiana, sejam congruentes, pedimos menos do que os triângulos sejam congruentes e é exatamente o que é ser semelhante. Porém, fato curioso da Geometria feita a partir da não validade do Quinto Postulado é que semelhança implica em congruência.

**Teorema 1.4.4.** *Se dois triângulos são semelhantes, então são congruentes.*

*Demonstração.* A demonstração será realizada por contradição e com o auxílio da figura 1.23. Assim, considere  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  como sendo semelhantes, mas não congruentes. Com isso, temos que os ângulos correspondentes são congruentes, mas seus lados correspondentes não são congruentes. Supondo, sem perda de generalidade, que  $\overline{AB} > \overline{A'B'}$  e  $\overline{AC} > \overline{A'C'}$ . Agora, trace o ponto  $B''$  em  $\overline{AB}$  de modo que  $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ , e também, trace o ponto  $C''$  em  $\overline{AC}$  de modo que  $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$ . Note que,  $\overline{A'B'} \cong \overline{AB''}$ ,  $B'\hat{A}'C' \cong B''\hat{A}''C''$  e  $\overline{A'C'} \cong \overline{AC''}$ . Como consequência, temos que  $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$  pelo caso de congruência de triângulos LAL. Logo,  $\widehat{AB''C''} \cong \widehat{B'}$  e  $\widehat{AC''B''} \cong \widehat{C'}$ . Mas, por hipótese, como  $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$  e  $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$ , então,  $\widehat{AB''C''} \cong \widehat{B}$  e  $\widehat{AC''B''} \cong \widehat{C}$ . Sendo assim, veja que os segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{B''C''}$  são paralelos e o quadrilátero  $BB''C''C$  é convexo e tem a soma de seus ângulos exatamente igual a  $360^\circ$ , o que acaba contradizendo o lema 1.4.3.

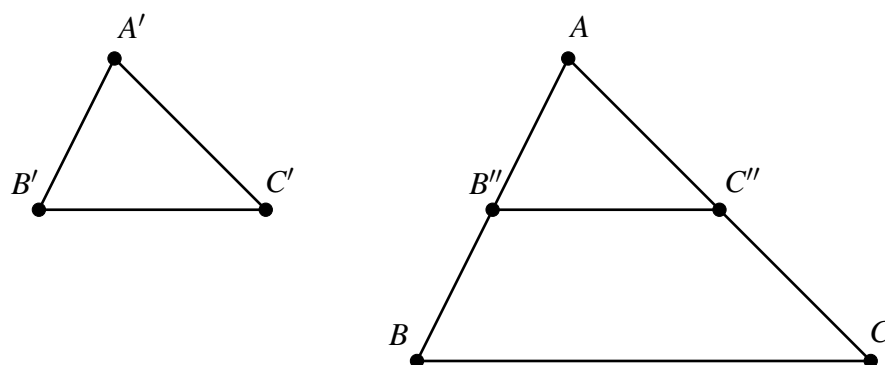


Figura 1.23: Teorema 1.4.4

□

Como consequência imediata do Teorema anterior segue o corolário que diz sobre a congruência de triângulos.

**Corolário 1.4.5.** *Dois triângulos são congruentes se os correspondentes ângulos são congruentes.*

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ . Suponha que  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$ ,  $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{EFD})$  e  $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{FDE})$ . Ângulos congruentes possuem medidas iguais e ângulos que com medidas iguais são congruentes. Assim, temos que  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ ,  $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD}$  e  $\widehat{CAB} \equiv \widehat{FDE}$ . Como as medidas dos ângulos são congruentes, portanto  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ . □

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com esse trabalho pretendeu-se entender o Modelo do Semiplano de Poincaré, sendo um modelo pertencente à Geometria Hiperbólica. Assim, foi estudado uma Geometria que diferisse da que foi apresentada por Euclides, sendo a Geometria Não Euclidiana, a partir de pesquisas bibliográficas.

Para se atingir uma compreensão do estudo do Modelo do Semiplano de Poincaré, definiram-se objetivos. O primeiro foi compreender o contexto histórico do surgimento da Geometria Não Euclidiana. Verificou-se que diversos matemáticos contribuíram com estudos que geraram noções também válidas para essa nova Geometria, estudos esses que começaram a partir da dificuldade apresentada em entender o Quinto Postulado de Euclides. Depois, sucedeu uma sequência de estudo do Modelo do Semiplano de Poincaré. A análise permitiu concluir um estudo de pontos e retas, posições relativas entre  $h$ -retas, distância entre pontos e ângulos entre  $h$ -retas. Por fim, foi estudado a respeito dos triângulos hiperbólicos. Os resultados obtidos foram teoremas, lema e corolário, em que se estudou a soma dos ângulos interno de triângulos, tanto para triângulos retângulos quanto generalizando o caso para qualquer triângulo, além disso, foi estudado sobre quadrilátero convexo, triângulos semelhantes serem congruentes e triângulos serem congruentes quando os correspondentes ângulos são congruentes.

Portanto, através desse trabalho, foi possível estudar um modelo de Geometria diferente do modelo da Geometria Euclidiana, visto durante o ensino básico.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASTANHEIRA, N. P. *Geometrias não euclidianas*. [S.l.]: Intersaberes, 2020. v. 1ª edição. 222 p.
- BARBOSA, J. L. M. *Geometria hiperbólica*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2002. 167 p.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. 285 p.
- IMPrensa, A. de Comunicação e. *Editora Unesp lança Os elementos, de Euclides*. 2009. Disponível em: <https://www2.unesp.br/sharer.php?noticia=4428>. Acesso em: 18 outubro 2022.
- BICUDO, I. *Os elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009. 594 p.
- COUTINHO, L. *Convite às geometrias não-euclidianas*. [S.l.]: Interciência, 2018. v. 3ª edição. 118 p.
- O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF. *Non-Euclidean geometry*. 1996. Disponível em: [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Non-Euclidean\\_geometry/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Non-Euclidean_geometry/). Acesso em: 24 outubro 2022.
- CASTRO, J. K. d. S. *Algumas particularidades do plano hiperbólico*. 2017.
- CARDOSO, C. V. O. *A Geometria de Lobachevsky*. Tese (Doutorado) — 00500:: Universidade de Coimbra, 2013.
- ALBON, A. J. D. *A geometria do disco de Poincaré*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.
- SOUZA, C. B. d. *Geometria hiperbólica: consistência do modelo de disco de Poincaré*. 2015.
- ADAMES, M.; SCHENA, F. M. *A história dos modelos de Eugenio Beltrami para a geometria hiperbólica*. 2021.
- AGUSTINI, E. *Introdução à geometria hiperbólica plana*. FAMAT UFU; CEaD UFU, 2022.
- ALVES, G. C. *Uso de geometria não euclidiana no ensino médio: o exemplo do plano de Minkowski*. 2020.

MAGALHÃES, J. M. Um estudo dos modelos da geometria hiperbólica. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2015.

DOLCE, O.; POMPEL, J. N. Fundamentos de matemática elementar 9: Geometria plana. *Atual Editora Ltda, 7a edição*, v. 9, p. 451, 1997.

PEREZ, C. M. Fundamentos de geometria hiperbólica. Universidade Estadual Paulista (UNESP), p. 76, 2015.

COSTA, V. Abordagens no ensino das geometrias. UNIFAP, p. 103, 2016.

RIBEIRO, R. S. Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica. p. 125, 2013.